1. Dokažte, že je-li $M = \mathbb{R}^n$, pak ϱ_1, ϱ_2 a ϱ_∞ jsou metriky.
Poznámka: Je-li $M = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, potom $\varrho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|$ je součtová metrika, $\varrho_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ je eukleidovská metrika a $\varrho_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\}$ je maximální metrika.

Řešení příkladu 1:
Ověříme, že platí axiomy (m1), (m2) a (m3) z Definice 1.1.

a) Pro součtovou metriku ϱ_1 platí:
(m1) „$\Rightarrow$“ $\varrho_1(x, y) = 0 \Rightarrow |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = 0 \Rightarrow x = y$
„$\Leftarrow$“ $x = y \Rightarrow |x_1 - y_1| = 0 \wedge \dots \wedge |x_n - y_n| = 0 \Rightarrow \varrho_1(x, y) = 0$.
(m2) $\varrho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = |y_1 - x_1| + \dots + |y_n - x_n| = \varrho_1(y, x)$.
(m3) $\varrho_1(x, z) + \varrho_1(z, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum\limits_{i=1}^{n} |z_i - y_i| = \sum\limits_{i=1}^{n} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \geq \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| =$
$= \varrho_1(x, y)$.

b), c) Viz text přednášky.

2. a) V $\mathbb{R}^2$ načrtněte kružnice se středem $a \in \mathbb{R}^2$ s poloměrem $r > 0$ v metrice ϱ_1, ϱ_2, ϱ_∞.
α) Zapište tyto kružnice jako množiny K_1, K_2, K_3.
β) Zapište množiny $B_r(a)$ pro jednotlivé metriky, jde-li o kruhy bez hraniční kružnice (tedy obecně v $\mathbb{R}^n$ jde o otevřené koule („ball“), tedy o okolí bodu a).
b) V $\mathbb{R}^3$ načrtněte okolí bodu $a \in \mathbb{R}^3$ v metrice ϱ_1, ϱ_2, ϱ_∞.

3. Mějme $M = \mathbb{R}$. Dokažte, že funkce ϱ není metrika. Dále pak doplňte předpis $\varrho(x, y)$ tak, aby šlo o metriku.
a) $\varrho(x, y) = |x - 2y|$,
b) $\varrho(x, y) = |x^3 - y|$.

4. Uvažujme $M = C(\langle a, b\rangle)$, tj. množinu všech funkcí spojitých na $\langle a, b\rangle$. Dokažte platnost axiomu (m3) pro metriku stejnoměrné konvergence ϱ_C.
Poznámka: Je-li $M = C(\langle a, b\rangle)$ a $f, g \in M$, potom $\varrho_C(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in \langle a, b\rangle\}$ je metrika stejnoměrné konvergence.

Řešení příkladu 4:
Dokažme, že platí $(m3):\ \varrho_C(f, g) \leq \varrho_C(f, h) + \varrho_C(h, g), \quad \forall f, g, h \in M = C(\langle a, b\rangle)$.

Označme indexem j to $x \in \langle a, b\rangle$, pro které nastane maximum z hodnot $|f(x) - g(x)|$, tj. $|f(x_j) - g(x_j)|$ a podobně indexy k, l pro dvojici funkcí f, h a h, g. Potom $\varrho_C(f, h) + \varrho_C(h, g) = |f(x_k) - h(x_k)| + {}$ $+|h(x_l) - g(x_l)| \geq$ (pozn.: indexy k, l jsou použity pro „maximum“, tak můžeme použít jakýkoli jiný index a my použijeme zrovna index j) $|f(x_j) - h(x_j)| + |h(x_j) - g(x_j)| \geq |f(x_j) - h(x_j) + h(x_j) - g(x_j)| =$ $= |f(x_j) - g(x_j)| = \varrho_C(f, g)$

5. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ body $A = [3, 0]$ a $B = [2, 1]$. Určete jejich vzdálenost v metrikách ϱ_1, ϱ_2 a ϱ_∞, tj. určete $\varrho_1(A, B)$, $\varrho_2(A, B)$ a $\varrho_\infty(A, B)$

6. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ body $A = [0, 0]$ a $B = [4, 1]$. Určete bod, resp. body, které splňují definici středu úsečky AB:
a) v eukleidovské metrice ϱ_2,
b) v součtové metrice ϱ_1,
c) v maximální metrice ϱ_∞.
Poznámka: Bod S nazveme středem úsečky AB, jestliže platí $\varrho(A, S) = \varrho(B, S) = \min\{\varrho(A, S_i) : \varrho(A, S_i) = \varrho(B, S_i), i \in \mathbb{N}\}$.

