1. Je dána funkce $f(x, y)$ a $g(x, y, z)$. Vypište symbolicky všechny 1., 2. a 3. parciální derivace funkce f a funkce g.

2. Spočtěte všechny první parciální derivace funkcí:
   a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$,
   b) $f(x, y) = \frac{xy+x}{y}$,
   c) $f(u, v) = \frac{u}{v^2}$,
   d) $f(k, l) = k \sin(k - l)$,
   e) $f(x, y) = x \sin^3(2 - y)$,
   f) $f(a, b) = \ln \sqrt{a^2 + b^2}$.

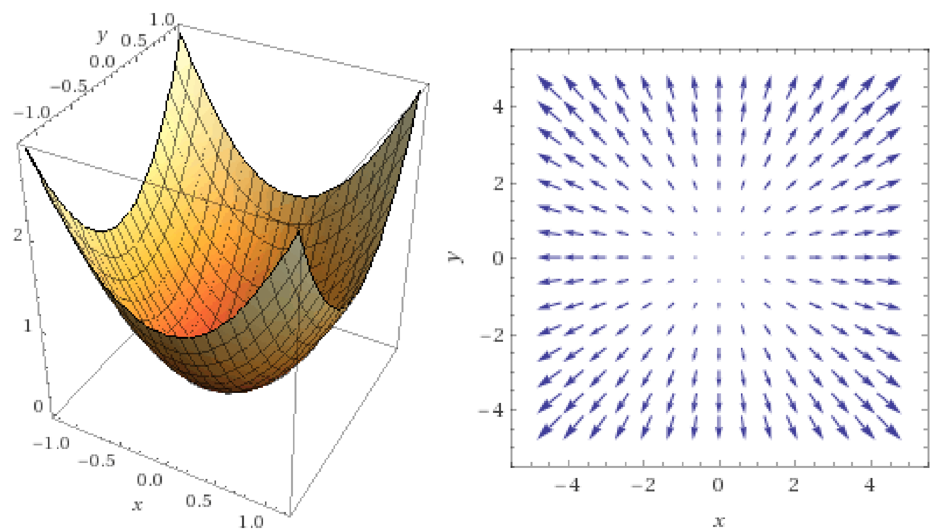
3. Spočtěte všechny první parciální derivace funkce f v bodě X_0:
   a) $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{y^3}) \cdot y$, $X_0 = [1, 0]$,
   b) $f(x, y) = x^{3y}$, $X_0 = [\mathrm{e}, 1]$.

4. Spočtěte všechny parciální derivace druhého řádu funkce f v bodě X_0:
   a) $f = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$, $X_0 = [1, 0]$, $[\,-1,\ \frac{1}{4}, 0]$
   b) $f = \operatorname{arctg}\dfrac{x + y}{1 - xy}$, $X_0 = [0, 1]$, $[\,0,\ -\frac{1}{2},\ 0]$
   c) $f = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y}$, $X_0 = [0, 0]$. $[\,1,\ 0,\ 1]$

5. Spočtěte gradient funkce $f(x, y) = \ln \frac{x}{y}$ v bodě $X_0 = [5, 1]$. $[\operatorname{grad} f(X) = \vec{\nabla} f = \left(\frac{1}{x}, -\frac{1}{y}\right)]$

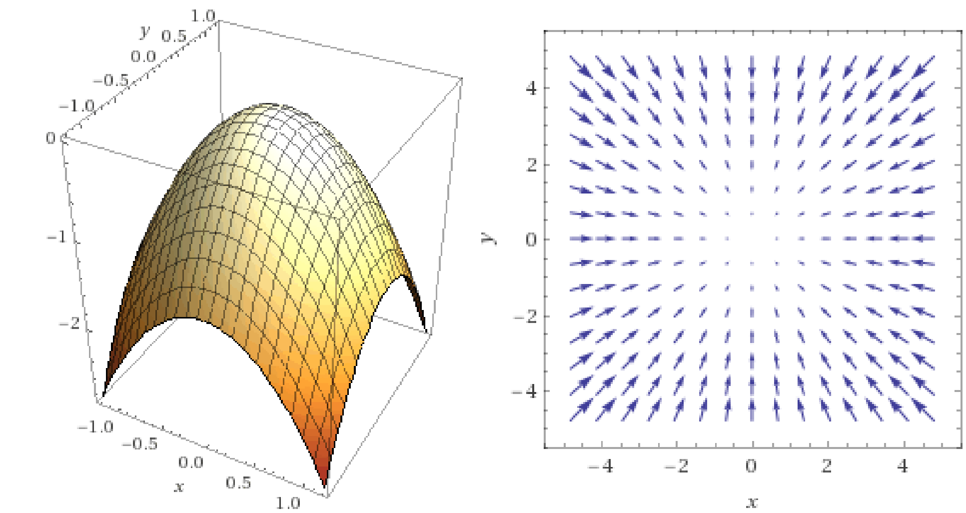
6. Za pomoci vhodného softwaru nakreslete vektorové pole gradientu funkce f.
   a) $f(x, y) = x^2 + y^2$,
   b) $f(x, y) = -x^2 - y^2$,
   c) $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y$.
   Poznámka: Lze použít například WolframAlpha.com a zadat pro danou funkci příkaz `plot grad`.

