

JAN FRANČŮ

MATEMATIKA I

Část 2

Lineární algebra

Verze 19. září 2021

2. Lineární algebra

Teorie matic a determinantů představuje úvod do lineární algebry. Nejrozsáhlejší aplikace mají matice a determinanty při řešení systémů lineárních rovnic. Pojem determinantu zavedl již v roce 1693 G.W. Leibniz¹, ale jeho objev upadl v zapomenutí. V roce 1750 dospěl znovu k pojmu determinantu G. Cramer². Všeobecně se začalo v matematice používat determinantů až koncem 18. století. Zasloužili se o to zejména matematici A.-T. Vandermonde³ a A. L. Cauchy⁴. Současně s teorií determinantů se rozvíjela teorie matic, jejímž zakladatelem je anglický matematik A. Cayley⁵. Na dalším rozvoji teorie matic se podíleli zejména G. Frobenius⁶, J. J. Sylvester⁷ a K. Weierstrass⁸.

2A. MATICE A MATICOVÉ OPERACE

Začneme intuitivní definicí matice:

Definice 2.1. Buď X neprázdná množina tzv. **skalárů** a m, n přirozená čísla.

Matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu $m \times n$ nad množinou X je schéma složené z m krát n prvků množiny X zapsaných do **tabulky s m řádky a n sloupci**.

Formálně **matice \mathbf{A} typu $m \times n$ nad množinou X** je **zobrazení kartézského součinu $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ do množiny X** .

Matici \mathbf{A} typu $m \times n$ budeme zapisovat ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

nebo jen krátce $\mathbf{A} = (a_{ij})$, kde a_{ij} **je prvek na i -tém řádku a j -tém sloupci**.

První index i se přitom nazývá **řádkový index** a druhý j **sloupcový index**.

Množinu všech matic typu (m, n) s prvky z množiny X označujeme $X^{m \times n}$, například $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Množina skalárů X bývá obvykle množina číselná. V dalším budeme předpokládat, že X **je množina reálných \mathbb{R} nebo komplexních \mathbb{C} čísel** s operacemi sčítání a násobení, které splňují obvyklé asociativní, komutativní a distributivní zákony. Nenulovým prvkem lze i dělit.

Prvky matic mohou být i komplikovanější objekty, například algebraické výrazy, nebo funkce.

Příklad 2.2. Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ je příkladem matice typu 2×3 nad množinou \mathbb{N} .

Platí například, že $a_{23} = 4$, protože prvek a_{23} leží ve druhém řádku a třetím sloupci matice \mathbf{A} , podobně $a_{11} = 1$ a $a_{22} = 6$.

¹Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) německý filozof, matematik a teolog píšící v latině a francouzštině.

²Gabriel Cramer (1704–1752) švýcarský matematik.

³Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796) francouzský matematik a chemik, p matematik.

⁴Augustin Louis Cauchy (1789–1857) francouzský matematik.

⁵Arthur Cayley (1821–1895) britský matematik

⁶Ferdinand George Frobenius (1849–1917) německý matematik.

⁷James Joseph Sylvester (1814–1897) anglický matematik.

⁸Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) německý matematik

Poznámka 2.3. Matice se obvykle označují velkým tučným písmenem např. **A, B, C, D**, v maticové rovnici neznámou matici označujeme například **X**.

Význačné matice

Uveďme několik význačných matic, některé mají své zavedené symboly:

Definice 2.4.

- (a) Je-li $m = n$, matice se nazývá **čtvercová**, v obecném případě $m \neq n$ **obdélníková**.
- (b) Uspořádaná n -tice $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ prvků matice (a_{ij}) typu $n \times n$ se stejným řádkovým a sloupcovým indexem se nazývá **hlavní diagonála** matice.
- (c) **Nulová matice $\mathbf{0}$** je matice, jejíž všechny prvky jsou nuly.
- (d) **Jednotková matice \mathbf{E}** je čtvercová matice, jejíž všechny prvky na hlavní diagonále jsou rovny jedné, ostatní prvky mimo diagonálu jsou nuly.
- (e) Matice **A** se nazývá **trojúhelníková**, (přesněji **horní trojúhelníková**), pokud pod hlavní diagonálou jsou samé nuly, přesněji pro každé dva indexy $i > j$ platí $a_{ij} = 0$.
Analogicky **dolní trojúhelníková** matice má samé nuly nad hlavní diagonálou, tj. $a_{ij} = 0$ pro $i < j$. Ostatní prvky mohou ale nemusí být nenulové.
- (f) Dvě **matice A, B se rovnají**, pokud jsou stejného typu a mají stejné prvky, tj. pro všechny indexy i, j platí $a_{ij} = b_{ij}$. Pak píšeme **$\mathbf{A} = \mathbf{B}$** .
- (g) Matice typu $1 \times n$ má jenom jeden řádek a nazýváme ji také **řádkový vektor**.
Matice typu $m \times 1$ má jenom jeden sloupec a nazýváme ji **sloupcový vektor**.

Příklady 2.5. Uveďme příklad matice jednotkové, nulové, horní a dolní trojúhelníkové:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Operace s maticemi

Na množině matic lze definovat řadu operací. Operace transponování má jenom jeden argument, je tedy operací unární.

