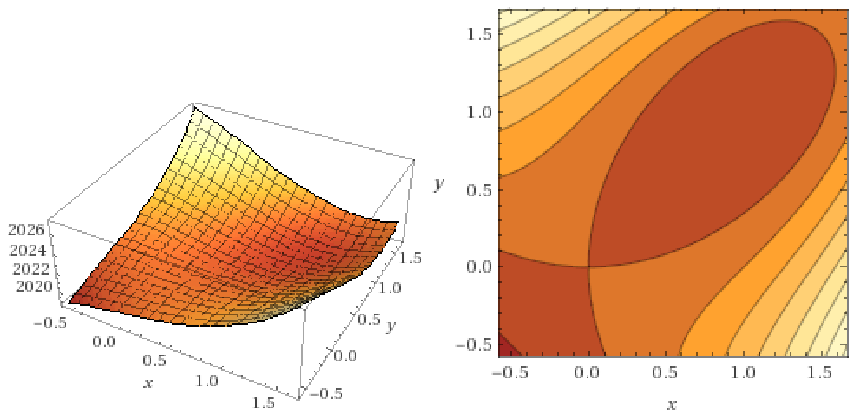
1. Přiřaďte dané kvadratické formě K symetrickou matici A a rozhodněte o typu kvadratické formy (tj. rozhodněte o definitnosti matice A):
   a) $K(x,y,z) = 4x^2 + 6xy - 8y^2 + 2yz + z^2$, *[indefinitní]*
   b) $K(x,y,z) = -2x^2 - 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 4xz + 2yz$, *[negativně definitní]*
   c) $K(x,y,z) = 4x^2 + 2y^2 + 15z^2 + 4xy - 4xz - 8yz$. *[pozitivně definitní]*

2. Pro která $a \in \mathbb{R}$ je kvadratická forma $K(x,y,z) = ax^2 + ay^2 + (a-3)z^2 + 2xy + 2axz + 2yz$ negativně definitní? *[$a \in (-\infty, -1)$]*

3. Vyšetřete lokální extrémy funkce f.

   (a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 2020$.
   Řešení příkladu 3a je znázorněno na obrázku 1. Vychází stacionární body $A = [0,0]$ a $B = [1,1]$. V bodě A extrém nenastává, o čemž rozhodneme pomocí definice lokálního extrému. Tj. spočteme funkční hodnotu ve stacionárním bodě a ve vhodných bodech z jeho okolí. Vychází $f(A) = 2020$, $f(0,1;0) = 0,1^3 + 0^3 - 3 \cdot 0,1 \cdot 0 + 2020 > f(A)$, $f(0;-0,2) = 0^3 + (-0,2)^3 - 3 \cdot 0 \cdot (-0,2) + 2020 < f(A)$. Bod A tedy není lokálním extrémem. V bodě B je ostré lokální minimum na základě rozhodovacího kritéria, viz přednáška SA2, věta 10.8 Sylvestrovo kritérium a věta 10.11.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 2020$ (vlevo) a její vrstevnice (vpravo)

   (b) $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$.
   Řešení příkladu 3b je znázorněno na obrázku 2. Vyjdou stacionární body $A = [1,0]$, $B = [-1,0]$, $C = [0,1]$, $D = [0,-1]$, $E = [\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$, $F = [-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$, $G = [-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$, $H = [\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$. Body E, F jsou ostrá lokální minima, G, H jsou ostrá lokální maxima.

   (c) $f(x,y) = x^2 + \frac{2y^2}{x} + 4y$, *[$[1,-1]$ osté lokální minimum]*

   (d) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, *[$[\frac{1}{2},1,1]$ o. l. min., $[-\frac{1}{2},-1,-1]$ o. l. max.]*

   (e) $f(x,y) = 4x^3 + 8y^3 - 24xy + 3$, *[stac. body $A = [0,0]$ a $B = [\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}]$, v B je o. l. min.]*

