14 Alternativní přístup k definování dvojného integrálu

Nejprve se vybuduje teorie míry na vhodných podmnožinách množiny $\mathbb{R}^2$. Pojem míry zobecňuje pojem obsahu rovinného obrazce. Označíme-li $\lambda(A)$ míru množiny $A \subseteq \mathbb{R}^2$, pak λ lze chápat jako zobrazení z množiny podmnožin $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}_0^+$. Míra by měla splňovat následující přirozené podmínky:

(i) Jsou-li množiny A, B shodné, pak $\lambda(A) = \lambda(B)$.

(ii) Je-li $A \subseteq B$, pak $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.

(iii) Je-li $A \cap B = \emptyset$, pak $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$.

Obecnou míru v prostoru $\mathbb{R}^2$ (resp. v $\mathbb{R}^n$) jako první zkonstruoval Camille Jordan (1838–1922, Francouz). Nechť $n \in \mathbb{N}_0$, $j, k \in \mathbb{Z}$. *Čtverec řádu n* definujeme jako množinu

$$Q^n_{j,k} := \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \frac{j}{2^n} \leq x \leq \frac{j+1}{2^n},\ \frac{k}{2^n} \leq y \leq \frac{k+1}{2^n}\right\}.$$

Množinu všech čtverců řádu n nazveme *síť řádu n* a síť řádu 0 nazveme *základní síť*. Reálné číslo

$$\lambda(Q^n_{j,k}) := \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{4^n}$$

nazveme *mírou čtverce řádu n*. Dále klademe $\lambda(\emptyset) = 0$. Konečné sjednocení čtverců řádu n nazveme *elementární množina řádu n*. Je-li $M = \bigcup_{j,k\in\mathcal{I}} Q^n_{j,k}$ elementární množina řádu n, pak klademe

$$\lambda(M) := \lambda\left(\bigcup_{j,k\in\mathcal{I}} Q^n_{j,k}\right) = \sum_{j,k\in\mathcal{I}} \lambda\left(Q^n_{j,k}\right).$$

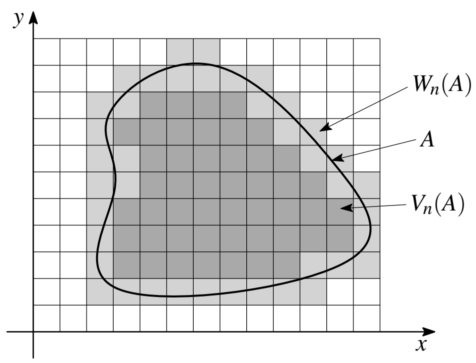
Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je libovolná ohraničená množina. *Jádro řádu n množiny A* definujeme jako největší (vzhledem k množinové inkluzi) elementární množinu, která je obsažena ve vnitřku A, budeme značit $V_n(A)$. Platí tedy

$$V_n(A) = \bigcup\{Q^n : Q^n \subseteq A^\circ\}.$$

Obal řádu n množiny A (budeme značit $W_n(A)$) definujeme jako nejmenší (vzhledem k množinové inkluzi) elementární množinu řádu n, jejíž vnitřek obsahuje uzávěr množiny A, tj.

$$W_n(A) = \bigcup\{Q^n : \overline{A} \cap Q^n \neq \emptyset\},$$

viz obrázek 9. Neexistuje-li čtverec řádu n, který by byl částí A°, klademe $V_n(A) = \emptyset$. Je-li $A = \emptyset$, klademe $W_n(A) = \emptyset$.



Obrázek 9: Jádro řádu n (tmavší šedá) a obal řádu n (světlejší šedá) množiny A (čtverce jádra jsou zároveň čtverci obalu)

Vlastnosti:

(i) $V_n \subseteq A \subseteq W_n$,

(ii) $\lambda(W_n(\partial A)) = \lambda(W_n(A)) - \lambda(V_n(A))$,

(iii) $\lambda(V_n(A)) \leq \lambda(V_{n+1}(A)),\ \lambda(W_n(A)) \geq \lambda(W_{n+1}(A))$ pro $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

(iv) posloupnosti měr $\{\lambda(V_n(A))\}_{n=0}^\infty$ a $\{\lambda(W_n(A))\}_{n=0}^\infty$ mají vlastní limitu.

Poslední vlastnost nás opravňuje k následující definici.