   Řešení příkladu 6 je na obrázcích 1, 2 a 3.

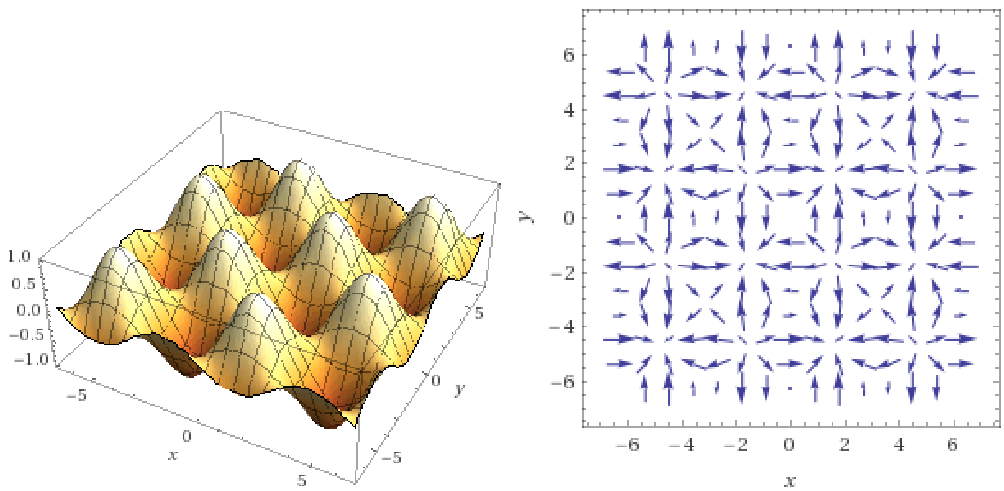


Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ (vlevo) a její vektorové pole gradientu (vpravo)

7. Spočtěte velikost gradientu funkce $f(x, y) = \cos(xy) + \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $X_0 = \left[\frac{\pi}{3}, 0\right]$.
   $[\vec{\nabla} f(X_0) = (1, 0),\ |\vec{\nabla} f(X_0)| = 1]$



Obrázek 2: Graf funkce $f(x,y) = -x^2 - y^2$ (vlevo) a její vektorové pole gradientu (vpravo)



Obrázek 3: Graf funkce $f(x,y) = \sin x \cdot \sin y$ (vlevo) a její vektorové pole gradientu (vpravo)

8. Spočtěte intenzitu elektrického pole v bodě $X_0 = [1,2]$, je-li jeho potenciál $\varphi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
   Platí: $\vec{E}(x,y) = -\vec{\nabla}\varphi(x,y)$.

9. Jsou dány funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ a $g(x,y) = x - 3y + \sqrt{3xy}$. Nalezněte úhel mezi gradienty funkcí f a g v bodě $X_0 = [3,4]$. *[$\cos\alpha = -0.199$, $\alpha = 101°30'$]*

10. Nalezněte bod, ve kterém gradient funkce $z = \ln(x + \frac{1}{y})$ je roven vektoru $(1, -\frac{16}{9})$. *[$[-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}]$, $[\frac{7}{3}, -\frac{3}{4}]$]*

11. Nalezněte body, ve kterých se velikost gradientu funkce $z = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ rovná 2.
    [Body ležící na kružnici $x^2 + y^2 = \frac{2}{3}$]

12. Určete úhel mezi gradienty funkce $f(x,y) = \ln\frac{y}{x}$ v bodech $A = [\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$, $B = [1,1]$. *[$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$]*