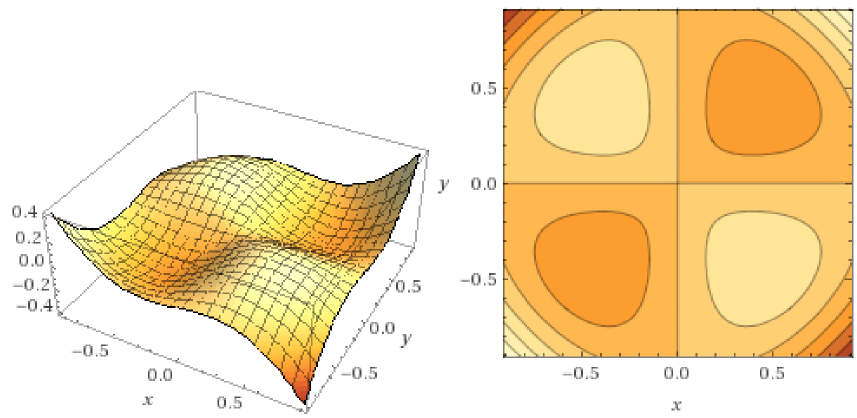
   (f) $f(x,y) = xy(6-x-y)$, *[stac. body $A = [0,0]$, $B = [6,0]$, $C = [0,6]$, $D = [2,2]$, v D je o. l. max.]*

   (g) $f(x,y) = \left(x^2 - 2y + 1\right)^2$, *[stac. body leží na parabole $x^2 - 2y + 1 = 0$ a jde o neostrá minima]*

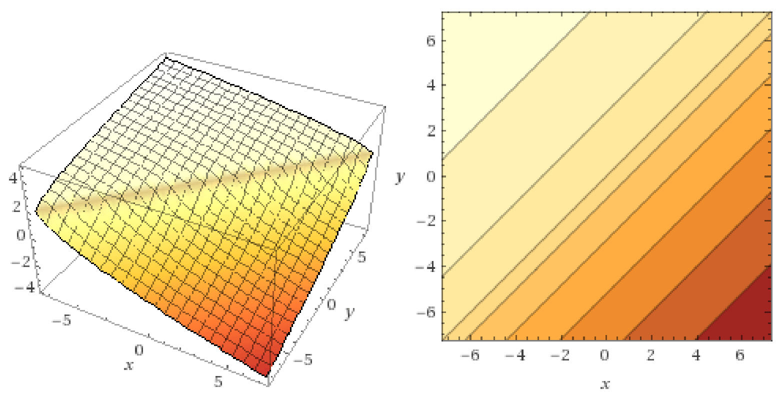
   (h) $f(x,y) = 2 - \sqrt[3]{(x-y)^2}$.
   Řešení příkladu 3h je znázorněno na obrázku 3. Parciální derivace neexistují v bodech na přímce $y = x$ a jde o neostrá maxima.

   (i) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$, *[stac. body $A = [0,0,-1]$, $B = [24,-144,-1]$, v B je o. l. min]*

   (j) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$. *[$[\frac{1}{2},1,1]$ o. l. min., $[-\frac{1}{2},-1,-1]$ o. l. max.]*



Obrázek 2: Graf funkce $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$ (vlevo) a její vrstevnice (vpravo)



Obrázek 3: Graf funkce $f(x,y) = 2 - \sqrt[3]{(x-y)^2}$ (vlevo) a její vrstevnice (vpravo)

(k) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 3xz - 2y + 2z$,
[stacionární body $A = [1,1,1]$, $B = [2,1,4]$, v B je o. l. min.]

(l) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x-y}(x^2 - 2y^2)$, *[stac. body $A = [-4,-2]$, $B = [0,0]$, v A je o. l. max.]*

(m) $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$,
Řešení příkladu 3m je znázorněno na obrázku 4. Stacionární body jsou $A = [-1,0]$, $B = [0,-1]$, $C = [0,0]$, $D = [0,1]$, $E = [1,0]$. Body B a D jsou ostrá lokální maxima, bod C je ostré lokální min.