Definice 14.1 (vnější a vnitřní Jordanovy míry)**.** Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je ohraničená množina. Číslo

$$\lambda_*(A) := \lim_{n\to\infty} \lambda(V_n(A))$$

se nazývá *vnitřní Jordanova míra množiny A* a číslo

$$\lambda^*(A) := \lim_{n\to\infty} \lambda(W_n(A))$$

se nazývá *vnější Jordanova míra množiny A*. Jestliže $\lambda_*(A) = \lambda^*(A)$, pak řekneme, že *množina A je (jordanovsky) měřitelná* a číslo $\lambda(A) = \lambda_*(A) = \lambda^*(A)$ se nazývá *(Jordanova) míra množiny A*.

Poznamenejme, že vždy platí $0 \le \lambda_*(A) \le \lambda^*(A)$.

Příklad 14.2. Zjistěte, zda je měřitelná množina $A = \{[x, y] \in \mathbb{Q}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.
Řešení. Platí $A^\circ = \emptyset$ a tedy také $V_n(A) = \emptyset$ pro libovolné n. To znamená, že $\lambda_*(A) = 0$. Dále $\overline{A} = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle = Q^0_{0,0}$ a tedy

$$\begin{aligned}
\lambda(W_0(A)) &= 1 + 8 \cdot 1 = 1 + \frac{2 \cdot 4}{2^0},\\
\lambda(W_1(A)) &= 1 + 12 \cdot \frac{1}{4} = 1 + \frac{3 \cdot 4}{2^2},\\
\lambda(W_2(A)) &= 1 + 20 \cdot \frac{1}{16} = 1 + \frac{5 \cdot 4}{2^4},\\
&\vdots\\
\lambda(W_n(A)) &= 1 + (4 \cdot 2^n + 4) \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = 1 + \frac{(2^n + 1)4}{2^{2n}} = 1 + 4\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}}\right).
\end{aligned}$$

Tedy $\lambda^*(A) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + 4\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}}\right)\right) = 1$. Protože $0 = \lambda_*(A) < \lambda^*(A) = 1$, není A jordanovsky měřitelná.

Vlastnosti:
1. Je-li $\lambda^*(A) = 0$, pak A je měřitelná a platí $\lambda(A) = 0$.
2. Jsou-li $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ ohraničené množiny, pak platí:
   (i) je-li $A \subseteq B$, pak $\lambda_*(A) \le \lambda_*(B)$, $\lambda^*(A) \le \lambda^*(B)$,
   (ii) $\lambda^*(A \cup B) \le \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$,
   (iii) je-li $A \cap B = \emptyset$, pak $\lambda_*(A) + \lambda_*(B) \le \lambda_*(A \cup B)$.
3. Jsou-li $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ měřitelné množiny, pak platí:
   (i) Je-li $A \subseteq B$, pak $\lambda(A) \le \lambda(B)$,
   (ii) Je-li $A \cap B = \emptyset$, pak $\lambda(A) + \lambda(B) = \lambda(A \cup B)$.
   Jordanova míra tedy splňuje motivační vlastnosti z úvodu odstavce.
4. Každá konečná množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná a platí $\lambda(A) = 0$. Dále mají míru nula křivky tvořené grafy spojitých funkcí $y = \varphi(x)$ nebo $x = \psi(y)$ na uzavřených intervalech nebo obecněji (definice uvedeme později) tzv. jednoduché hladké (rovinné) křivky jako je např. kružnice nebo její část či tzv. jednoduché po částech hladké (rovinné) křivky jako je křivka složená z hranice ∂I obdélníka I, která má čtyři hladké části, jimiž jsou strany obdélníka. Obecně můžeme uvažovat i množiny tvořené konečně mnoha křivkami v $\mathbb{R}^2$ (tj. rovinnými) všech zmíněných typů.
5. Ohraničená množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná $\iff \lambda(\partial A) = 0$. Vzhledem k předchozímu bodu jsou měřitelné všechny normální množiny (protože hranice má míru nula, vnitřek takové množiny má stejnou míru jako celá množina). Speciálně, obdélník $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ je měřitelná množina a má míru $\lambda(I) = (b - a)(d - c)$.
6. Jsou-li množiny A, B měřitelné, pak také množiny $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ jsou měřitelné. Odtud plyne, že regulární množiny jsou měřitelné.

