1. Nakreslete definiční obor funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   a) $f(x,y) = \dfrac{x-2}{\sqrt{y-\frac{x}{3}}}$,
   b) $f(x,y) = \ln(y^2 - 9x + 1)$,
   c) $f(x,y) = \arccos \dfrac{x-1}{y}$.

2. Nakreslete definiční obor funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   a) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$;
   b) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;
   c) $f(x,y) = \frac{5x-7}{2x^2+3y^2-12}$;
   d) $f(x,y) = \frac{x^2-2y}{y^2-2x}$;
   e) $f(x,y) = \frac{2}{x^2-y^2-1}$;
   f) $f(x,y) = \operatorname{cotg}(x+y)$;
   g) $f(x,y) = \sqrt{3x-y}$;
   h) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y-x}}$;
   i) $f(x,y) = \ln(x+y)$;
   j) $f(x,y) = \arcsin(x-y)$;
   k) $f(x,y) = \arccos(1-x^2-y^2)$;
   l) $f(x,y) = \frac{10x}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$;
   m) $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y)^2}$;
   n) $f(x,y) = \sqrt{\sin \pi(x^2+y^2)}$;
   o) $f(x,y) = \sqrt{\sin(y-x)}$;
   p) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{y^2-9}$;
   q) $f(x,y) = \ln(x\ln(y-x))$;
   r) $f(x,y) = \ln(y^2-4x+8)$;
   s) $f(x,y) = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$;
   t) $f(x,y) = \ln(xy)$;
   u) $f(x,y) = \sqrt{x-\sqrt{y}}$;
   v) $f(x,y) = \arcsin \frac{y-1}{x}$;
   w) $f(x,y) = \ln x - \ln \sin y$.

   Řešení příkladu 2 je formou náčrtků na 3 nascanovaných listech papíru „scan a)-h)“, „scan i)-p)“, „scan q)-w)“, viz odkazy na `www.mathonline.fme.vutbr.cz`

3. Metodou řezů určete graf funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   a) $f(x,y) = x^2 + y^2$,
   b) $f(x,y) = -\sqrt{16-x^2-y^2}$,
   c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - 3$.

4. Metodou řezů, nebo pomocí softwaru WolframAlpha určete graf funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   a) $f(x,y) = x$;
   b) $f(x,y) = |x|$;
   c) $f(x,y) = 1-x-y$;
   d) $f(x,y) = x-y$;
   e) $f(x,y) = x+y$;
   f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;
   g) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$;
   h) $f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}$;
   i) $f(x,y) = x^2+y^2$;
   j) $f(x,y) = x^2-y^2$.

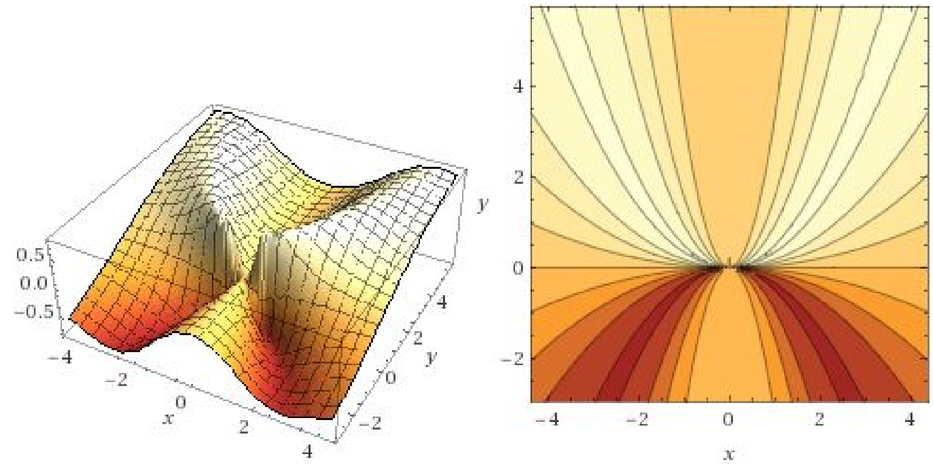
5. Načtněte jednotlivá tělesa zadaná nerovnostmi, slovy popište těleso T, které vznikne jako průnik všech nerovností.
   a) $T: \quad x^2+y^2 \le 4,\ z \ge 7-\sqrt{x^2+y^2},\ z \le 10,\ y \ge \frac{\sqrt{3}}{3}x$,
   b) $T: \quad x^2+y^2+z^2 \le 16,\ z \ge \sqrt{x^2+y^2},\ y \ge |x|$,
   c) $T: \quad z \ge \sqrt{x^2+y^2}-4,\ z \le 6-x^2-y^2,\ y \le \sqrt{3}x$.