(n) $f(x,y) = 2x^3 + y^2 + 7$. *[stac. bod je $A = [0,0]$ a extrém v něm nenastává, o čemž rozhodneme podle definice lokálních extrémů]*

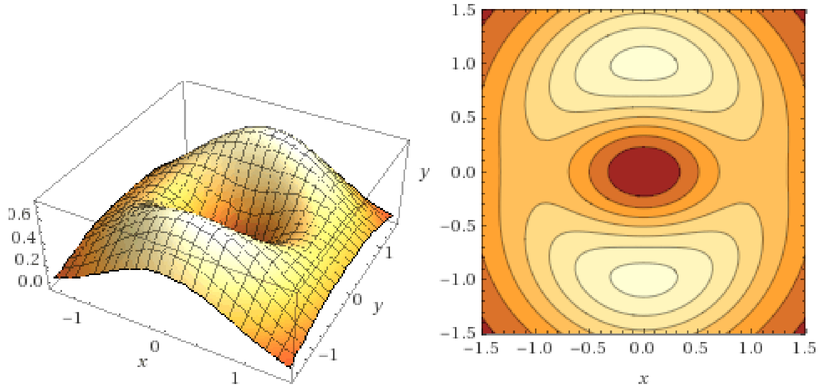
(o) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + yz - 2x + y - z$.

(p) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 5$.

(q) $f(x,y) = y^3$.

(r) $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$. *[ve stac. bodě $A = [-1,0]$ je o. l. min]*

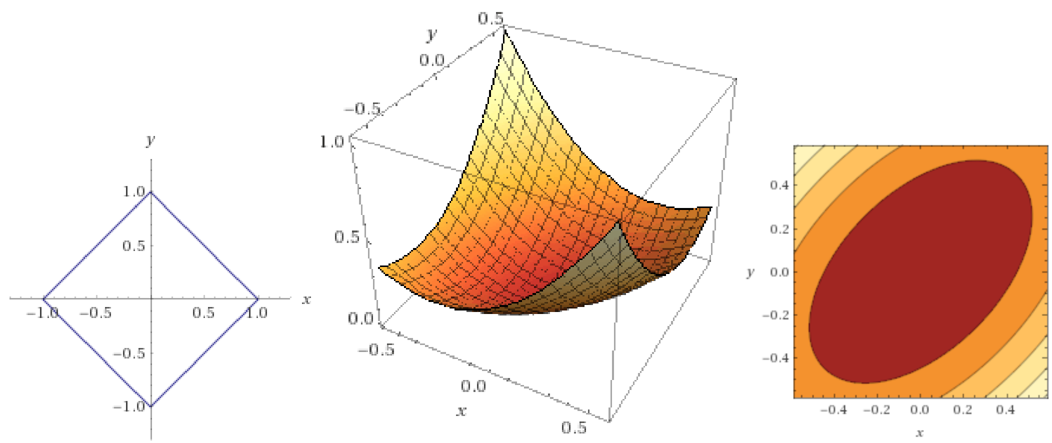
(s) $f(x,y) = x^3 - 6x - 6xy + 6y + 3y^2$
[stac. body jsou $A = [0,-1]$, $B = [2,1]$, A není extrém, B je o. l. min]



Obrázek 4: Graf funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2)$ (vlevo) a její vrstevnice (vpravo)

4. Určete globální extrémy funkce f na množině M.

   (a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 1\}$.
   Řešení příkladu 4a je znázorněno na obrázku 5. V bodě $[0,0]$ je globální minimum, body $[\pm 1, 0]$ a $[0, \pm 1]$ jsou globální maxima.



Obrázek 5: Množina $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 1\}$ (vlevo), graf funkce $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ (uprostřed) a vrstevnice funkce f (vpravo)

   (b) $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y$ na množině $M = \triangle ABC$, kde $A = [2,-2]$, $B = [-3,2]$, $C = [-3,-2]$.
   Řešení příkladu 4b:
   Při hledání stac. bodů funkce f vyjde bod $S_1 = [1,1] \notin M$. Na vazební podmínce dané přímkou $AB : y = -\frac{4}{5}x - \frac{2}{5}$ leží stacionární bod $S_2 = \left[-\frac{8}{3}, \frac{26}{15}\right] \in M$, na vazební podmínce dané přímkou $BC : x = -3$ neleží žádný stacionární bod, na vazební podmínce dané přímkou $AC : y = -2$ leží stacionární bod $S_3 = [-4,-2] \notin M$. Porovnáním funkčních hodnot v bodech S_2 a A, B, C dojdeme k závěru, že globální minimum nastává v bodě A a má hodnotu -8, globální maximum nastává v bodě C a má hodnotu 37.