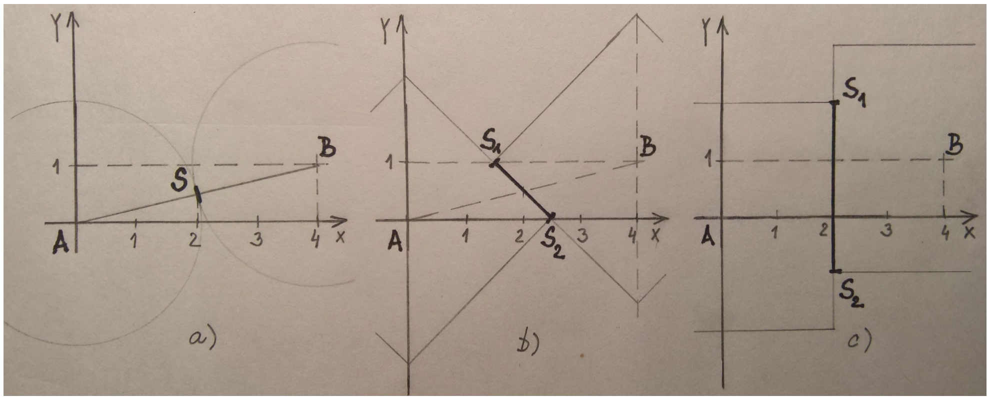
Řešení příkladu 6:
V metrice ϱ_2 je středem úsečky AB bod S, v metrikách ϱ_1 a ϱ_∞ tvoří středy úsečku S_1S_2, viz obrázek 1.

7. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ body $A = [0, 0]$ a $B = [4, 1]$. Určete osu úsečky AB v metrice ϱ_1, ϱ_2 a ϱ_∞.

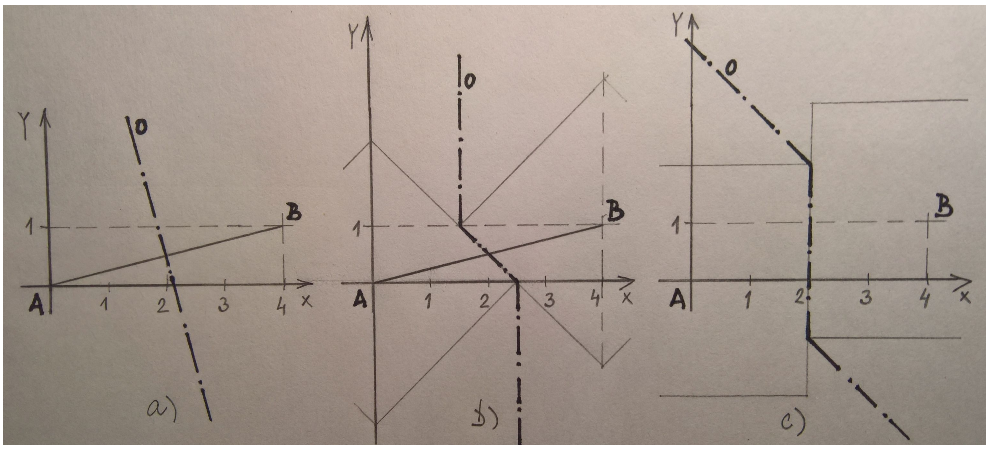
Řešení příkladu 7 je zobrazeno na obrázku 2.

8. Nalezněte příklad metrického prostoru, kde neexistuje střed úsečky.

Řešení příkladu 8:
Množina $M = \{x, y\}$, tedy pouze dva prvky, s metrikou ϱ, pro kterou platí $\varrho(x, x) = \varrho(y, y) = 0$ a $\varrho(x, y) = \varrho(y, x) = 1$. Středem by musel být bod $s \in M$ takový, že $\varrho(x, s) = \varrho(y, s) = \varrho(x, y)/2 = \frac{1}{2}$, ale takový s neexistuje.



Obrázek 1: Řešení příkladu 6



Obrázek 2: Řešení příkladu 7

9. Mějme $M = C(\langle a, b\rangle)$. Určete vzdálenost funkcí f, g v metrikách ϱ_C a ϱ_I.
   a) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x}, x \in \langle 0, 1\rangle$,
   b) $f(x) = x, g(x) = \ln x, x \in \langle \frac{1}{e}, e\rangle$,
   c) $f(x) = x^2, g(x) = x^3, x \in \langle 0, 1\rangle$.

   Poznámka: Je-li $M = C(\langle a, b\rangle)$ a $f, g \in M$, potom $\varrho_I(f, g) = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x$ je integrální metrika.

   Řešení příkladu 9:
   a) $\varrho_C(f, g) = \frac{1}{4}$, $\varrho_I(f, g) = \frac{1}{6}$.
   b) Při určování $\varrho_C(f, g)$ hledáme globální extrémy (stačí nám globální maximum) funkce $h(x) = |f(x) - g(x)| = x - \ln x$ pro $x \in \langle \frac{1}{e}, e\rangle$. Stacionárním bodem je bod $x = 1$ a funkční hodnoty jsou $h\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - \ln\frac{1}{e} = \frac{1}{e} + 1 \doteq 1{,}4$, $h(1) = 1$, $h(e) = e - \ln e = e - 1 \doteq 1{,}7$. V metrice stejnoměrné konvergence je vzdálenost funkcí f a g tedy $\varrho_C(f, g) = e - 1$. V integrální metrice je vzdáleností $\varrho_I(f, g) = -\frac{2}{e} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2}$.
   c) $\varrho_C(f, g) = \frac{2}{27}$, $\varrho_I(f, g) = \frac{1}{12}$.