6. Definujte pojem limita $a \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, \infty\}$ funkce f v bodě $X_0 = [x_0, y_0]$, kde X_0 je hromadným bodem $D(f)$.

7. Co můžete říct o existenci limity $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{4x^2y}{x^4+6y^2}$ na základě výpočtu:
   a) metodou svazku přímek,
   b) metodou svazku parabol,
   c) transformací do polárních souřadnic $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

   Řešení příkladu 7:
   a) Pomocí svazku přímek $y = kx$ vychází 0, tedy o existenci limity nelze rozhodnout.
   b) Pomocí svazku parabol $y = ky^2$ vychází $\frac{4k}{1+6k^2}$, tedy výsledek závisí na parametru k, a proto zadaná limita neexistuje. To, že výsledek závisí na parametru k paraboly je dobře vidět i na obrázku „vrstevnic“ zadané plochy $f(x,y) = \frac{4x^2y}{x^4+6y^2}$, které vidíme na obrázku 1 vpravo. Z obrázku je možné usoudit, že blížíme-li se k bodu $[0,0]$ po konkrétní parabole, tak se pohybujeme ve stále stejné vzdálenosti od roviny xy, a tedy hodnota vypočtená limitou odpovídá pro konkrétní parabolu konkrétní hodnotě. Tedy pro různé paraboly vychází různá hodnota a limita tudíž neexistuje.

   c) Pro $r \to 0^+$ vychází 0. I kdybychom předpokládali, že limitou je číslo 0, tak se nám nepodaří zadanou funkci po transformaci do polárních souřadnic upravit na tvar $g(r) \cdot h(\varphi)$, kde by $g(r) \to 0$ a $h(\varphi)$ byla



Obrázek 1: Vlevo je graf plochy $f(x,y) = \frac{4x^2y}{x^4+6y^2}$ z příkladu 7, vpravo je zobrazení vrstevnic

ohraničená, tedy aby platilo $\left| \underbrace{\frac{4r^2\cos^2\varphi r \sin\varphi}{r^4\cos^4\varphi + 6r^2\sin^2\varphi}}_{f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)} - \underbrace{0}_{a} \right| \leq g(r)$, tudíž k ověření, že by limitou bylo číslo 0, není možné použít ani větu 6.9, viz text přednášky z SA2:

Věta 6.9. *Funkce* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $[x_0, y_0]$ *limitu* $a \in \mathbb{R}$, *jestliže existuje* $r^* > 0$ *a funkce* $g : (0, \infty) \to \langle 0, \infty)$ *taková, že* $\lim\limits_{r\to 0^+} g(r) = 0$ *a* $|f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - a| \leq g(r)$ *pro každé* $r \in (0, r^*)$ *a každé* $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$.

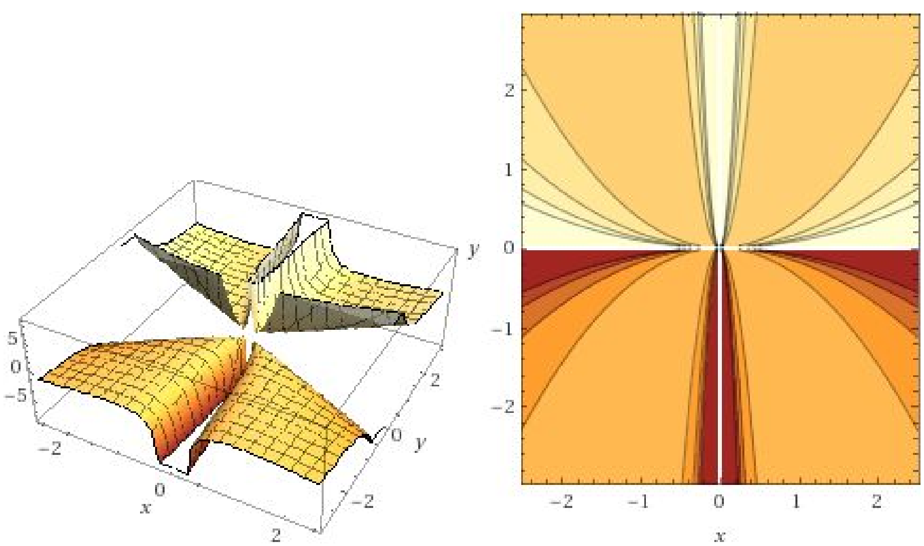
Speciálně platí:

Je-li $f(x,y) = g(r)\cdot h(\varphi)$, *kde* $\lim\limits_{r\to 0^+} g(r) = 0$ *a* $h(\varphi)$ *je ohraničená, potom* $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y) = 0$.