   (c) $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$, $M = \triangle ABC$, kde $A = [-5,-1]$, $B = [3,-1]$, $C = [3,6]$.

   (d) $f(x,y) = 6 - x^2 - y^2$ na množině $M = \triangle ABC$, kde $A = [5,3]$, $B = [7,-1]$, $C = [5,-1]$.
   Řešení příkladu 4d:
   Při hledání stac. bodů funkce f vyjde bod $S_1 = [0,0] \notin M$. Na vazební podmínce dané přímkou $AB : y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$ leží stacionární bod $S_2 \doteq [5,2; ??] \in M$, na vazební podmínce dané přímkou

$BC : z = -1$ leží stacionární bod $S_3 \doteq [0, -1] \notin M$, na vazební podmínce dané přímkou $AC : x = 5$ leží stacionární bod $S_4 = [5, 0] \in M$. Porovnáním funkčních hodnot v bodech S_2, S_4 a A, B, C dojdeme k závěru, že globální maximum nastává v bodě $S_4 = [5, 0]$ a má hodnotu -19 a globální maximum nastává v bodě $B = [7, -1]$ a má hodnotu -44.

(e) Určete globální extrémy funkce $f(x, y, z) = x+y+z$ na množině $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq x \leq 1\}$.

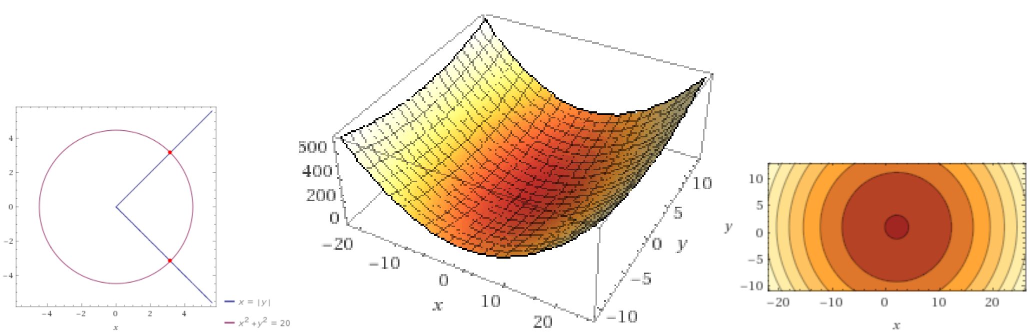
Řešení příkladu 4e:
Výpočtem parciálních derivací zjistíme, že fce f nemá stacionární body. Na vazební podmínce $x = y^2 + z^2$ (což je rotační paraboloid s osou rotace x) leží stacionární bod $S_1 = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right] \in M$. Na vazební podmínce $x = 1$ (což je rovina rovnoběžná s rovinou danou osami y a z) neleží žádný stacionární bod. Nyní potřebujeme porovnat funkčních hodnoty v bodě S_1 a v bodech, kde se protínají vazební podmínky (jde o body na kružnici dané rovnicí $y^2 + z^2 = 1$, která je průsečnicí rotačního paraboloidu $x = y^2 + z^2$ a roviny $x = 1$). Funkční hodnota v bodech na kružnici $y^2 + z^2 = 1$ se různí, vede nás to na výpočet vázaných extrémů funkce f s vazbami $y^2 + z^2 = 1$ za podmínky $x = 1$ a vyjdou nám stacionární body $S_2 = \left[1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $S_3 = \left[1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Porovnáme $f(S_1) = -0,5$, $f(S_2) = 1 + \sqrt{2} \doteq 2,4$ a $f(S_3) = 1 - \sqrt{2} \doteq -0,4$. Závěr je, že globální minimum nastalo v bodě S_1 a globální maximum nastalo v bodě S_2.