13. Určete úhel mezi gradienty funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ v bodech $A = [a,0,0]$, $B = [0,a,0]$. *[$\frac{\pi}{2}$]*

14. Spočtěte směrovou derivaci funkce f v bodě X_0 ve směru $\vec{s}$.
 a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2$, $X_0 = [1,3]$, $\vec{s}$ svírá s kladným směrem osy x úhel 150°:
 α) podle definice,
 β) vzorcem $f'_{\vec{s}}(X_0) = \mathrm{grad} f(X_0) \cdot \vec{s}$.
 b) $f(x,y) = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)$, $X_0 = [0,0]$, $\vec{s} = (1,-1)$.

15. Určete směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$ v bodě $X_0 = [1,1]$ ve směru vektoru $\vec{s} = (2,1)$. *[* $6\mathrm{e}^2$*]*

16. Je dána funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ a bod $X_0 = [2,3]$. Určete:
 a) Směr, ve kterém funkce f v bodě X_0 nejvíce roste. *[*$\vec{\nabla} f(X_0) = (4,6)$*]*
 b) Určete úhel, pod kterým funkce f v bodě X_0 nejvíce roste. *[*$\alpha \doteq 82,1°$*]*

17. Určete vektor $\vec{s}$ v jehož směru funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ v bodě $X_0 = [2,3]$ stoupá pod úhlem 45°.
 [Dvě řešení, $\vec{s} \doteq (0,90; -0,43)$ *a* $\vec{s'} \doteq (-0,75; 0,66)$*]*

18. Je dána funkce $f(x,y) = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ a bod $M = [1,2]$ a $N = [4,6]$. Určete:
 a) Směrovou derivaci funkce f ve směru vektoru $\vec{MN}$. *[* 5*]*
 b) Směrovou derivaci funkce f ve směru jednotkového vektoru, který jde z bodu M do N. *[* 1*]*

19. Určete derivaci funkce $f(x,y) = 3x^4 + xy + y^3$ v bodě $M = [1,2]$ ve směru jednotkového vektoru, který svírá s kladným směrem osy x úhel 135°. *[* $-\frac{1}{\sqrt{2}}$*]*

20. Určete derivaci funkce $f(x,y) = \ln(x+y)$ v bodě $[1,2]$ ležícím na parabole $y^2 = 4x$ ve směru jednotkového vektoru tečny k parabole v tomto bodě. *[* $\frac{\sqrt{2}}{3}$*]*

21. Určete derivaci funkce $f(x,y) = \mathrm{arctg}(xy)$ v bodě $[1,1]$ ve směru jednotkového vektoru osy prvního kvadrantu. *[* $\frac{1}{\sqrt{2}}$*]*

22. Určete derivaci funkce $f(x,y) = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)$ v počátku souřadnicového systému ve směru jednotkového vektoru, který svírá s kladným směrem osy x úhel α. *[* $\frac{1}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)$*]*

23. Určete derivaci funkce $f(x,y) = \mathrm{arctg}\frac{x}{y}$ v bodě $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ ležícím na kružnici $x^2 + y^2 - 2x = 0$ ve směru jednotkového vektoru tečny ke kružnici v tomto bodě. *[* $-\frac{1}{2}$*]*

24. a) Zapište první parciální derivace funkce $z = F(x,y)$, která je zadána jako složená funkce z funkcí u a v jako $z = F(x,y) = f\big(u(x,y), v(x,y)\big)$
 Řešení: $\frac{\partial F}{\partial x} = z'_x = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$; $\quad \frac{\partial F}{\partial y} = \dots$
 b) Vypočtěte takto parciální derivace funkce $f(x,y) = \cos^2(xy) + 3\mathrm{e}^{x+y}$, u které si zvolme například označení $f(x,y) = (u(x,y))^2 + 3v(x,y)$.
 c) Derivujte jako složenou funkci funkci $f(x,y) = (\ln x)^{\sin x}$.
 d) Zamyslete se nad výpočtem $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ funkce $f(x,y) = u^2 + 3v$, kde $u(x,y) = \cos(xy)$ a funkce v je dána implicitně rovnicí $vx + \ln v + y = 0$.