10. Mějme $M = \mathbb{R}$. Ověřte, že následující funkce jsou metriky.
    a) $\varrho(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$,
    b) $\varrho(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$,
    c) $\varrho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$,
    d) $\varrho(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$.

Řešení příkladu 10:
a) Axiom totožnosti: $\varrho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$, pro $\forall x,y\in M$:
„$\Rightarrow$“ $\varrho(x,y)=0 \Rightarrow \ln(1+|x-y|)=0 \Rightarrow 1+|x-y|=1 \Rightarrow |x-y|=0 \Rightarrow x=y$,
„$\Leftarrow$“ $x=y \Rightarrow |x-y|=0 \Rightarrow 1+|x-y|=1 \Rightarrow \ln(1+|x-y|)=0 \Rightarrow \varrho(x,y)=0$.
Axiom symetrie: $\varrho(x,y)=\varrho(y,x)$, pro $\forall x,y\in M$:
$\varrho(x,y)=\ln(1+|x-y|)=\ln(1+|y-x|)=\varrho(y,x)$.
Trojúhelníková nerovnost: $\varrho(x,y)+\varrho(y,z)\geq\varrho(x,z)$, pro $\forall x,y,z\in M$:
Při důkazu platnosti trojúhelníkové nerovnosti využijeme toho, že platí $\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$.
Obdržíme díky tomu $\varrho(x,y)+\varrho(y,z)=\ln(1+|x-y|)+\ln(1+|y-z|)=$
$\ln\big((1+|x-y|)\cdot(1+|y-z|)\big)=\ln(1+|y-z|+|x-y|+|x-y||y-z|)$. Vzhledem k tomu, že funkce $\ln x$ je rostoucí a $|x-y|+|y-z|\geq|x-z|$, pak platí $\ln(1+|y-z|+|x-y|+|x-y||y-z|)\geq$
$\ln(1+|x-z|)=\varrho(x,z)$.
b) Platnost axiomu totožnosti a axiomu symetrie je zřejmá. Uveďme dva způsoby, jak je možné trojúhelníkovou nerovnost dokázat:
α) Při důkazu platnosti trojúhelníkové nerovnosti využijeme toho, že funkce $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$ je rostoucí pro $\forall t\in\mathbb{R}$. To, že jde o rostoucí funkci, plyne z první derivace $f'(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}>0$ pro $\forall t\in\mathbb{R}$. Víme-li, že funkce f je rostoucí, pak pro $a\geq b$, kde $a,b\in\mathrm{Dom(f)}$, platí, že $f(a)\geq f(b)$. Chceme tedy dokázat trojúhelníkovou nerovnost $\varrho(x,y)+\varrho(y,z)\geq\varrho(x,z)$. Platí $\varrho(x,y)+\varrho(y,z)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}+\dfrac{|y-z|}{1+|y-z|}\geq$(navýšíme jmenovatel o vhodné hodnoty) $\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|+|y-z|}+\dfrac{|y-z|}{1+|y-z|+|x-y|}=\dfrac{|x-y|+|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|}$. Označíme-li $|x-y|+|y-z|=a$ a $|x-z|=b$, pak víme, že $a\geq b$. Díky tomu, že funkce f je rostoucí, tak platí $f(a)=\dfrac{|x-y|+|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|}\geq f(b)=\dfrac{|x-z|}{1+|x-z|}=\varrho(x,z)$.
β) Ekvivalentními úpravami ukážeme, že je trojúhelníková nerovnost platná:

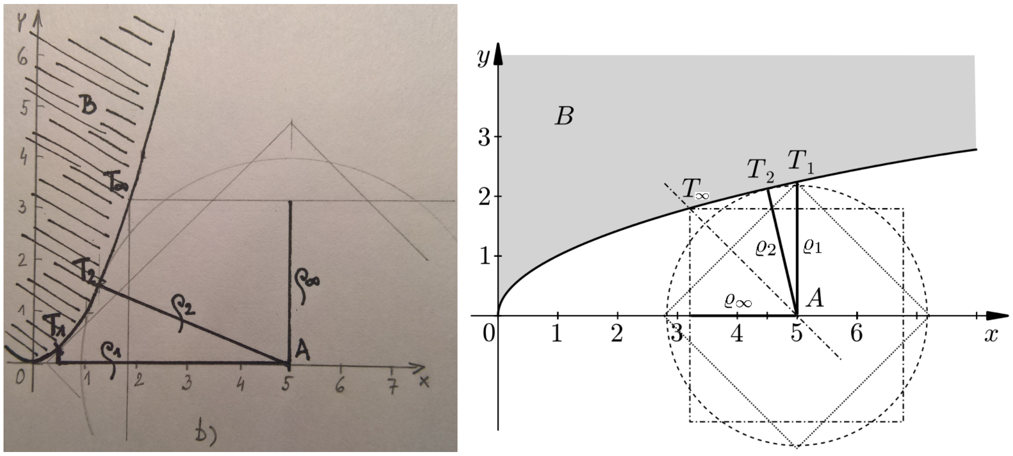
$$\begin{aligned}
&\frac{|x-z|}{1+|x-z|}\leq\frac{|x-y|}{1+|x-y|}+\frac{|y-z|}{1+|y-z|}, \qquad /\cdot(1+|x-z|)(1+|x-y|)(1+|y-z|)\\
&|x-z|(1+|x-y|)(1+|y-z|)\leq|x-y|(1+|x-z|)(1+|y-z|)+|y-z|(1+|x-z|)(1+|x-y|),\\
&|x-z|\big(1+|y-z|+|x-y|+|(x-y)(y-z)|\big)\leq\\
&\qquad\leq|x-y|\big(1+|y-z|+|x-z|+|(x-z)(y-z)|\big)+|y-z|\big(1+|x-y|+|x-z|+|(x-z)(x-y)|\big),\\
&|x-z|+|(x-z)(y-z)|+|(x-z)(x-y)|+|(x-z)(x-y)(y-z)|\leq\\
&\qquad\qquad\leq|x-y|+|(x-y)(y-z)|+|(x-y)(x-z)(y-z)|+\\
&\qquad\qquad+|y-z|+|(y-z)(x-y)|+|(y-z)(x-z)|+|(y-z)(x-z)(x-y)|,\\
&|x-z|\leq|x-y|+|(x-y)(y-z)|+|(x-y)(x-z)|+|(x-y)(x-z)(y-z)|+|y-z|+|(y-z)(x-y)|.
\end{aligned}$$

Víme, že platí $|x-z|\leq|x-y|+|y-z|$, tedy platí také $|x-z|\leq|x-y|+|y-z|+k$, kde $k\geq0$ a tím pádem dokazovaná trojúhelníková nerovnost platí.

c) Platnost axiomu totožnosti a axiomu symetrie je zřejmá. Při důkazu platnosti trojúhelníkové nerovnosti $\sqrt{|x-y|}+\sqrt{|y-z|}\geq\sqrt{|x-z|}$ nejprve upravujme a odhadujme výraz $\left(\sqrt{|x-y|}+\sqrt{|y-z|}\right)^2$. Tedy $\left(\sqrt{|x-y|}+\sqrt{|y-z|}\right)^2=|x-y|+2\sqrt{|x-y||y-z|}+|y-z|\geq|x-y|+|y-z|\geq|x-z|$. Po odmocnění dostáváme platnost trojúhelníkové nerovnosti.
d) Zřejmé.

11. V $\mathbb{R}^2$ určete graficky i výpočtem vzdálenost množin A a B v metrice $\varrho_1,\varrho_2,\varrho_\infty$.
a) $A=\{[3,0]\}$, $B=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2: y=2x-1\}$,
b) $A=\{[5,0]\}$ a $B=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2: y\geq x^2\}$,
c) $A=\{[5,0]\}$ a $B=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2: y\geq\sqrt{x}\}$.

Řešení příkladu 11:
a) Jedním ze způsobů řešení je geometrický a vychází z toho, jak vypadá okolí bodu $[3,0]$ v různých metrikách. $\varrho_1(A,B)=2,5$ a je to délka úsečky s krajními body $[3,0]$ a T_1, kde bod T_1 je bod, ve kterém se dotkne přímky $y=2x-1$ co nejmenší okolí bodu $[3,0]$ v metrice ϱ_1. Souřadnice bodu T_1 jsou $[0,5;0]$; $\varrho_2(A,B)=\sqrt5$ je délka úsečky s krajními body $[3,0]$ a T_2, kde bod $T_2=[1,1]$ je průsečíkem kolmice



Obrázek 3: Grafické řešení příkladu 11 b), c)

vedené bodem $[3,0]$ k přímce $y = 2x - 1$ s touto přímkou; $\varrho_\infty(A,B) = \frac{5}{3}$ a je to délka úsečky s krajními body $[3,0]$ a T_∞, kde bod $T_\infty = \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right]$ je průsečíkem přímky se směrnicí -1 vedené bodem $[3,0]$ s přímkou $y = 2x - 1$.