8. Co můžete říct o existenci limity $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{5x^4+y^2}{7x^2y}$ na základě výpočtu:

   a) metodou svazku přímek,

   b) metodou svazku parabol.



Obrázek 2: Vlevo je graf plochy $f(x,y) = \frac{5x^4+y^2}{7x^2y}$ z příkladu 8, vpravo je zobrazení vrstevnic

Řešení příkladu 8:

a) Pomocí svazku přímek $y = kx$ vychází $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{5x^4+y^2}{7x^2y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{5x^4+(kx)^2}{7x^2\cdot k\cdot x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{5x^2+k^2}{7kx} = \left[\frac{0+k^2}{0^+ \text{ nebo } 0^-}\right]$.

Tedy pro $x \to 0^+$ vychází $+\infty$ a pro $x \to 0^-$ vychází $-\infty$ a limita tudíž neexistuje.
b) Pomocí svazku parabol $y = ky^2$ vychází $\frac{5+k^2}{7k}$, tedy výsledek závisí na parametru k, a proto zadaná limita neexistuje. To, že výsledek závisí na parametru k paraboly je dobře vidět i na obrázku „vrstevnic“ zadané plochy $f(x,y) = \frac{5x^4+y^2}{7x^2y}$, které vidíme na obrázku 2 vpravo. Z obrázku je možné usoudit, že blížíme-li se k bodu $[0,0]$ po konkrétní parabole, tak se pohybujeme ve stále stejné vzdálenosti od roviny xy, a tedy hodnota vypočtená limitou odpovídá pro konkrétní parabolu konkrétní hodnotě. Tedy pro různé paraboly vychází různá hodnota a limita tudíž neexistuje.

9. Vypočtěte $\lim\limits_{[x,y]\to[2,0]} f(x,y)$, kde $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \in \mathbb{R} \setminus \{[0,0],[2,0]\}, \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [2,0]. \end{cases}$

Výsledkem příkladu 9 je číslo $\frac{1}{2}$.

10. Co můžete říct o existenci limity $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy}{x^2+y^2}$ na základě výpočtu:
a) metodou svazku přímek,
b) transformací do polárních souřadnic $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Řešení příkladu 10:
a) Pomocí svazku přímek $y = kx$ vychází $\frac{k}{1+k^2}$, tedy limita neexistuje.
b) Vychází $\cos\varphi\sin\varphi$, tedy výsledek závisí na parametru φ, a proto limita neexistuje.

11. Dokažte, že $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} = 0$.

Řešení příkladu 11:
Pomocí transformace do polárních souřadnic $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ se podaří zadanou funkci zapsat jako součin $g(r)\cdot h(\varphi)$, kde $g(r) \to 0$ a $h(\varphi)$ je ohraničená.

12. Dokažte, že $\lim\limits_{[x,y]\to[0,1]} \frac{x^2+(y-1)^2y}{x^2+(y-1)^2} = 1$.

Řešení příkladu 12:
Pomocí transformace do posunutých polárních souřadnic $x = r\cos\varphi$, $y = 1 + r\sin\varphi$ se podaří zadanou funkci zapsat jako součet $1 + g(r)\cdot h(\varphi)$, kde $g(r) \to 0$ a $h(\varphi)$ je ohraničená. Řešení je uvedeno také v přednáškách SA2, příklad 6.10.