25. Mějme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která má v bodě $X_0 = [x_0, y_0]$ spojité parciální derivace až do řádu 3. Zapište pomocí sumační symboliky i „rozepsáním“ totální diferenciály 1., 2. a 3. řádu (tj. $\mathrm{d}f(X_0; h, k)$, $\mathrm{d}^2 f(X_0; h, k)$ a $\mathrm{d}^3 f(X_0; h, k)$) funkce f v bodě X_0 při přírůstku $\vec{h} = (h, k)$.

26. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ v bodě $X_0 = [2; 2]$ při přírůstku $\vec{h} = (0,03; 0,01)$. *[*0,02*]*

27. Určete totální diferenciál funkce f v bodě X_0 při přírůstku $\vec{h}$.
 a) $f(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y$, $X_0 = [0; 0]$, $\vec{h} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$, *[*$\mathrm{d}x$*]*
 b) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$, $X_0 = [-1; 2]$, $\vec{h} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$, *[*$\frac{2}{25}\mathrm{d}x - \frac{4}{25}\mathrm{d}y$*]*
 c) $f(x,y,z) = x^{yz}$, $X_0 = [x; y; z]$, $\vec{h} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$, *[*$x^{yz-1}(yz\mathrm{d}x + xz\ln x\mathrm{d}y + xy\ln x\mathrm{d}z)$*]*

d) $f(x,y) = \frac{1}{3x^2+5y^2}$, $X_0 = [1;2]$, $\vec{h} = (-0,02; 0,1)$, *[*$\mathrm{d}f(X_0; h, k) \doteq -0,0035$*]*

e) $f(x,y) = \mathrm{e}^{2x}\cos(3y)$, $X_0 = [x;y]$, $\vec{h} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$. *[*$\frac{2}{25}\mathrm{d}x - \frac{4}{25}\mathrm{d}y$*]*

28. Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližnou hodnotu

a) $0,97^{1,05}$, *[*$0,97$*]*

b) $\sin 27° \cdot \operatorname{tg} 46°$,

c) $\dfrac{1}{3 \cdot 0,98^2 + 5 \cdot 2,1^2}$. *[*$0,0401$*]*

29. Určete totální diferenciál 2. řádu funkce f v bodě X_0 při přírůstku (h,k).
a) $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}$, $X_0 = [1,2]$, $(h,k) = (0,1; -0,3)$,
b) $f(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y$.

30. Uvažujme nerezovou nádrž ve tvaru rotačního válce s poloměrem r a výškou v. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně objem nádrže pro vstupní hodnoty:
a) $r = 0,75$ m, $v = 3$ m, $\mathrm{d}r = 10$ cm, $\mathrm{d}v = 10$ cm.
b) $r = 0,75$ m, $v = 3$ m, $\mathrm{d}r = 10$ cm, $\mathrm{d}v = 0$ cm.
c) $r = 0,75$ m, $v = 3$ m, $\mathrm{d}r = 0$ cm, $\mathrm{d}v = 10$ cm.
d) Proveďte úvahu a potvrďte ji výpočtem, jaké jsou mezní rozměry, při kterých je vliv změny poloměru a změny výšky na objem stejný.

Řešení příkladu 30 d):
Hledáme vztah mezi r a v tak, aby oba dva členy diferenciálu nabývali stejné hodnoty pro $\mathrm{d}r = \mathrm{d}v$, tedy aby platilo $\pi 2rv\mathrm{d}r = \pi r^2 \mathrm{d}v$. tedy musí platit $v = \frac{r}{2}$. Při rozměrech $v = \frac{r}{2}$ má změna poloměru o $\mathrm{d}r$ (a současně $\mathrm{d}v = 0$) stejný vliv na objem jako změna výšky o $\mathrm{d}v$ (a současně $\mathrm{d}r = 0$).

31. Pomocí totálního diferenciálu určete, o kolik se změní délka diagonály a obsah obdélníka se stranami $a = 6$ m, $b = 8$ m, jestliže se kratší strana zvětší o 2 mm a delší strana se zkrátí o 5 mm.