Jiný způsob řešení je spíše početní:

„ϱ_1:“ Sestavíme funkci $f(x) = |3 - x| + |0 - (2x - 1)|$, která vyjadřuje vzdálenost bodů množiny A od bodů množiny B. Hledaná vzdálenost množin A, B je pak $\varrho_1(A,B) = \min\{f(x), x \in \mathbb{R}\}$. Určíme nulové body funkce f a hledáme extrémy funkce f na jednotlivých intervalech. Pro $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle$ jde o funkci $f(x) = 4 - 3x$, extrém nastává v bodě $x = \frac{1}{2}$ a jeho hodnota je $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$. Pro $x \in \left\langle \frac{1}{2}, 3\right\rangle$ jde o funkci $f(x) = 2 + x$, extrémy nastávají v bodech $x_1 = \frac{1}{2}$ a $x_2 = 3$ a jejich hodnota je $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$ a $f(3) = 5$. Pro $x \in \langle 3, \infty)$ jde o funkci $f(x) = -4 + 3x$, extrém nastává v bodě $x = 3$ a jeho hodnota je $f(3) = 5$. Minimální hodnoty tedy funkce f nabývá pro $x = \frac{1}{2}$ a vzdálenost množin A, B je v součtové metrice $\varrho_1(A,B) = \frac{5}{2}$.

„ϱ_2:“ Sestavíme funkci $f(x) = \sqrt{(3-x)^2 + (0 - (2x-1))^2}$ a $\varrho_2(A,B) = \min\{f(x), x \in \mathbb{R}\}$. Hledejme tedy extrémy funkce $g(x) = (3-x)^2 + (0 - 2x + 1)^2$. $g'(x) = 10x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. $g''(x) = 10 > 0$, tedy pro $x = 1$ jde o minimum. Funkce f nabývá pro $x = 1$ hodnoty $f(1) = \sqrt{5}$ a vzdálenost množin A, B je v euklidovské metrice $\varrho_2(A,B) = \sqrt{5}$.

„ϱ_∞:“ Vzhledem k tvaru okolí v metrice ϱ_∞ hledáme takový bod $[x,y]$ na přímce $y = 2x - 1$, pro který bude rozdíl x-ových souřadnic a y-ových souřadnic vzhledem k bodu $[3,0]$ stejný. Tedy hledáme řešení rovnice $|3 - x| = |0 - y|$, kde $y = 2x - 1$. Řešením rovnice $|3 - x| = |-2x + 1|$ je $x_1 = \frac{4}{3}$ a $x_2 = -2$, tedy máme dva body $\left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right]$ a $[-2,-3]$. Vzhledem k vzájemné pozici množin A a B je zřejmé, že $\varrho_\infty(A,B) = \left|3 - \frac{4}{3}\right| = \left|-2 \cdot \frac{4}{3} + 2\right| = \frac{5}{3}$.

b) Viz obrázek 3 vlevo. $\varrho_1(A,B) = \varrho_1(A,T_1) = \frac{19}{4}$, kde $T_1 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$, $\varrho_2(A,B) = \varrho_2(A,T_2) \doteq 4{,}06221$, kde $T_2 \doteq \left[1{,}2348; (1{,}2348)^2\right]$, $\varrho_\infty(A,B) = \varrho_\infty(A,T_\infty) \doteq 3{,}2087$, kde $T_\infty = \left[\frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{1}{2}, \left(\frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2\right]$.

c) Viz obrázek 3 vpravo. $\varrho_1(A,B) = \varrho_1(A,T_1) = \sqrt{5} \doteq 2{,}2361$, kde $T_1 = \left[5, \sqrt{5}\right]$, $\varrho_2(A,B) = \varrho_2(A,T_2) = \frac{\sqrt{19}}{2}$, kde $T_2 = \left[\frac{9}{2}, \sqrt{\frac{9}{2}}\right]$, $\varrho_\infty(A,B) = \varrho_\infty(A,T_\infty) \doteq 5 - 3{,}2087 = 1{,}7913$, kde $T_\infty = \left[\frac{11}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}, \sqrt{\frac{11}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}}\right]$.

12. Mějme v $\mathbb{R}^3$ dány body A, B, C, D, E, F, G, H jako vrcholy „krychle“ o hraně 2.
    a) Určete vzdálenost bodů A, G v ϱ_1, ϱ_2, ϱ_∞.
    b) Určete vzdálenost bodu B od spojnice bodů A, G.

13. V metrickém prostoru $(\mathbb{R}, |x-y|)$ je dána množina A. Určete A° (vnitřek množiny), ∂A (hranici množiny), $\overline{A}$ (uzávěr množiny) a A' (derivaci množiny).
    a) $A = \langle 0, 1\rangle \cup (2,3) \cup \{4\}$,
    b) $A = (0,1) \cap \mathbb{I}$,
    c) $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \langle 1, 2\rangle \cup \big((2,3) \cap \mathbb{Q}\big)$,
    d) $A = \langle -1, 2)$,

e) $A = \{-1, 0, 1\} \cup (2, 5\rangle$,
f) $A = \left\{\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{Q}\right\} \cup \left(\langle 2, 3) \cap \mathbb{Q}\right)$,
g) $A = \langle 3, 5)$,
h) $A = \{1, 2\} \cup (3, 5)$,
i) $A = (1, 4) \cap \mathbb{I}$.

Řešení příkladu 13:
a) $A^\circ = (0, 1) \cup (2, 3)$, $\partial A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\overline{A} = \langle 0, 1\rangle \cup \langle 2, 3\rangle \cup \{4\}$, $A' = \langle 0, 1\rangle \cup \langle 2, 3\rangle$.
b) $A^\circ = \emptyset$, $\partial A = \langle 0, 1\rangle$, $\overline{A} = \langle 0, 1\rangle$, $A' = \langle 0, 1\rangle$.
c) $A^\circ = \emptyset$, $\partial A = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \langle 1, 3\rangle$, $\overline{A} = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \langle 1, 3\rangle$, $A' = \{0\} \cup \langle 1, 3\rangle$.
d) $A^\circ = (-1, 2)$, $\partial A = \{-1, 2\}$, $\overline{A} = \langle -1, 2\rangle$, $A' = \langle -1, 2\rangle$.
e) $A^\circ = (2, 5\rangle$, $\partial A = \{-1, 0, 1, 2, 5\}$, $\overline{A} = \{-1, 0, 1\} \cup \langle 2, 5\rangle$, $A' = \langle 2, 5\rangle$.
f) $A^\circ = \emptyset$, $\partial A = \left\{\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{Q}\right\} \cup \langle 2, 3\rangle$, $\overline{A} = \left\{\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{Q}\right\} \cup \langle 2, 3\rangle$, $A' = \langle 2, 3\rangle$.
g) $A^\circ = (3, 5)$, $\partial A = \{3, 5\}$, $\overline{A} = \langle 3, 5\rangle$, $A' = \langle 3, 5\rangle$.
h) $A^\circ = (3, 5)$, $\partial A = \{1, 2, 3, 5\}$, $\overline{A} = \{1, 2\} \cup \langle 3, 5\rangle$, $A' = \langle 3, 5\rangle$.
i) $A^\circ = \emptyset$, $\partial A = \langle 1, 4\rangle$, $\overline{A} = \langle 1, 4\rangle$, $A' = \langle 1, 4\rangle$.

14. Dokažte, že v $\mathbb{R}$ jsou dané metriky ekvivalentní.
a) $\varrho(x, y) = |x - y|$ a $\sigma(x, y) = \log(1 + |x - y|)$.
b) $\varrho(x, y) = |x - y|$ a ϱ_2 a ϱ_∞.

Řešení příkladu 14 a):
„$\Rightarrow$“ Uvažujme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, která v (M, ϱ) konverguje k x, což stručně zapíšeme jako $x_n \to x$ v $(M, \varrho) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x, x_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (1 + |x_n - x|) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \log(1 + |x_n - x|) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sigma(x_n, x) = 0 \Rightarrow x_n \to x$ v (M, σ),
„$\Leftarrow$“ $x_n \to x$ v $(M, \sigma) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sigma(x_n, x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \log(1 + |x_n - x|) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (1 + |x_n - x|) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x, x_n) = 0 \Rightarrow x_n \to x$ v (M, ϱ).

15. Dokažte, že v $C(\langle -1, 1\rangle)$ nejsou metriky ϱ_C a ϱ_I ekvivalentní.

16. Ukažte, že metrický prostor $(C(\langle -1, 1\rangle), \varrho_I)$ není úplný.

Řešení příkladu 16 je v textu přednášky z SA2, viz příklad 4.2, str. 6.

17. Ukažte, že metrický prostor $((2, 3), \varrho(x, y) = |x - y|)$ není úplný.

Řešení příkladu 17: Uvažujme posloupnost $\left\{2 + \frac{1}{n}\right\}$. Tato posloupnost je v metrickém prostoru $(\langle 2, 3\rangle, \varrho)$ konvergentní, protože $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$, tedy je také cauchyovská v $(\langle 2, 3\rangle, \varrho)$. Ale protože posloupnost konverguje k bodu 2, který neleží v zadaném $(2, 3)$, není konvergentní v $(2, 3)$, a tedy zadaný metrický prostor není úplný.

18. Ukažte, že metrický prostor $((a, b), \varrho(x, y) = |x - y|)$ není úplný.

Řešení příkladu 18: Uvažujme posloupnost $\left\{a + \frac{b-a}{n+1}\right\}$. Tato posloupnost je v metrickém prostoru $(\langle a, b), \varrho)$ konvergentní, protože $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a + \frac{b-a}{n+1}\right) = a$, tedy je také cauchyovská v $(\langle a, b), \varrho)$. Ale protože posloupnost konverguje k bodu a, který neleží v zadaném (a, b), není konvergentní v (a, b), a tedy zadaný metrický prostor není úplný.

19. Rozhodněte, zda je daný metrický prostor úplný.
a) $(\langle 0, 1\rangle, \varrho(x, y) = |x - y|)$,
b) $(\mathbb{R}, \varrho(x, y) = |x - y|)$,
c) $\left(\mathbb{R}^n, \varrho_1(x, y) = \sum\limits_{i=1}^n |x_i - y_i|\right)$,
d) $\left(\mathbb{R}^2, \varrho_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\right)$,
e) $\left(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty(x, y) = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i - y_i|\right)$,
f) $\left(C(\langle a, b\rangle), d_2(f, g) = \sqrt{\int\limits_a^b (f(x) - g(x))^2 \, \mathrm{d}x}\right)$.

Řešení příkladu 19: a) Není úplný, viz poznámka v textu přednášky za větou 3.6. b), c), d), e) Viz text přednášky, příklad 4.2.

20. Mějme $M = C(\langle -1, 1\rangle)$ a $F : M \to M$ definováno jako $F(f(x)) = f(-x)$. Dokažte, že F je izometrické zobrazení Mdo M:
a) v metrice ϱ_C,
b) v metrice ϱ_I.

Řešení příkladu 20 b): $\varrho_I(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x$. Protože platí, že je-li definiční obor funkce f symetrický, pak lze f zapsat jako součet sudé funkce a liché funkce (viz věta 8.9 přednášek z SA1), zaveďme tedy sudé funkce s_f, s_g a liché funkce l_f, l_g, pro které platí $f(x) = s_f(x) + l_f(x)$ a $g(x) = s_g(x) + l_g(x)$. Dále bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f(x) \geq g(x) \geq 0$ pro $\forall x \in \langle -1, 1\rangle$. Potom $\varrho_I(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x) - g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} s_f(x) + l_f(x) - (s_g(x) + l_g(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} s_f(x) - s_g(x)\mathrm{d}x + \underbrace{\int\limits_{-1}^{1} l_f(x) - l_g(x)\mathrm{d}x}_{=0} = \int\limits_{-1}^{1} s_f(x) - s_g(x)\mathrm{d}x$. Upravou vyjádření pro $\varrho_I(F(f), F(g))$ za předpokladu, že $F(f(x)) \geq F(g(x))$ pro $\forall x \in \langle -1, 1\rangle$ dostáváme $\varrho_I(F(f), F(g)) = \int\limits_{-1}^{1} F(f(x)) - F(g(x))\mathrm{d}x = f(-x) - g(-x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} s_f(-x) - s_g(-x)\mathrm{d}x + \underbrace{\int\limits_{-1}^{1} l_f(-x) - l_g(-x)\mathrm{d}x}_{=0} = \int\limits_{-1}^{1} s_f(x) - s_g(x)\mathrm{d}x = \varrho_I(f,g)$. Tedy zobrazení F je izometrické.

21. Mějme množiny M, N a metriku $\varrho(x,y) = |x - y|$. Uvažujme zobrazení $F : M \to N$ takové, že $F(x) = \dfrac{1}{x}$.
Na základě grafu rozhodněte, zda je zobrazení f stejnoměrně spojité, v případě, že:
a) $M = N = (0, \infty)$,
b) $M = \langle 1, \infty), N = (0, 1\rangle$.

Řešení příkladu 21 je na obrázku 4.

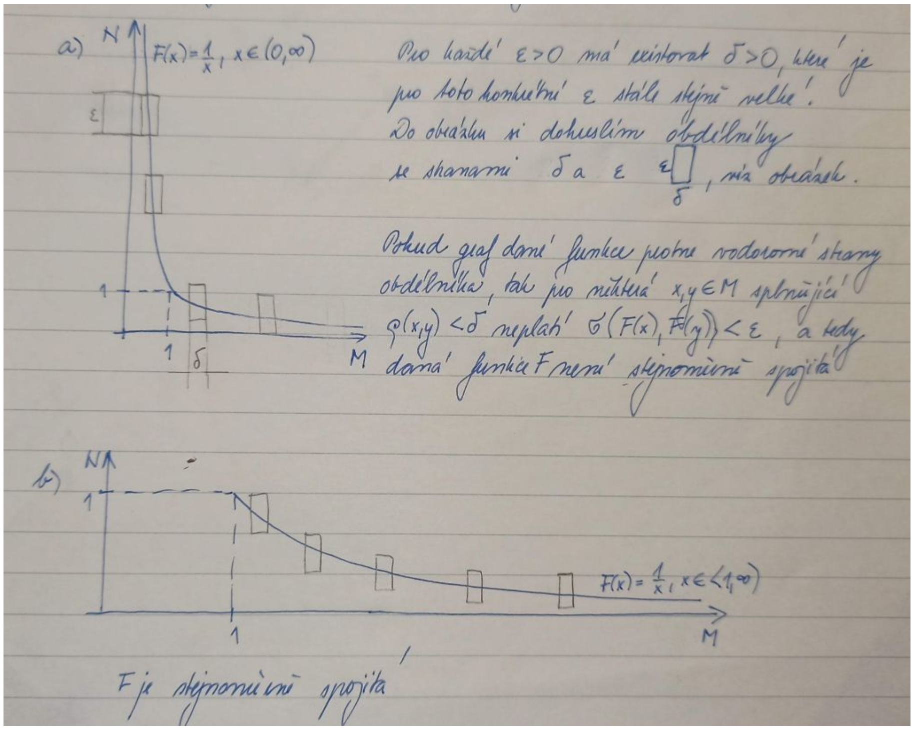
22. Mějme $M = N = \mathbb{R}$ a metriku $\varrho(x,y) = |x - y|$. Uvažujme zobrazení $F : M \to N$ takové, že:
a) $F(x) = \sin x$,
b) $F(x) = \mathrm{e}^x$,
c) $F(x) = \mathrm{arctg} x$,
d) $F(x) = x^2$,
e) $F(x) = \dfrac{x}{2}$.
Na základě grafu rozhodněte, zda je zobrazení F stejnoměrně spojité, resp. zda je zobrazení F lipschitzovské. Pokud je lipschitzovské, tak rozhodněte, zda jde o kontrakci, případně určete nějaký interval, na kterém by o kontrakci šlo.