Nyní můžeme přistoupit k (alternativní) definici Riemannova integrálu na měřitelné množině. Množinu

$$C^n = C^n_{j,k} := \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \frac{j}{2^n} \le x < \frac{j+1}{2^n},\ \frac{k}{2^n} \le y < \frac{k+1}{2^n}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}_0,\ j, k \in \mathbb{Z}$$

nazveme čtvercovou množinou řádu n (od čtverce řádu n se liší tím, že není uzavřená). Čtvercové množiny pokrývají celý prostor $\mathbb{R}^2$ a jsou po dvou disjunktní, tj. každý bod $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ je prvkem právě jedné z nich. Každá čtvercová množina řádu n je měřitelná a její míra je $\lambda(C^n) = \frac{1}{4^n}$

Buď $M \subseteq \mathbb{R}^2$ měřitelná množina a buďte $C^n_1, C^n_2, \ldots, C^n_m$ všechny čtvercové množiny řádu n takové, že $P^n_1 := C^n_1 \cap M \neq \emptyset, \ldots, P^n_m := C^n_m \cap M \neq \emptyset$. Systém množin $\mathscr{P}_n := \{P^n_1, \ldots, P^n_m\}$ nazveme *pokrytím řádu n množiny M*. Každá z množin P^n_i je měřitelná, protože je průnikem dvou měřitelných množin. Míra množiny M je pak rovna

$$\lambda(M) = \sum_{i=1}^{m} \lambda(P^n_i).$$

Dále, nechť f je funkce ohraničená na M. Pro pokrytí $\mathscr{P}_n$ množiny M položme

$$h_i := \inf\{f(x,y) : [x,y] \in P_i^n\}, \quad H_i := \sup\{f(x,y) : [x,y] \in P_i^n\}.$$

Pak čísla

$$s_n(M,f) := \sum_{i=1}^{m} h_i \lambda(P_i^n) \quad \text{a} \quad S_n(M,f) := \sum_{i=1}^{m} H_i \lambda(P_i^n)$$

nazveme *dolní a horní součet řádu n příslušný množině M a funkci f*. Lze ukázat, že posloupnost $\{s_n(M,f)\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající a posloupnost $\{S_n(M,f)\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí, přičemž obě jsou ohraničené. To nás (spolu s větou o monotónních posloupnostech) opravňuje k následující definici.

Definice 14.3 (dvojného (Riemannova) integrálu na měřitelné množině)**.** Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná množina a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkce na M. Definujme *dolní a horní integrál z funkce f přes množinu M* jako

$$\iint_{\underline{M}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \lim_{n\to\infty} s_n(M,f) \quad \text{a} \quad \iint_{\overline{M}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \lim_{n\to\infty} S_n(M,f).$$

Je-li

$$\iint_{\underline{M}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\overline{M}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

řekneme, že *funkce f je na množině M (riemannovsky) integrovatelná* a tuto společnou hodnotu nazveme *dvojným (Riemannovým) integrálem z funkce f přes množinu M*.

Poznámka. Je-li M uzavřený obdélník, resp. normální množina, pak definice 14.3 je ekvivalentní definici 13.1, resp. definici 13.7, tj. je-li funkce integrovatelná podle jedné definice, je integrovatelná i podle druhé a naopak, přičemž hodnoty integrálů jsou stejné.

Vlastnosti:

1. Jsou-li f, g integrovatelné na měřitelné množině M a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak $\alpha f + \beta g$ je integrovatelná na M a platí
$$\iint_M \big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \alpha \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \beta \iint_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
2. Jsou-li f, g integrovatelné na měřitelné množině M a $f(x,y) \le g(x,y)$ $\forall [x,y] \in M$, pak
$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
3. Je-li f integrovatelná na měřitelné množině M, pak je i $|f|$ integrovatelná na M a platí
$$\left|\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le \iint_M |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
4. Jsou-li f, g integrovatelné na měřitelné množině M takové, že $\alpha \le f(x,y) \le \beta$, $0 \le g(x,y)$ $\forall [x,y] \in M$, pak existuje konstanta μ ($\alpha \le \mu \le \beta$) taková, že
$$\iint_M f(x,y) g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mu \iint_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{(integrální věta o střední hodnotě).}$$
5. Je-li f integrovatelná na měřitelné množině M, pak je integrovatelná na každé měřitelné podmnožině $A \subseteq M$.
6. Jsou-li M_1, M_2 dvě disjunktní měřitelné množiny, na kterých je f integrovatelná, pak je integrovatelná také na $M_1 \cup M_2$ a platí
$$\iint_{M_1 \cup M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{M_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
7. Je-li f ohraničená na množině M míry nula, pak je f na M integrovatelná a platí
$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$
8. Jsou-li M_1, M_2 měřitelné množiny takové, že jejich průnik je měřitelný a platí $\lambda(M_1 \cap M_2) = 0$ a je-li f integrovatelná na M_1 i M_2, pak je integrovatelná také na $M_1 \cup M_2$ a platí
$$\iint_{M_1 \cup M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{M_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