[obsah se zmenší o $1,4$ *dm*^{2}*, diagonála se zkrátí o 2,8 mm]*

32. Nechť je středový úhel kruhové výseče $\alpha = 60°$ zvětšen o $1°$. O kolik je třeba zmenšit původní poloměr $R = 20$ cm této výseče, aby její plocha zůstala zachována? *[zmenšit o* $\frac{1}{6}$ *cm]*

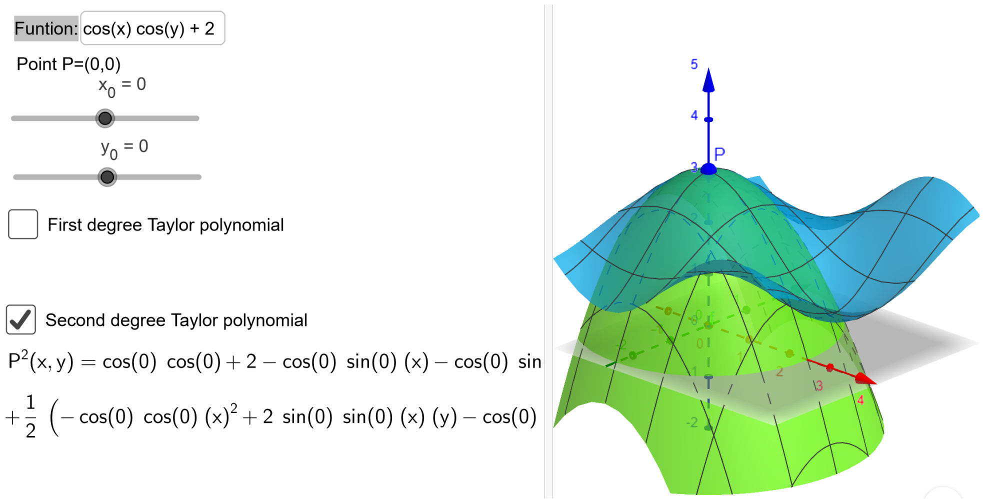
33. Mějme komolý jehlan se čtvercovými základnami, které mají délky stran $a = 2$ m, resp. $b = 1$ m a výškou $v = 1$ m. O kolik musíme změnit výšku v, dojde-li ke zvětšení strany a o 7 cm a zmenšení strany b o 7 cm za podmínky, že objem zůstane stejný.

[Příklad se dá řešit středoškolskou matematikou, kde $V = \frac{1}{3}v(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$*. Výšku je potřeba zmenšit o cca 1 cm.]*

34. Mějme funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, která má v bodě X_0 a v jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu m včetně. Zapište pomocí sumační symboliky a totálních diferenciálů Taylorův polynom stupně m, tj. $T_m(X)$.

35. Určete Taylorův polynom $T_m(X)$ stupně m funkce f v bodě X_0.
a) $f(x,y) = \cos x \cdot \cos y + 2$, $m = 2$, $X_0 = [0,0]$,
b) $f(x,y) = \sin x \cdot \sin y$, $m = 2$, $X_0 = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$,
c) $f(x,y) = x^y$, $m = 3$, $X_0 = [1,1]$,
d) $f(x,y) = \frac{\cos x}{\cos y}$, $m = 2$, $X_0 = [0,0]$,
e) $f(x,y) = \frac{x}{y}$, $m = 3$, $X_0 = [1,1]$,
f) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$, $m = 3$, $X_0 = [1,-1]$,
g) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $m = 2$, $X_0 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,
h) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, $m = 2$, $X_0 = [1,1]$,
i) $f(x,y) = x^{3y}$, $m = 3$, $X_0 = [1,2]$.

Řešení:
a) Grafické řešení příkladu 35 a) je na obrázku 4. Obrázek je vygenerovaný v softwaru GeoGebra, viz `https://www.geogebra.org/m/Ehnz3hGb`



Obrázek 4: Graf funkce $f(x,y) = \cos x \cdot \cos y + 2$ (modře) a příslušný Taylorův polynom $T_2(x,y)$ v bodě $X_0 = [0,0]$ (zeleně)

b) $T_2(x,y) = -1 + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2+(y-\frac{3}{2}\pi)^2}{2}$.
c) $f(X_0) = 1^1 = 1$,
$f'_x = yx^{y-1} \Rightarrow f'_x(X_0) = 1$,
$f'_y = x^y \ln x \Rightarrow f'_y(X_0) = 0$,
$f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2} = (y^2-y)x^{y-2} \Rightarrow f''_{xx}(X_0) = 0$,
$f''_{xy} = 1 \cdot x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x \cdot 1 \Rightarrow f'_x(X_0) = 1$,
$f''_{yy} = \ln x \cdot x^y \ln x \Rightarrow f''_{yy}(X_0) = 0$,
$f'''_{xxx} = y(y-1)(y-2)x^{y-3} \Rightarrow f'''_{xxx}(X_0) = 0$,
$f'''_{xxy} = (2y-1)x^{y-2} + (y^2-y)x^{y-2} \ln x \cdot 1 \Rightarrow f''_{xx}(X_0) = 1$,
$f'''_{xyy} = \ln x(1 \cdot x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x \cdot 1) + x^{y-1} \ln x \cdot 1 \Rightarrow f'''_{xyy}(X_0) = 0$,
$f'''_{yyy} = \ln x \ln x \cdot x^y \ln x \Rightarrow f'''_{yyy}(X_0) = 0$.
$T_3(x,y) = 1 + \frac{1\cdot(x-1)+0\cdot(y-1)}{1!} + \frac{0\cdot(x-1)^2+2\cdot1(x-1)(y-1)+0\cdot(y-1)^2}{2!} + \frac{0\cdot(x-1)^3+3\cdot1\cdot(x-1)^2(y-1)+3\cdot0\cdot(x-1)(y-1)^2+0\cdot(y-1)^3}{3!} =$
$= 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1) = x + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)$.
d) $T_2(x,y) = 1 + \frac{-x^2+y^2}{2}$.
e)
f)
g) $T_2(x,y) = \sqrt{2}/2 - \sqrt{2}(x-\frac{1}{2})/2 - \sqrt{2}(y-\frac{1}{2})/2 - 3\sqrt{2}(x-\frac{1}{2})^2/4 - \sqrt{2}(y-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})/2 - 3\sqrt{2}(y-\frac{1}{2})^2/4$.
h) $T_3(x,y) = -5 + 6x + 15(x-1)^2 + 3(y-2)(x-1) + 20(x-1)^3 + \frac{33(y-2)(x-1)^2}{2}$.

36. Pomocí Taylorova polynomu 2. řádu vypočtěte přibližně hodnotu $\operatorname{arctg}\dfrac{1,04}{0,98}$.

37. Je dána funkce $f(x,y) = 5x^2 + 4\sin y$ a bod $X_0 = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$.
a) Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě X_0.
b) Pomocí určeného Taylorova polynomu 2. stupně určete přibližnou hodnotu $5\cdot(2,03)^2 + 4\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+0,1\right)$.
c) Odhadněte chybu, které se dopustíte, když funkci f nahradíte Taylorovým polynomem 2. stupně.

Řešení příkladu 37:

a) $T_2(x,y) = 20 + 2\sqrt{3} + \dfrac{20(x-2) + 2(y-\frac{\pi}{3})}{1} + \dfrac{10(x-2)^2 + 2\cdot 0 - 2\sqrt{3}(y-\frac{\pi}{3})^2}{2}$.
b) $5\cdot(2,03)^2 + 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+0,1\right) \doteq T_2(2,02;\frac{\pi}{3})\cdot 24,25128$.
c) Pro odhad druhého Taylorova zbytku $R_2(x,y)$ použijeme Lagrangeův tvar $R_m(x,y) = \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{m+1} f(X_0 + \vartheta(X-X_0); h,k)$, kde $\vartheta \in (0,1)$, který odhadneme například jako $|R_2(x,y)| \le \dfrac{1}{3}\cdot c\cdot(|h|+|k|)^3$, kde kon-

stanta c je suprémem s absolutních hodnot třetích derivací funkce f v bodech $X_0+\vartheta(X-X_0)$ pro $\vartheta \in (0,1)$. V našem případě $h = x - x_0 = 2,03 - 2 = 0,03$, $k = y - y_0 = \frac{\pi}{3} + 0,1 - \frac{\pi}{3} = 0,1$ a $c = 4$ (tj. $|\cos y|$ jsme odhadli celkem hrubě hodnotou 1, tedy $|-4\cos y| \le 4$). Potom $|R_2(x,y)| \le \dfrac{1}{3} \cdot 4 \cdot (|0,03| + |0,1|)^3 = 1,464\overline{6} \cdot 10^{-3}$.

Poznámka: Výpočtem na kalkulačce zjistíme, že $5 \cdot (2,03)^2 + 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + 0,1\right) = 24,2510$. Provedeme-li kontrolu našeho výpočtu, tak vidíme, že skutečně platí $24,25128 \in \langle 24,2510 - 1,464\overline{6} \cdot 10^{-3}, 24,2510 + 1,464\overline{6} \cdot 10^{-3}\rangle$. Poznámka: Odhad m-tého Taylorova zbytku by se dal udělat i přesněji (například místo součtu $|h| + |k|$ uvažovat $|h + k|$, ale my jsme pro odhad použili raději jemnější podmínku, kterou jsme pak schopní použít i v příkladu 38, kde by $|h + k|$ vycházelo rovno nule).

Poznámka: Ukažme odvození vztahu pro odhad $|R_m(x,y)|$ krok po kroku. Víme, že

$$R_m(x,y) = \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{m+1} f(X_0 + \vartheta(X - X_0); h, k), \qquad \vartheta \in (0,1)$$

a že uvedený diferenciál $(m+1)$. řádu funkce f můžeme zapsat jako

$$\mathrm{d}^{m+1} f(\underbrace{X_0 + \vartheta(X - X_0)}_{\text{body na úsečce}}; \underbrace{h, k}_{\text{přírůstek}}) = \sum_{m_1+m_2=m+1} \binom{m+1}{m_1} f^{(m+1)}_{x^{m_1}y^{m_2}}(X_0 + \vartheta(X - X_0)) \cdot h^{m_1} \cdot k^{m_2}.$$

Poznamenejme, že suma je myšlena přes všechny možné kombinace mocnin m_1 a m_2, pro které platí $m_1 + m_2 = m + 1$. Také stojí za zmínku, že platí $\binom{m+1}{m_1} = \frac{(m+1)!}{m_1! \cdot (m+1-m_1)!} = \frac{(m+1)!}{m_1! \cdot m_2!} = \binom{m+1}{m_2}$. Hodnoty derivací ve vnitřních bodech úsečky s krajními body X_0 a $X = X_0 + (h,k)$ odhadneme pomocí konstanty c a vytkneme ji ze sumy. Proveďme ještě tento odhad

$$\sum_{m_1+m_2=m+1} \binom{m+1}{m_1} \cdot h^{m_1} \cdot k^{m_2} \le \sum_{m_1+m_2=m+1} \binom{m+1}{m_1} \cdot |h|^{m_1} \cdot |k|^{m_2} = (|h| + |k|)^{m+1}.$$

Celkově tedy pro odhad chyby platí

$$|R_m(x,y)| \le \frac{1}{(m+1)!} \cdot c \cdot (|h| + |k|)^{m+1}$$

38. Je dána funkce $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2} + \ln y$ a bod $X_0 = [-2, 1]$.
 a) Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě X_0.
 b) Pomocí určeného Taylorova polynomu 2. stupně určete přibližnou hodnotu $\frac{1}{(-2,01)^2} + \ln 1,01$.
 c) Odhadněte chybu, které se dopustíte, když funkci f nahradíte Taylorovým polynomem 2. stupně.

 Řešení příkladu 38:
 a) $T_2(x,y) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\frac{1}{4}(x+2) + (y+1)}{1} + \dfrac{\frac{3}{8}(x+2)^2 + 2 \cdot 0 - (y-1)^2}{2}$.
 b) $\frac{1}{(-2,01)^2} + \ln 1,01 \doteq T_2(-2,01; 1,01) = 0,25746875$.
 c) Použijeme-li pro odhad druhého Taylorova zbytku $R_2(x,y)$ nerovnost z řešení příkladu 37 c), potom $|R_2(x,y)| \le \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (|-0,01| + |0,01|)^3 = 2,\overline{6} \cdot 10^{-6}$.

39. Spočtěte přibližnou hodnotu $\cos(3,17) + \sqrt{3,98}$ s chybou menší než 10^{-5}.

 Řešení příkladu 39:
 Uvažujme funkci $f(x,y) = \cos x + \sqrt{y}$ a bod $X_0 = [\pi, 4]$. Potom $x - x_0 = h = 3,17 - \pi$ a $y - y_0 = k = 4 - 3,98 = -0,02$. Víme, že $f(x,y) = T_m(x,y) + R_m(x,y)$, kde pro odhad zbytku R_m v Lagrangeově tvaru platí $|R_m(x,y)| \le \frac{1}{(m+1)!} \cdot c \cdot (|h| + |k|)^{m+1}$ a konstantu c odhadneme z příslušných parciálních derivací funkce f.
 $f'_x = -\sin x$ a určitě platí, že $f'_x(x,y) \le 1$ pro všechny body $[x,y]$ ležící uvnitř úsečky s krajními body $[\pi; 4]$ a $[3,17; 3,98]$, tj. pro body $[x,y] = [\pi; 4] + \vartheta(3,17 - \pi; 3,98 - 4)$, kde $\vartheta \in (0,1)$.

$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, určitě platí $f'_y(x,y) \leq 1$.
$f''_{xx} = -\cos x$, určitě platí $f''_{xx}(x,y) \leq 1$.
$f''_{xy} = 0$, určitě platí $f''_{xy}(x,y) \leq 1$.
$f''_{yy} = -\frac{1}{4\sqrt{y^3}}$, určitě platí $f''_{yy}(x,y) \leq 1$.
$f'''_{xxx} = \sin x$, určitě platí $f'''_{xxx}(x,y) \leq 1$.
$f'''_{xxy} = 0$, určitě platí $f'''_{xxy}(x,y) \leq 1$.
$f'''_{xyy} = \sin x$, určitě platí $f'''_{xyy}(x,y) \leq 1$.
$f'''_{yyy} = \frac{3}{8}y^{\frac{-5}{2}} = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{y^5}}$, určitě platí $f'''_{yyy}(x,y) \leq 1$.
Položme tedy $c = 1$ a podívejme se na odhady $|R_m(x,y)|$:

m	$\lvert R_m(x,y)\rvert$
0	$0,04840 > 10^{-5}$
1	$0,00117128 > 10^{-5}$
2	$0,000018897 > 10^{-5}$
3	$2,28649 \cdot 10^{-7} < 10^{-5}$

Vidíme, že abychom dosáhli chyby menší než 10^{-5}, musíme funkci f nahradit Taylorovým polynomem stupně 3. Vypočteme $T_3(x,y) = y/4 + (x-\pi)^2/2 - (y-4)^2/64 + (y-4)^3/512$ a po dosazení $T_3(3,17;3,98) \doteq 0,9953972231$, což je určitě výsledek s požadovanou přesností, protože s použitím kalkulačky vychází $\cos 3,17 + \sqrt{3,98} \doteq 0,9953971955$ a $0,9953971955 - 0,9953972231 < 10^{-5}$.
Poznámka:
Udělejme si jasnější představu, k čemu nám odhad chyby je užitečný. Odhad nám říká, že „na jistotu“ bude použití Taylorova polynomu stupně 3 v požadované toleranci. Z toho usoudíme, že Taylorův polynom stupně 2 by v požadované toleranci být neměl. Po ověření výpočtem, kde
$T_2(x,y) = y/4 + (x-\pi)^2/2 - (y-4)^2/64$ *a* $T_2(3,17;3,98) \doteq 0.9953972387$ *vidíme, že už také* $T_2(x,y)$ *dává výsledek, který se od skutečné hodnoty liší o méně než* 10^{-5}.
V tuto chvíli je potřeba si uvědomit, že odhad chyby $R_m(x,y)$ *byl udělán relativně „nahrubo“ a hlavně „na jistotu“, aby fungoval univerzálně pro všechny funkce* $f(x,y)$. *Pokud bychom chtěli odhad víc „natěsno“, tak bychom pro konkrétní zadanou funkci* f *mohli manévrovat například s odhady jednotlivých členů diferenciálu.*

40. Určete rovnici tečné roviny a parametrické rovnice normály ke grafu funkce f v bodě X_0:

a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2$, $X_0 = [1,1,?]$, *[*$\tau : 4x + 2y - z - 3 = 0, n : \ldots$*]*

b) $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - xy + x$, $X_0 = [1,?,2]$, *[*$\tau : 5x + y - z - 3 = 0, n : \ldots$*]*

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $X_0 = [3,4,?]$, *[*$\tau : 17x + 11y + 5z - 60 = 0, n : \ldots$*]*

41. K elipsoidu $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ určete tečnou rovinu, která je rovnoběžná s rovinou $4x + 2y + z = 1$.

[$4x + 2y + z \pm \sqrt{19} = 0$*]*

Zdroje:
ELIÁŠ, Jozef, Ján HORVÁTH a Juraj KAJAN. Zbierka úloh z vyššej matematiky: 3. časť. 3. vyd. Bratislava: Alfa, vydavateľsvo technickej a ekonomickej literatúry, 1980, 217 s.
DEMIDOVIČ, Boris Pavlovič. Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003. ISBN 80-7200-587-1.