13. Dokažte, že $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2} = 1$.

Řešení příkladu 13:
Platí $f^g = \mathrm{e}^{g\cdot\ln f}$, dále použijeme transformaci do polárních souřadnic. Zajímá nás tedy limita výrazu $r^2\cos^2\varphi r^2\sin^2\varphi\cdot\ln r^2 = 2r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cdot\ln r$ pro $r \to 0^+$, tedy $\lim\limits_{r\to0^+} 2r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cdot\ln r =$

$$= \lim_{r\to0^+} \frac{2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cdot\ln r}{\frac{1}{r^4}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{r\to0^+} \frac{2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cdot\frac{1}{r}}{-4r^{-5}} = \lim_{r\to0^+} \frac{r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{-2} = 0.$$

Protože funkce $h(\varphi) = \cos^2\varphi\sin^2\varphi$ je ohraničená a platí $|\cos^2\varphi\sin^2\varphi| \le 1$, potom platí také $\left|\frac{r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{-2} - 0\right| \le \frac{r^4}{2} = g(r)$ a zároveň platí $\lim\limits_{r\to0^+} \frac{r^4}{2} = 0$. Podle věty 6.9 je tedy dílčí limitou číslo 0 a výsledná limita má hodnotu $\mathrm{e}^0 = 1$.

14. Vypočtěte limitu. Pokud limita neexistuje, tak to dokažte.

a) $\lim\limits_{[x,y]\to[1,0]} \frac{x+y+1}{x+y+3}$,

b) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$,

c) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x-2y}{3x+y}$,

d) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^3y}{x^4+y^4}$,

e) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$,

f) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

Řešení příkladu 14:
a) Přímo dosadíme a vyjde $\frac{1}{2}$.
b) Rozšíříme zlomek, vykrátíme a vyjde 2.
c) Limita neexistuje, rozhodnou např. postupné limity.
d) Limita neexistuje, rozhodne např. svazek přímek.
e) Jde o součin výrazu $x+y$, který jde k nule a ohraničených funkcí, tedy vyjde 0.
f) Limita neexistuje, rozhodne např. svazek přímek, nebo polární souřadnice.

15. Spočtete následující limity.

a) $\lim\limits_{[x,y]\to[1,0]} \dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

b) $\lim\limits_{[x,y]\to[2,2]} \dfrac{x^2-y^2}{x^2-xy+3x-3y}$,

c) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$,

d) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{1}{x^4+y^4} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$,

e) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$,

f) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$,

g) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\sin(6x^2+6y^2)}{2(x^2+y^2)}$,

h) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} (1+xy)^{\frac{1}{xy}}$,

i) $\lim\limits_{[x,y]\to[3,-2]} (1+2x+3y)^{\frac{1}{2x+3y}}$.

Řešení příkladu 15:
a) Přímo dosadíme a vyjde $\ln 2$.
b) Ve jmenovateli vytkneme $x-y$, vykrátíme s čitatelem a vyjde $\frac{4}{5}$.
c) Zlomek vhodně rozšíříme, vykrátíme a vyjde 12.
d) 1. způsob řešení:
Využijeme odhad výrazu $(x^2+y^2)^2$. Platí $(x^2+y^2)^2 = x^4+2x^2y^2+y^4 \le x^4+y^4 \le 2(x^4+y^4)$, tedy $\dfrac{1}{2(x^4+y^4)} \le \dfrac{1}{x^4+y^4}$, odkud $\dfrac{1}{(x^4+y^4)} \le \dfrac{2}{x^4+y^4}$. Potom platí $0 \le \dfrac{1}{x^4+y^4} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \le \dfrac{1}{x^2+y^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.
Zavedeme substituci $x^2+y^2=t$ a vypočteme limitu funkce na pravé straně nerovnosti. $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{1}{x^2+y^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{2}{t} \mathrm{e}^{\frac{-1}{t^2}}$. Zavedeme substituci $\frac{1}{t^2}=v$, potom $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{2}{t}\mathrm{e}^{\frac{-1}{t^2}} = \lim\limits_{v\to\infty} 2v\mathrm{e}^{-v} = 2\lim\limits_{v\to\infty} \frac{v}{\mathrm{e}^v} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 2\lim\limits_{v\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^v} = 2\cdot 0 = 0$. Tedy podle věty o třech limitách platí $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{1}{x^4+y^4} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = 0$.
2. způsob řešení:
Využijeme odhad $\mathrm{e}^t > \frac{t^3}{6}$, který platí pro $\forall t>0$, protože podle Taylorovy věty platí $\mathrm{e}^t = \underbrace{1+t+\dfrac{t^2}{2}}_{>0} + \dfrac{t^3}{3} + \underbrace{\dfrac{\mathrm{e}^{\vartheta} t}{4} t^4}_{>0 \text{ pro } t>0}$, kde $\vartheta \in (0,1)$. Odtud $6\mathrm{e}^t > t^3$, tedy $\frac{1}{e^t} < \frac{6}{t^3}$. Platí tedy $0 \le \dfrac{1}{x^4+y^4} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \le \dfrac{1}{x^4+y^4} \cdot \dfrac{6}{\frac{1}{(x^2+y^2)^3}} = 6\dfrac{(x^2+y^2)^3}{x^4+y^4} = 6\dfrac{x^+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6}{x^4+y^4} = 6\left(x^2\dfrac{x^4}{x^4+y^4} + 3y^2\dfrac{x^4}{x^4+y^4} + 3x^2\dfrac{y^4}{x^4+y^4} + y^2\dfrac{y^4}{x^4+y^4}\right)$.
$\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} 6\left(x^2\frac{x^4}{x^4+y^4} + 3y^2\frac{x^4}{x^4+y^4} + 3x^2\frac{y^4}{x^4+y^4} + y^2\frac{y^4}{x^4+y^4}\right) = |\text{ohr.}\cdot 0| = 0$. Podle věty o třech limitách pak platí $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{1}{x^4+y^4} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = 0$.
e) 0.
f) Při výpočtu budeme potřebovat odhad $|\sin t| \le |t|$ pro $\forall t \in \mathbb{R}$ a větu o třech limitách. Protože

$\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} \leq \left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right|$ pro $\forall[x,y] \neq [0,0]$, zaměříme se nejprve na odhad $\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right|$ a určení limity tohoto výrazu. Zřejmě platí $0 \leq \left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right|$ a také díky úvodnímu odhadu i $\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|$. Pomocí převodu do polárních souřadnic určíme, že $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$, tedy $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = 0$ a podle věty o třech limitách platí, že $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right| = 0$ a tedy $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0$.

g) 3.
h) e.
i) e.

16. Spočtěte následující limity.

a) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,5]} \dfrac{\sin x \cdot y}{x}$,

b) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$,

c) $\lim\limits_{[x,y]\to[\infty,\infty]} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$,

d) $\lim\limits_{[x,y]\to[\infty,\infty]} (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$.

Řešení příkladu 16:
a) Platí $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$, dosadíme a vyjde 5.
b) Vyjde 1. Využijeme $f^g = \mathrm{e}^{g \ln f}$ a řešení je možné převodem do polárních souřadnic.
c) Vyjde 0. Myšlenka řešení je vidět, pokud (jen kvůli další úvaze) dosadíme $y = x$, pak zřejmě $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{2})^{x^2} = 0$, protože $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$. Je tedy potřeba dokázat, že $\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| < 1$. To, že je zadaná limita rovna nule, se dá také dokázat po transformaci $x = 1/u$ a $y = 1/v$, převodem do polárních souřadnic a výpočtem pro $r \to 0^+$.
d) Vyjde 0, řešení je v přednáškách SA2, příklad 6.8.

17. Rozhodněte o spojitosti funkce v bodě $[0,0]$.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ \frac{1}{2} & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+y^2+9}-3}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ \frac{1}{2} & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$

Řešení příkladu 17:
a) Fce f je nespojitá, protože limita v bodě $[0,0]$ neexistuje, o čemž rozhodne např. svazek parabol.
b) Fce f je spojitá. Limita se vypočte přímo po rozšíření výrazem $\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}$ a vyjde $\frac{1}{2} = f(0,0)$.
c) Fce f je spojitá. O tom, že limitou je číslo nula rozhodneme převedením do polárních souřadnic.
d) Fce f je nespojitá, protože limita neexistuje, o čemž rozhodne například svazek přímek.
e) Fce f je nespojitá, protože limitou je číslo $\frac{1}{3}$ a $f(0,0) = 2$, tj. $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sqrt{x^2+y^2+9}-3}{x^2+y^2} \neq f(0,0)$.

Zdroje:
DEMIDOVIČ, Boris Pavlovič. Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003. ISBN 80-7200-587-1.
KADEŘÁBEK, Zdeněk. Limity funkcí více proměnných. Brno, 2007. Bakalářská práce. PřF MU Brno. Vedoucí práce doc. RNDr. Josef Kalas, CSc.,
dostupné na http://www.karlin.mff.cuni.cz/ kuncova/kalkulus1/Limity_funkci_vice_promennych.pdf.
TOMICA, Rudolf. Cvičení z matematiky: určeno pro posl. fak. strojní, stavební a elektrotechn. Praha: SNTL, 1968. Učební texty vysokých škol.