9. Platí
$$\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda(M) \qquad \text{pro libovolnou měřitelnou množinu } M.$$

Definice 14.4 (vlastnosti „skoro všude“)**.** Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná na nějaké množině A má *skoro všude vlastnost* $\mathcal{V}$, jestliže existuje podmnožina $B \subseteq A$ taková, že $\lambda(B) = 0$ a f má vlastnost $\mathcal{V}$ ve všech bodech množiny $A \setminus B$.

Věta 14.5. *Je-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrovatelná na měřitelné množině M a funkce $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je ohraničená na M, přičemž skoro všude na M platí $f(x, y) = g(x, y)$, pak funkce g je integrovatelná na M a platí*
$$\iint_M g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Poznámka. Jinými slovy, změníme-li u integrovatelné funkce hodnoty na množině míry nula, tak hodnota integrálu se nezmění. Vzhledem k této vlastnosti pak taková funkce na množině míry nula nemusí být vůbec definována.

Věta 14.6 (postačující podmínka pro integrovatelnost na měřitelné množině)**.** *Je-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ohraničená na měřitelné množině M a skoro všude na M spojitá, pak je f na M integrovatelná.*

15 Trojný integrál

V případě trojného integrálu je možné postupovat analogicky jako v předchozích dvou kapitolách.

1. Začali bychom s definicí trojného integrálu ohraničené funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ na uzavřeném kvádru
$$I = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \langle a_3, b_3\rangle\,.$$
Ten „rozřežeme“ na systém menších kvádrů I_{ijk}, na každém kvádru vezmeme infimum a supremum funkce f a definujeme dolní a horní součet příslušný funkci f a dělení D. Supremum dolních součtů a infimum horních součtů přes všechna možná dělení kvádru bychom nazvali *dolním* a *horním integrálem na kvádru I*; pokud tyto dvě hodnoty jsou stejné, tak řekneme, že f *je (riemannovsky) integrovatelná na kvádru I* a společnou hodnotu nazveme *trojným (Riemannovým) integrálem funkce u na kvádru I*.
2. Nejjednodušší postačující podmínkou pro integrovatelnost funkce na I je její spojitost na I.
3. Fubiniova věta potom říká, že je-li f integrovatelná na I a pro všechna $[x, y] \in I_{xy} = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle$ je integrovatelná funkce $z \mapsto f(x, y, z)$ na $\langle a_3, b_3\rangle$, pak platí
$$\iiint_I f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{I_{xy}} \Big(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
analogicky pro integrovatelnost funkcí $y \mapsto f(x, y, z)$ a $z \mapsto f(x, y, z)$. Speciálně, je-li f spojitá na I, pak platí
$$\begin{aligned}\iiint_I f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_{a_1}^{b_1}\Big(\int_{a_2}^{b_2}\Big(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \int_{a_1}^{b_1}\Big(\int_{a_3}^{b_3}\Big(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}x\\ &= \cdots = \int_{a_3}^{b_3}\Big(\int_{a_2}^{b_2}\Big(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$
Je-li navíc $f(x, y, z) = f_1(x) f_2(y) f_3(z)$, pak lze psát
$$\iiint_I f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{a_2}^{b_2} f_2(y)\,\mathrm{d}y \cdot \int_{a_3}^{b_3} f_3(z)\,\mathrm{d}z.$$
4. Dále bychom rozšířili pojem trojného integrálu na normální množiny. Buď M_{xy} normální množina v $\mathbb{R}^2$ a ψ_1, ψ_2 spojité funkce na M_{xy} takové, že $\psi_1(x, y) < \psi_2(x, y)$ $\forall [x, y] \in M^\circ_{xy}$. *Normální množinou vzhledem k rovině xy* nazveme množinu $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in M_{xy} \text{ a } \psi_1(x, y) \le z \le \psi_2(x, y)\}$. Analogicky bychom definovali normální množinu vzhledem k rovinám xz a yz. Množinu $M \subseteq \mathbb{R}^3$ nazveme *normální*, je-li normální k alespoň jedné ze souřadných rovin xy, xz, yz. Trojný integrál na normální množině pak definujeme tak, že tuto normální množinu „vnoříme“ do nějakého uzavřeného kvádru I a funkci f na I mimo množinu M dodefinujeme nulou. Řekneme potom, že funkce f je integrovatelná na normální množině M, je-li dodefinovaná funkce integrovatelná na I.
5. Buď M normální např. vzhledem k souřadné rovině xy. Potom se vzorec z Fubiniovy věty modifikuje
$$\iiint_M f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{M_{xy}} \Big(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
Pojem trojného integrálu by dále bylo možno rozšířit na případ konečného sjednocení normálních množin (s disjunktními průniky).