Řešení příkladu 22: a), c), e) F je lipschitzovské (pro a) viz obrázek 5), tedy je i stejnoměrně spojité, tedy je i spojité, b), d) F není stejnoměrně spojité, není lipschitzovské (pro b) viz obrázek 5).

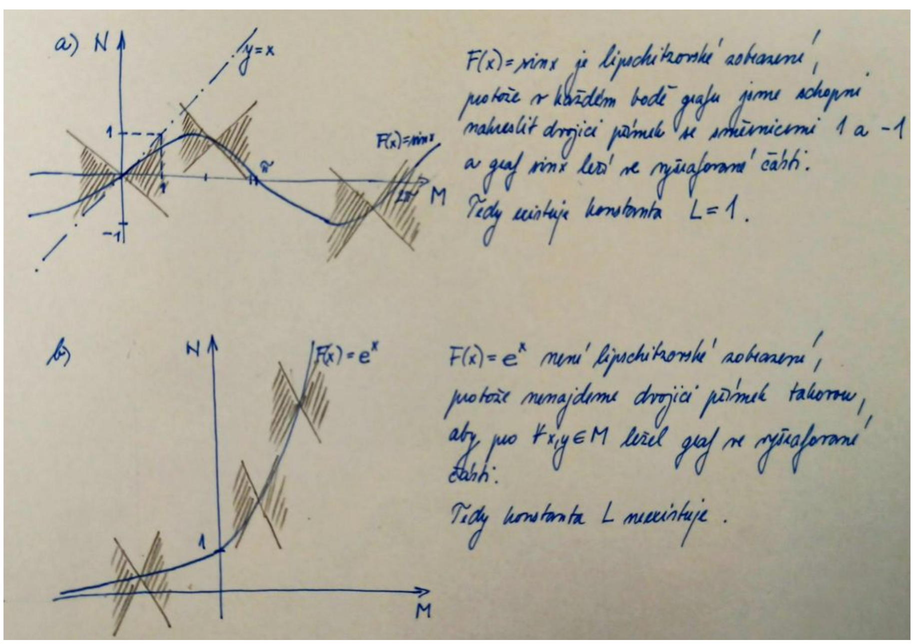
23. Mějme $M = N = \langle 0, 1\rangle$ a metriku $\varrho(x,y) = |x - y|$. Uvažujme zobrazení $F : M \to N$ takové, že $F(x) = \sqrt{x}$.
Na základě grafu rozhodněte, zda je zobrazení f stejnoměrně spojité, resp. zda je zobrazení f lipschitzovské.

Řešení příkladu 23: F je stejnoměrně spojité, není lipschitzovské.

24. Metodou postupných aproximací najděte za pomoci Banachovy věty řešení dané rovnice.
a) $x = \cos x$, $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$,
b) $x = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)$, $x \in \langle 0, 1\rangle$,
c) $x = \sqrt{x}$, $x \in \left\langle \frac{1}{4}, 2\right\rangle$.



Obrázek 4: Grafické řešení příkladu 21



Obrázek 5: Grafické řešení otázky lipschitzovskosti zobrazení a) a b) z příkladu 22

Zdroje:
DOŠLÁ, Zuzana a Ondřej DOŠLÝ. Metrické prostory: teorie a příklady. 4. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2016. ISBN 978-80-210-8357-8.
Seriál - Metrické prostory I, II, III. In: Matematický korespondenční seminář [online]. 25. ročník 2005/2006, MFF UK, 2009 [cit. 2019-02-07]. Dostupné z: https://mks.mff.cuni.cz/archive/25/9.pdf