(f) Určete nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x, y) = (2x^2+3y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

Řešení příkladu 4f:
Stacionárními body jsou body $S_1 = [0, 0]$, $S_{21} = [0, 1]$, $S_{22} = [0, -1]$, $S_{31} = [1, 0]$, $S_{32} = [-1, 0]$. Určíme funkční hodnoty ve stacionárních bodech $f(S_1) = 0$, $f(S_{21}) = f(S_{22}) = \frac{3}{\mathrm{e}}$, $f(S_{31}) = f(S_{32}) = \frac{2}{\mathrm{e}}$ a funkční hodnoty na hranici množiny M, pro které uděláme odhad $\frac{8}{\mathrm{e}^4} \leq f(\text{v bodech na hranici}) \leq \frac{12}{\mathrm{e}^4}$. Nejmenší hodnoty nabývá funkce f v bodě $S_1 = [0, 0]$ a největší hodnoty nabývá v bodech S_{21} a S_{22}.

(g) $f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 - 2y$ na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq |y| \wedge x^2 + y^2 \leq 20\}$.

Řešení příkladu 4g je znázorněno na obrázku 6. Kandidáty na globální extrém jsou body $A = [2, 1]$, $B = [4, 2]$, $C = \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$, $D = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$, $E = [0, 0]$, $F = \left[\sqrt{10}, \sqrt{10}\right]$, $G = \left[\sqrt{10}, -\sqrt{10}\right]$. Globální maximum nastává v bodě G a globální minimum v bodě A.



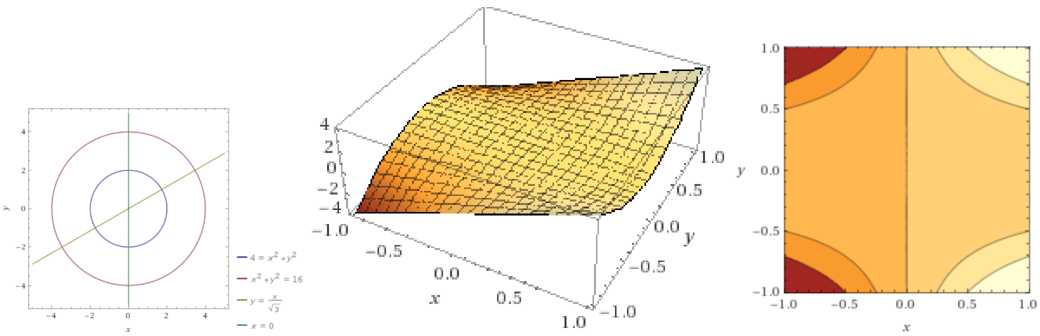
Obrázek 6: Množina $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq |y| \wedge x^2 + y^2 \leq 20\}$ (vlevo), graf funkce $f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 - 2y$ (uprostřed) a vrstevnice funkce f (vpravo)

(h) $f(x, y, z) = x + y + z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq x \leq 1\}$.

[$A = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$, $B = \left[1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $C = \left[1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, g. max. je v B, g. min. je v A]

5. Určete globální maximum funkce f na množině M.
$f(x, y) = 4xy^2$, $M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16,\ y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x,\ x \geq 0\right\}$.

Při řešení příkladu 5 nejprve vytipujte, kde by globální maximum mělo ležet a pak hledejte jen na této jediné vazbě. Situace je znázorněna na obrázku 7.



Obrázek 7: Množina $M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 4 \le x^2 + y^2 \le 16,\ y \ge \frac{\sqrt{3}}{3}x,\ x \ge 0\right\}$ (vlevo), graf funkce $f(x,y) = 4xy^2$ (uprostřed) a vrstevnice funkce f (vpravo)

Zdroje:

ELIÁŠ, Jozef, Ján HORVÁTH a Juraj KAJAN. Zbierka úloh z vyššej matematiky (3. díl). Bratislava: Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1970. Edícia teoretickej literatúry (Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry).