1. Funkce $y = f(x)$ je v okolí bodu $X_0 = [x_0, y_0]$ dána implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$. Pomocí věty 11.3 nejprve ověřte, že taková funkce f existuje, dále pak určete první a druhou derivaci funkce f v bodě x_0.

   (a) $x^2 + y^2 - 4 = 0,\ X_0 = [\sqrt{3}, 1]$,

   (b) $x^2 + x^2y^3 + \ln y - 8 = 0,\ X_0 = [2, 1]$,

   (c) $3x + x^2y + \ln(xy) + y - 4 - 2\mathrm{e} = 0,\ X_0 = [1, \mathrm{e}]$,

   (d) $x^2 + y^2 + 4\sin y - \pi^2 = 0,\ X_0 = [0, \pi]$,

   (e) $\frac{x^2}{9} + y^2 - 1 = 0,\ X_0 = [-3, 0]$,

   (f) $x - y^2 + 1 = 0,\ X_0 = [-1, 0]$.

   Řešení příkladu 1:
   b) Označme $F(x, y)$ levou stranu rovnice $\underbrace{x^2 + x^2y^3 + \ln y - 8}_{F(x,y)} = 0$. Ověříme, že bod $X_0 = [x_0, y_0] = [2, 1]$ splňuje $F(x_0, y_0) = 0$. Skutečně platí $2^2+2^2\cdot1^3+\ln 1-8 = 0$. Spočteme $F'_y = 0+x^2\cdot3y^2+\frac{1}{y}-0 = 3x^2y^2+\frac{1}{y}$ a ověříme, že je v bodě X_0 spojitá. Tedy spočteme limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[2,1]}\left(3x^2y^2 + \frac{1}{y}\right) = 3\cdot2^2\cdot1^2 + \frac{1}{1} = 13$ a $F'_y(2, 1) = 3\cdot2^2\cdot1^2 + \frac{1}{1} = 13$, tedy platí $\lim\limits_{[x,y]\to[2,1]} F'_y(x, y) = F'_y(2, 1)$ a F'_y je proto spojitá v X_0. Dále platí $F'_y(2, 1) = 13 \neq 0$. Předpoklady věty 11.3 jsou splněny, tedy v okolí bodu X_0 je rovnicí $F(x, y) = 0$ implicitně definována právě jedna funkce $y = f(x)$, která je spojitá.
   Spočteme 1. a 2. derivaci funkce f v bodě $x_0 = 2$.
   $f'(x) = -\dfrac{F'_x}{F'_y} = -\dfrac{2x + y^3\cdot2x + 0 - 0}{0 + x^2\cdot3y^2 + \frac{1}{y} - 0} = -\dfrac{2x + 2xy^3}{3x^2y^2 + \frac{1}{y}}$.
   $f'(2) = -\dfrac{2\cdot2 + 1^3\cdot2\cdot2}{2^2\cdot3\cdot1^2 + \frac{1}{1}} = -\dfrac{8}{13}$.
   $f''(x) = (f'(x))' = \left(-\dfrac{2x + 2xy^3}{3x^2y^2 + \frac{1}{y}}\right)' =$
   $$= -\frac{\left(2 + 2\left(1\cdot y^3 + x\cdot3y^2\cdot y'\right)\right)\cdot\left(3x^2y^2 + \frac{1}{y}\right) - \left(2x + 2xy^3\right)\left(3\left(2xy^2 + x^2\cdot2y\cdot y'\right) - \frac{1}{y^2}\cdot y'\right)}{\left(3x^2y^2 + \frac{1}{y}\right)^2}.$$
   $f''(2) = \dfrac{348}{2197}$.
   c) $f'(1) = -\dfrac{2\mathrm{e} + 4}{\frac{1}{\mathrm{e}} + 2}$.

2. Funkce $y = f(x)$ je v okolí bodu $X_0 = [x_0, y_0]$ dána implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$. Rozhodněte, zda funkce v bodě X_0 roste, nebo klesá, je konvexní, nebo konkávní.

   (a) $xy + \ln y - 3 = 0,\ X_0 = [3, 1]$,

   (b) $x^2 + y^2 - 25 = 0,\ X_0 = [5\cdot\frac{1}{2}, 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}]$.

3. Funkce $z = f(x, y)$ je v okolí bodu $X_0 = [x_0, y_0, z_0]$ dána implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$. Pomocí věty 11.7 nejprve ověřte, že taková funkce f existuje a dále pak určete první parciální derivace funkce f v bodě X_0.

   (a) $\mathrm{e}^x + xy^2 + x^3z^2 + \ln z - 2 = 0,\ X_0 = [0, 5, \mathrm{e}]$,

   (b) $x^2 + y^3 + z + \sin z - 9 = 0,\ X_0 = [1, 2, 0]$

   (c) $x^2 + yz^2 + \sin(xz) - 4 = 0,\ X_0 = [2, 0, \pi]$.

   Řešení příkladu 3:
   c) $f'_x(2, 0) = -\dfrac{4 + \pi}{2},\ f'_y(2, 0) = -\dfrac{\pi}{2}$.

4. Určete lokální extrémy funkce $y = f(x)$ dané implicitně rovnicí:

   (a) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

(b) $x^4 + y^3 + 2x^2y + 2 = 0$.

(c) $\ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0$.

Řešení příkladu 4:
a) Bod $[\sqrt[3]{2}, (\sqrt[3]{2})^2]$ je ostré lokální maximum.
b) V bodech pro $x = 1$ a $x = -1$ nastává ostré lokální maximum, v bodě pro $x = 0$ nastává ostré lokální minimum.
c) Označme $F(x,y)$ levou část rovnice $\underbrace{\ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}}_{F(x,y)} = 0$. Potom pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot y\cdot(-1)\cdot\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot 1} = -\frac{x+y}{y-x} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Položíme první derivaci rovnu nule, tedy $\frac{x+y}{x-y} = 0 \Leftrightarrow x + y = 0 \Rightarrow y = -x$. Pro určení stacionárního bodu dosadíme $y = -x$ do zadané rovnice $F(x,y) = 0$, tj.

$$\begin{aligned}
\ln\sqrt{x^2+(-x)^2} - \operatorname{arctg}\tfrac{-x}{x} &= 0\\
\ln\sqrt{2x^2} &= \operatorname{arctg}(-1)\\
\sqrt{2x^2} &= \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}\\
\sqrt{x^2} &= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\\
x_1 &= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}, \quad y_1 = -x_1 = -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}},\\
x_2 &= -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = -x_2 = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

O tom zda a jaký extrém ve stacionárních bodech nastane, rozhodneme pomocí 2. derivace.
$f''(x) = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)' = \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}$.
$f''\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{(1+0)\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)\right) - \left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)\right)(1-0)}{\oplus} = \frac{2\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}}{\oplus} = \frac{\oplus}{\oplus} > 0$, funkce f je ve stac. bodě x_1 konvexní a je v něm tedy ostré lokální minimum.
$f''\left(-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\ominus}{\oplus} < 0$, funkce f je ve stac. bodě x_2 konkávní a je v něm tedy ostré lokální maximum.

5. Určete lokální extrémy funkce $z = f(x,y)$ dané implicitně rovnicí:

   (a) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - \sqrt{2}yz - 1 = 0$,

   (b) $2x - x^2 - 4y^2 - z = 0$.

   Řešení příkladu 5:
   a) Ostré lokální maximum je v bodě $\left[1, \sqrt{2}\right]$ a má hodnotu 2, ostré lokální minimum je v bodě $\left[-1, -\sqrt{2}\right]$ a jeho hodnota je -2.
   b) Tento příklad je možné řešit i tak, že z rovnice vyjádříme explicitně $z = 2x - x^2 - 4y^2$.

6. Určete, ve kterých bodech grafu funkce $y = f(x)$ dané implicitně rovnicí $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ je tečna rovnoběžná s osou x, resp. y.

   [Vodorovná tečna v bodech $\left[\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$, svislá tečna v bodech $\left[\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$]

7. Funkce $z = f(x,y)$ je v okolí bodu X_0 dána implicitně rovnicí $F(x,y,z) = 0$. Určete rovnici tečné roviny a rovnici normály ke grafu funkce f v bodě X_0.

   (a) $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{27} + \dfrac{z^2}{3} - 1 = 0$, $X_0 = [2,3,1]$, , *[$\tau: 3x + 2y + 6z - 18 = 0$]*

   (b) $x^2 + y^3 + z + \cos z - 6 = 0$, $X_0 = [2,1,0]$,

   (c) $x^2 + 3y^2 - 4z + 2x - 12y + 8z - 7 = 0$, $X_0 = 1, -2, 4]$,

   (d) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - x - y - z = 0$, $X_0 = [1,0,1]$, *[$\tau: x - 2y + z - 2 = 0$]*

8. Rozhodněte, zda plocha $z = f(x,y)$ daná rovnicí $x + y^2 + z^3 + z - 4 = 0$ leží v okolí bodu $X_0 = [1,1,1]$ pod tečnou rovinou nebo nad tečnou rovinou sestrojenou v tomto bodě. *[Plocha leží pod tečnou rovinou]*

9. Určete Taylorův polynom 2. řádu funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně rovnicí $z^3 - 2xz + y = 0$ v bodě $X_0 = [1, 1, 1]$. *[* $T_2(x, y) = 1 + 2(x - 1) - (y - 1) - 8(x - 1)^2 + 10(x - 1)(y - 1) - 3(y - 1)^2$ *]*

10. Je dána funkce $z = f(x, y)$ a vazební podmínka $g(x, y) = 0$. Určete vázané extrémy funkce f. Jinými slovy máme určit lokální extrémy funkce f vzhledem k množině, kterou tvoří body splňující $g(x, y) = 0$.

    (a) $f(x, y) = x + 2y + 3z + 4$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$.

    (b) $f(x, y) = x^2y$, $g(x, y) = e^x - y = 0$.

11. Je dána funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ a vazební podmínka $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$.
    a) Vyjádřete z vazby x^2, dosaďte do předpisu funkce f a pokuste se určit extrémy.
    b) Určete vázané extrémy funkce f metodou Lagrangeových neurčitých koeficientů.

    Řešení příkladu 11:
    a) Pokud nebudeme dostatečně obezřetní, tak daný postup povede k závěru, že extrém funkce $\overline{f}(y) = -y^2 + 2y + 3 + y^2 = 2y + 3$ neexistuje. To je ovšem v rozporu s úvahou o grafu funkce f (rotační paraboloid) a grafu vazební podmínky $g(x, y) = 0$ (kružnice se středem v bodě $[0, 1]$ a poloměrem 2). Pokud si tedy troufneme a „zjednodušíme“ funkci f na funkci jedné proměnné dosazením $x^2 = \ldots$, pak tímto výpočtem extrémů nemáme vyloučeno, že by extrém mohl nastat v bodech, ve kterých vazební podmínka není funkcí proměnné y, tj. v bodech $[0, -1]$ a $[0, 3]$. Další vyšetřování, zda v těchto bodech nastává vázaný extrém např. pomocí definice, je ovšem dost pracné.
    b) Vyjde vázané lok. minimum v bodě $[0, -1]$ pro $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ a vázané lok. maximum v bodě $[0, 3]$ pro $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$.

12. Je dána funkce $f(x, y) = x^2 - y^2 - 6xy$ a vazební podmínkou je přímka AB, kde $A = [-2, 0]$, $B = [0, 1]$.
    a) Určete vázané extrémy funkce f za podmínky $g(x, y) = 0$ metodou Lagrangeových neurčitých koeficientů.
    b) Určete vázané extrémy funkce f za podmínky dané přímkou AB tak, že z rovnice přímky vyjádříte $x = \ldots$ nebo $y = \ldots$ a dosadíte do funkce f.

    Řešení příkladu 12:
    a) Metoda Lagrangeových neurčitých koeficientů určí stacionární bod funkce L jako $S = \left[-\dfrac{14}{9}, \dfrac{2}{9}\right]$ pro $\lambda = \dfrac{80}{9}$. Kvadratická forma $d^2L(S, \lambda)$ je ovšem indefinitní, což podle poznámky za větou 12.4 neznamená, že v S není vázaný extrém. Určíme diferenciál vazební podmínky (tedy funkce g) a položíme ho roven nule, což znamená $dg(S) = \frac{\partial g}{\partial x}(S) \cdot h_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(S) \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot h_1 - 1 \cdot h_2 = 0$ (tj. určíme vektory $\vec{h} = (h_1, h_2)$ kolmé k vektoru gradientu $\nabla g(s)$). Tedy pro vektory $\vec{h}$ platí $h_1 = 2h_2$, což po dosazení do kvadratické formy $d^2L(S, \lambda) = 2x^2 + 2 \cdot (-6)xy - 2y^2$ za x a y dává funkci $\Phi(h_2) = 2 \cdot (2h_2)^2 + 2 \cdot (-6) \cdot 2h_2 \cdot h_2 - 2h_2^2 = -18h_2^2$. Tato kvadratická forma $\Phi(h_2)$ je negativně definitní, proto je v bodě S ostré vázané maximum.
    b) Z vazební podmínky vyjádříme např. $y = \frac{1}{2}x + 1$, dosadíme do zadané funkce f a určíte lokální extrémy funkce jedné proměnné. Potom tento lokální extrém je také extrémem vázaným.

13. Najděte vázané extrémy funkce f za uvedené podmínky.

    (a) $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ za podmínky $x^2 + y^2 = 1$.
    [$[\frac{4}{5}, \frac{3}{5}]$ *ostré vázané lokální minimum a* $[-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}]$ *ostré vázané lokální maximum]*

    (b) $f(x, y) = 2x + y + 6$ za podmínky $x^2 + y^2 - 5 = 0$.
    [$A = [-2, -1]$ *o. v. l. min.,* $B = [2, 1]$ *o. v. l. max.]*

    (c) $f(x, y) = 6 + xy$ za podmínky $x - y - 2 = 0$. *[* $A = [1, -1]$ *o. v. l. min.]*

    (d) $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$ za podmínky $x^2 + y^2 = 1$.
    [$A = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$ *o. v. l. max.,* $B = \left[-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right]$ *o. v. l. min.]*

    (e) $f(x, y) = x^2y$ za podmínky $y = e^x$. *[* $A = [-2, e^{-2}]$ *o. v. l. max.,* $B = [0, 1]$ *o. v. l. min.]*

    (f) $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$ za podmínky, která je dána přímkou AB, kde $A[1, 2]$ a $B[-3, -1]$.
    [$[-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}]$ *o. v. l. max.]*

    (g) $f(x, y) = x^3 + y^2 - xy + 2$ za podmínky, která je dána přímkou AB, kde $A[2, -2]$ a $B[2, 3]$.
    [$[2, 1]$ *o. v. l. min.]*

(h) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ za podmínky $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$.

[$[2,-2]$ o. v. l. max. a $[0,0]$ o. v. l. min.]

14. Najděte vázané extrémy funkce f za uvedených podmínek.

(a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ za podmínek $x + y - 3z + 7 = 0$, $x - y + z - 3 = 0$. *[$[0,-1,2]$ v. l .min.]*

(b) $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, $a > b > c > 0$ za podmínky $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

[$[\pm 1,0,0]$ o. v. l. min., $[0,0,,\pm 1]$ o. v. l. max. a $[0,\pm 1,0]$ extrém není]

(c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ za podmínek $x + 3 = 0$, $x - z = 0$.

15. Určete nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$ v trojúhelníku tvořeném souřadnými osami a tečnou ke grafu funkce $y = \frac{4}{x}$ v bodě $[2,2]$. *[$[0,4]$ a $[4,0]$ g.min. a $[1,1]$ g.max.]*

16. Určete nejmenší a největší hodnotu funkce $z = (2x^2 + 3y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. *[$[0,\pm 1]$ g.max. a $[0,0]$ g. min]*

17. Je dán drát délky l. Tento drát je rozdělen na tři části. Z jedné je vytvořen kruh, z druhé čtverec a ze zbylé rovnostranný trojúhelník. Určete délky jednotlivých částí tak, aby plocha omezená těmito obrazci byla minimální, resp. maximální.

Nápověda: Označme x délku strany čtverce, y poloměr kruhu, z délku strany trojúhelníka.

Řešení příkladu 17:
Maximální obsah: Celý drát stočíme do kružnice, tj. $[x,y] = \left[0, \frac{l}{2\pi}\right]$ a $z = 0$.

Minimální obsah: čtverec $4x = \dfrac{4l}{4+\pi+3\sqrt{3}}$, kruh $2\pi y = \dfrac{\pi l}{4+\pi+3\sqrt{3}}$, trojúhelník $3z = \dfrac{3\sqrt{3}l}{4+\pi+3\sqrt{3}}$.

18. Do elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ vepište hranol s maximálním objemem. Tento objem určete.

[Délky hran: $\frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2b}{\sqrt{3}}, \frac{2c}{\sqrt{3}}$. Objem $V_{max} = \frac{8}{3\sqrt{3}}abc$]

19. Mezi všemi trojúhelníky o daném obvodu $2p$ nalezněte trojúhelník s maximálním obsahem.

[$x = y = z = \frac{2}{3}p$]

20. Nalezněte poloměr r a výšku h kužele s největším objemem, aby jeho plášť byl roven S.

[$r = \frac{\sqrt{S}}{3^{1/4}\sqrt{\pi}}$, $h = \frac{\sqrt{2S}}{3^{1/4}\sqrt{\pi}}$]

21. Na parabole $y^2 = 4x$ nalezněte bod, který je nejblíže přímce $x - y + 4 = 0$.

Řešení příkladu 21 je možné několika způsoby. Na parabole vyjde bod $[1,2]$ a odpovídající bod na přímce je $[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}]$. Uveďme některé z možných postupů řešení:
a) Známe-li vzorec pro vzdálenost bodu $M = [m_1, m_2]$ od přímky $p: \ ax + by + c = 0$, tj. vzorec $v(M,p) = \dfrac{|am_1 + bm_2 + c|}{a^2 + b^2}$, pak se úloha změní v hledání vázaného extrému funkce $f(m_1, m_2) = \dfrac{1 \cdot m_1 - 1 \cdot m_2 + 4}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$ za podmínky $m_1 = m_2^2$. Poznamenejme, že vzhledem k úvaze o poloze bodu M (například z náčrtku) v čitateli nemusíme uvažovat absolutní hodnotu.
b) Označme bod na přímce jako bod $P = [p_1, p_2]$, kde $p_2 = p_1 + 4$. Určíme polohový vektor bodu M jako $\overrightarrow{OM} = (m_1 - 0, m_2 - 0) = (m_2^2, m_2)$ a polohový vektor bodu Pjako $\overrightarrow{OP} = (p_1 - 0, p_2 - 0) = (p_1, p_1 + 4)$. Potom vzdálenost bodů M, P je velikost vektoru $\overrightarrow{MP}$, tj. $|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{(m_2^2 - p_1)^2 + (m_2 - (p_1 + 4))^2}$. Úlohu tedy můžeme přeformulovat na úlohu hledání lokálního extrému funkce $f(m_2, p_1) = (m_2^2 - p_1)^2 + (m_2 - (p_1 + 4))^2$.
c) Na „horní“ polovině paraboly, tj. na křivce $y = \sqrt{x}$, hledáme bod A, ve kterém bude hodnota derivace rovna směrnici přímky $q: \ x - y + 4 = 0$, tedy hodnotě 1. Potom vedeme bodem A přímku kolmou k přímce q a jejich průsečík označíme jako bod B. Hledaná vzdálenost je pak velikost vektoru $\overrightarrow{AB}$.

22. Je dána soustava rovnic a bod, v jehož okolí uvažujeme její řešení. Pomocí věty 11.12 rozhodněte, zda je její řešení možné jednoznačně vyjádřit za pomocí uvedených parametrů

(a) Je dán bod $[1,0,0,1]$ a soustava rovnic $\begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = 5, \\ & & x_3 & +3x_4 & = 3, \end{array}$

α) za parametry zvolme x_3, x_4, tj. rozhodujeme, zda existuje 2-funkce $\mathscr{F}(x_3, x_4) = [\underbrace{f_1(x_3, x_4)}_{x_1}, \underbrace{f_2(x_3, x_4)}_{x_2}]$.

β) za parametry zvolme x_2, x_4.

(b) Je dán bod $[1, 0, 1, -1, 2]$ a soustava rovnic
$$\begin{array}{llllll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & x_5 & = 4, \\ x_1 & +x_2 & & +x_4 & 2x_5 & = 4, \\ 3x_1 & 4x_2 & -x_3 & 4x_4 & 2x_5 & = 2, \end{array}$$

α) za parametry zvolme x_3, x_4, tj. rozhodujeme, zda existuje 3-funkce $\mathscr{F}(x_1, x_2) = [\underbrace{f_1(x_1, x_2)}_{x_3}, \underbrace{f_2(x_1, x_2)}_{x_4}, \underbrace{f_3(x_1, x_2)}_{x_5}]$.

β) za parametry zvolme x_2, x_4.

23. Rozhodněte, zda rovnicemi $x + 2y + 3z - 8 = 0$ a $-7x + y - 2z - 1 = 0$ je v okolí bodu $[-1, 0, 3]$ určena 2-funkce $\mathscr{F}(x) = [f_1(x), f_2(x)]$. Pokud ano, tak tuto 2-funkci $\mathscr{F}$ určete.
Poznamenejme, že zadání příkladu by se dalo přeformulovat i takto: Jsou dány dvě plochy (v našem případě jde o 2 roviny). Určete parametrické rovnice křivky (v našem případě půjde o přímku), která je průsečnicí zadaných ploch.

Řešení příkladu 23:
Hledanou 2-funkcí je $\mathscr{F}(x) = \left[\frac{19}{7}x + \frac{19}{7}, -\frac{15}{7}x + \frac{6}{7}\right]$. Parametrické rovnice křivky (jde o přímku), která je průnikem zadaných ploch, jsou $x = t$, $y = \frac{19}{7}t + \frac{19}{7}$, $z = -\frac{15}{7}t + \frac{6}{7}$, kde $t \in \mathbb{R}$.

24. Jsou dány rovnice $(g_1(x_1, y_1, y_2) =)\, g_1(x, y, z) = x + y^2 + 2z - 1 = 0$ a $g_2(x, y, z) = 2x - 3y + z = 0$.
a) Pomocí věty 11.2 (o existenci implicitní m=funkce a její Jakobiově matici) rozhodněte, zda je v okolí bodu $[2, 1, -1]$ funkcí $\mathscr{G} = [g_1, g_2]$ dána spojitá 2-funkce $(\mathscr{F}(X) =)\, \mathscr{F}(x) = [\varphi(x), \psi(x)](= [f_1(x), f_2(x)])$.
b) Pokud $\mathscr{F}$ existuje, tak určete její Jakobiovu matici $\mathscr{F}'(x)$ a její Jakobiovu matici v bodě $[2, 1, -1]$, tj. $\mathscr{F}'(2)$.
c) Určete 2-funkci $\mathscr{F}(x)$ v okolí bodu $[2, 1, -1]$ a dále zapište získanou průsečnici zadaných ploch parametricky.
d) Určete 2-funkci $\mathscr{F}(x)$ v okolí bodu $[2, 1, -1]$ jiným způsobem než postupem a), b), c).

Řešení příkladu 24:
a) Určíme matici $\mathscr{G}'_Y = \mathscr{G}'_{y,z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ a její determinant $\det \mathscr{G}'_Y = 2y + 6$. Protože $\det \mathscr{G}'_Y(X_0, Y_0) = \mathscr{G}'_Y(x_0, y_0, z_0) = \mathscr{G}'_Y(2, 1, -1) = 2 \cdot 1 + 6 = 8 \neq 0$, tak spojitá $\mathscr{F}$ v okolí bodu X_0 existuje a je jediná.
b) Podle věty 11.2 pro Jakobiovu matici $\mathscr{F}'(X_0)$ platí $\mathscr{F}'(X_0) = -\left(\mathscr{G}'_Y(X_0, Y_0)\right)^{-1} \cdot \mathscr{G}'_X(X_0, Y_0)$. Pro výpočet matice inverzní k matici $\mathscr{G}'_Y$ použijeme například vztah z příkladu 25. Potom $(\mathscr{G}'_Y)^{-1} = \frac{1}{\det \mathscr{G}'_Y} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2y \end{pmatrix} = \frac{1}{2y+6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2y \end{pmatrix}$. Určíme matici $\mathscr{G}'_X = \mathscr{G}'_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Jakobiova matice $\mathscr{F}'(x) = -(\mathscr{G}'_Y)^{-1} \cdot \mathscr{G}'_X = \frac{1}{2y+6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2y+6} \\ -\frac{3+4y}{2y+6} \end{pmatrix}$ a Jakobiova matice $\mathscr{F}'(x_0) = \mathscr{F}'(2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2\cdot 1+6} \\ -\frac{3+4\cdot 1}{2\cdot 1+6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{7}{8} \end{pmatrix}$.
c) Víme, že $\mathscr{F}'(x) = [\varphi'(x), \psi'(x)] = [y', z']$, tedy platí $y' = \frac{3}{2y+6}$ a $z' = -\frac{3+4y}{2y+6}$. y' zapíšeme jako $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, tedy

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{3}{2y+6} \\ 2y + 6\mathrm{d}y &= 3\mathrm{d}x \\ \int 2y + 6\mathrm{d}y &= \int 3\mathrm{d}x \\ 2 \cdot \frac{y^2}{2} + 6y &= 3x + C \\ y^2 + 6y - 3x &= C \end{aligned}$$

a konstantu C určíme z počáteční podmínky dané bodem $(X_0, Y_0) = (x_0, y_0, z_0) = [2, 1, -1]$. Potom $1^2 + 6 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 1 = C$ a y určíme jako řešení kvadratické rovnice $y^2 + 6y - 3x - 1 = 0$. Diskriminant je $D = 36 - 4(-3x - 1) = 40 + 12x$. Řešením kvadratické rovnice je $y_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{40+12x}}{2} = -3 \pm \sqrt{10 + 3x}$. Pro bod $(X_0, Y_0) = [2, 1, -1]$ je přípustné pouze řešení $y = -3 + \sqrt{10 + 3x}$, které dosadíme například do zadané rovnice $2x - 3y + z = 0$ a vyjde $z = -2x + 3(-3 + \sqrt{10 + 3x}) = -2x - 9 + 3\sqrt{10 + 3x}$. Hledaná 2-funkce je $\mathscr{F}(x) = \left[-3 + \sqrt{10 + 3x}, -2x - 9 + 3\sqrt{10 + 3x}\right]$.

Průsečnicí ploch g_1, g_2 v okolí bodu $[2, 1, -1]$ je křivka daná parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= -3 + \sqrt{10 + 3x} \\ z &= -2x - 9 + 3\sqrt{10 + 3x}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Poznámka:
Pokud by nám šlo pouze o určení 2-funkce $\mathscr{F}(x) = [\varphi(x), \psi(x)]$m mohli bychom postupovat i jinak.
1. postup:
Ze zadané rovnice $2x - 3y + z = 0$ vyjádříme $z = 3y - 2x$ a to dosadíme do rovnice $x + y^2 + 2z - 1 = 0$, tedy $x + y^2 + 2(3y - 2x) - 1 = 0$. Po vyřešení rovnice $y^2 + 6y - 3x - 1 = 0$ nám vyjde přípustné řešení $y = -3 + \sqrt{10 + 3x}$ a po dosazení vyjde $z = -2x - 9 + 3\sqrt{10 + 3x}$.
2. postup:
Zadané rovnice zderivujeme jako složenou funkci, kde $y = \varphi(x)$ a $z = \psi(x)$, tedy

$$\begin{aligned} 1 + 2y \cdot y' + 2z' &= 0, \\ 2 - 3y' + z' &= 0 \end{aligned}$$

a řešíme soustavu lineárních rovnic s neznámými y', z' například úpravou matice $\left(\begin{array}{cc|c} 2y & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{array}\right)$ na schodovitý tvar. Pak vyjde $y' - \frac{3}{2y+6}$ a $z = -\frac{3+4y}{2y+6}$. Dále pokračujeme jako v c).

25. Uvažujme 2-funkci $\mathscr{F}(x, y) = [f_1(x, y), f_2(x, y)]$. Určete Jakobiovu matici $\mathscr{F}'(x, y)$, jsou-li funkce $u = f_1(x, y)$ a $v = f_2(x, y)$ dány implicitně soustavou rovnic $(g_1(x, y, u, v) =) x^2 + y + \frac{3}{2}u^2 - v^2 = 0$ a $(g_2(x, y, u, v) =) x + y - 2u^2 + \frac{3}{2}v^2 = 0$.

    Řešení příkladu 25:

    Během výpočtu se s výhodou využije fakt, že pro regulární matici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ platí pro matici inverzní vztah $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

    Hledanou Jakobiovou maticí je $\mathscr{F}'(x, y) = -\dfrac{1}{uv} \cdot \begin{pmatrix} 3v & 2v \\ 4u & 3u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{uv} \cdot \begin{pmatrix} 6xv + 2v & 3v + 2v \\ 8xu + 3u & 4u + 3u \end{pmatrix}$, kde $u, v \neq 0$.

26. Uvažujme 2-funkci $\mathscr{F}(u, v)$. Určete Jakobiovu matici $\mathscr{F}'(u, v)$ a jakobián $J_{\mathscr{F}}(u, v)$ tohoto zobrazení.

    (a) $\mathscr{F}(u, v) = [u + 0 \cdot v, 0 \cdot u - v]$,

    (b) $\mathscr{F}(u, v) = [u \cos v, u \sin v]$,
    resp. v jiném značení používaném u dvojného integrálu při transformaci do polárních souřadnic $\mathscr{F}(\varrho, \varphi) = [\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi]$,

    (c) $\mathscr{F}(u, v) = [au \cos v, bu \sin v]$, kde $a, b > 0$,
    resp. v jiném značení používaném u dvojného integrálu při transformaci do zobecněných polárních souřadnic $\mathscr{F}(\varrho, \varphi) = [a\varrho \cos \varphi, b\varrho \sin \varphi]$.

27. Uvažujme 3-funkci $\mathscr{F}(u, v, w)$. Určete Jakobiovu matici $\mathscr{F}'(u, v, w)$ a jakobián $J_{\mathscr{F}}(u, v, w)$ tohoto zobrazení.

    (a) $\mathscr{F}(u, v, w) = [u \cos v, u \sin v, w]$,
    resp. v jiném značení používaném u trojného integrálu při transformaci do válcových souřadnic $\mathscr{F}(\varrho, \varphi, z) = [\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, z]$,

    (b) $\mathscr{F}(u, v, w) = [u \cos v \cos w, u \sin v \cos w, u \sin w]$,
    resp. v jiném značení používaném u trojného integrálu při transformaci do sférických souřadnic $\mathscr{F}(\varrho, \varphi, \vartheta) = [\varrho \cos \varphi \cos \vartheta, \varrho \sin \varphi \cos \vartheta, \sin \vartheta]$.