6. Konečně, alternativní přístup k definování trojného integrálu je možné založit na pojmu Jordanovy míry v $\mathbb{R}^3$. V příslušných definicích by nyní namísto čtverců vystupovaly krychle. Zjednodušeně lze říci, že v případě „rozumných" těles Jordanova míra odpovídá objemu tělesa, přičemž hranice tělesa má nulovou míru.
7. Zejména platí analogie věty 14.6 – je-li f ohraničená na měřitelné množině $M \subseteq \mathbb{R}^3$ a spojitá skoro všude na M, pak je zde integrovatelná.

Příklad 15.1. Určete hodnotu integrálu $\iiint_M (x + 2y - 3z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $M = \langle 1, 3\rangle \times \langle -1, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle$.

Řešení. Funkce je spojitá na daném kvádru M a tedy integrovatelná. Podle Fubiniovy věty pak platí

$$\begin{aligned}\iiint_M (x + 2y - 3z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_1^3 \Big(\int_{-1}^1 \Big(\int_0^2 (x + 2y - 3z)\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \Big(\int_{-1}^1 \Big[xz + 2yz - \frac{3}{2}z^2\Big]_0^2 \,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^3 \Big(\int_{-1}^1 (2x + 4y - 6)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \int_1^3 \Big[2xy + 2y^2 - 6y\Big]_{-1}^1 \mathrm{d}x\\ &= \int_1^3 (2x + 2 - 6 + 2x - 2 - 6)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 (4x - 12)\,\mathrm{d}x = \Big[2x^2 - 12x\Big]_1^3 = -8.\end{aligned}$$

Příklad 15.2. Určete hodnotu integrálu $\iiint_M y\cos(x + z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde M je množina vymezená plochami $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \pi/2$.

Řešení. Funkce $f(x, y, z) = y\cos(x + z)$ je spojitá v celém prostoru $\mathbb{R}^3$, a tedy i na zadané množině M, což znamená, že je zde integrovatelná. Vyjádřeme M jako normální množinu vzhledem k rovině xy, tj.

$$\begin{aligned} &0 \le x \le \frac{\pi}{2} && \text{(body)},\\ &0 \le y \le \sqrt{x}, && \text{(křivky)},\\ &0 \le z \le \frac{\pi}{2} - x && \text{(plochy)}.\end{aligned}$$

Podle Fubiniovy věty pak máme

$$\begin{aligned}\iiint_M y\cos(x + z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^{\pi/2} \Big(\int_0^{\sqrt{x}} \Big(\int_0^{\pi/2 - x} y\cos(x + z)\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\pi/2} \Big(\int_0^{\sqrt{x}} y\big[\sin(x + z)\big]_0^{\pi/2 - x}\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \Big(\int_0^{\sqrt{x}} y\Big(\sin\frac{\pi}{2} - \sin x\Big)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\pi/2} \Big[\frac{y^2}{2}\Big(\sin\frac{\pi}{2} - \sin x\Big)\Big]_0^{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x(1 - \sin x)\,\mathrm{d}x\\ &= \left|\begin{array}{ll} u = x & v' = 1 - \sin x\\ u' = 1 & v = x + \cos x\end{array}\right| = \frac{1}{2}\big[x^2 + x\cos x\big]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (x + \cos x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2} + \sin x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi^2}{8} + 1\Big) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \doteq 0,11685.\end{aligned}$$