Definice 2.6. (Transponování matice) Buď $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matice typu $m \times n$. Matice k ní **transponovaná** je matice \mathbf{A}^T typu $n \times m$ s prvky (a_{ji}) , tj. $\mathbf{A}^T = (a_{ji})$. Transponování matici „překlopí“ přes hlavní diagonálu, sloupce se mění na řádky a řádky na sloupce.

Poznámky 2.7.

- (a) Každou matici lze transponovat, z matice typu $m \times n$ se stane matice typu $n \times m$.
- (b) Sloupcový vektor se transponováním mění na řádkový a obráceně.
- (c) Dalším transponováním dostaneme původní matici: **$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$** .

Příklad 2.8. Transponováním matice typu 2×3 dostáváme matici typu 3×2 , například

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Definice 2.9. (Násobení matice číslem) Matici \mathbf{A} typu $m \times n$ lze vynásobit číslem (skalárem) $c \in X$. Výsledkem násobku $c\mathbf{A}$ je matice $\mathbf{B} = (b_{ij})$ stejného typu $m \times n$, s prvky $b_{ij} = c a_{ij}$. Součin je definován i v opačném pořadí: $\mathbf{B} = \mathbf{A}c$ s prvky $(b_{ij}) = (a_{ij}c)$. Pokud násobení v X je komutativní, platí rovnost $c\mathbf{A} = \mathbf{A}c$.

Poznámka. Matici $c\mathbf{A}$ se říká **skalární násobek matice \mathbf{A}** . Skalárem c přitom násobíme každý prvek matice. V případě $c = 1$ se matice nezmění, pro $c = 0$ dostáváme matici nulovou.

Příklad 2.10. Platí

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Definice 2.11. (Sčítání a odčítání matic)

Matice \mathbf{A}, \mathbf{B} lze sečíst, jen když **jsou stejného typu** $m \times n$.

Součtem $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ matic \mathbf{A} a \mathbf{B} je matice $\mathbf{C} = (c_{ij})$ stejného typu $m \times n$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Matice stejného typu, lze také odčítat. **Rozdíl $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$** je definován jako součet matic, kde druhou matici násobíme číslem (-1) : $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} := \mathbf{A} + (-1) \cdot \mathbf{B}$, tj. $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Poznámky 2.12. Pokud matice nemají stejný typ, nelze je sčítat ani odčítat. Při sčítání nebo odčítání matic sčítáme nebo odčítáme všechny odpovídající prvky matic. Matice stejného typu lze sčítat, odčítat a násobit skalárem stejně jako čísla (skaláry).

Příklady 2.13. Matici typu 2×3 můžeme sečíst nebo odečíst jen s maticí typu 2×3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 3+2 & 2+4 \\ 0+2 & 1+5 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-1 & 5-4 & 6-2 \\ 2-0 & 6-3 & 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Násobení matic

Násobení matic je komplikovanější než součet a násobek matic. Záleží na pořadí matic a typy matic musejí na sebe navazovat. Maticové násobení nám později umožní jednoduchý zápis i soustavy lineárních rovnic.

Definice 2.14. (Násobení matic). Buď matice $\mathbf{A} = (a_{ik})$ typu $m \times p$ a matice $\mathbf{B} = (b_{kj})$ typu $p \times n$. Potom součinem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ matic \mathbf{A} a \mathbf{B} je matice $\mathbf{C} = (c_{ij})$ typu $m \times n$ s prvky

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj}.$$

Jako při násobení čísel i při násobení matic se často symbol \cdot vynechává a píše se jenom \mathbf{AB} .

Poznámky 2.15.

- (a) Dvě matice \mathbf{A}, \mathbf{B} lze násobit, jen když typy matic na sebe navazují v následujícím smyslu: počet sloupců první matice se rovná počtu řádků druhé matice.

Důvodem je definice součinu matic: pro prvek c_{ij} násobíme odpovídající prvky i -tého řádku (je jich p jako sloupců první matice) a prvků j -tého sloupce (těch je jako počet řádků druhé matice) a tyto součiny sečteme. Proto počet sloupců první matice se musí rovnat počtu řádků druhé matice, symbolicky pro typy matic platí: $(m \times p) \cdot (p \times n) = m \times n$.

Prvek ležící v i -tém řádku a j -tém sloupci výsledné matice tedy získáme tak, že procházíme i -tý řádek v matici \mathbf{A} a jeho prvky postupně násobíme prvky ležícími v j -tém sloupci matice \mathbf{B} a součiny sečteme.

- (b) Operace **násobení matic není komutativní**, tj. pořadí matic nelze měnit. Po přehození matic typu $m \times p$, $p \times n$ pokud $m \neq n$ matice na sebe nenavazují. A i když $m = n \neq p$, po záměně pořadí dostáváme matici jiného typu $p \times p$ v případě, kdy $m \neq p$. A ani když $m = p = n$, tj. jsou to čtvercové matice stejné velikosti, i v tomto případě nedostaneme stejnou matici. Demonstrujme algoritmus násobení matic na příkladu:

Příklad 2.16. Určete součin $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a součin $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ŘEŠENÍ:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 6 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Příklad ukazuje, že násobení matic není komutativní: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Výsledné matice mají i různé rozměry.

Vlastnosti operací s maticemi shrneme v následující větě:

Věta 2.17. Vlastnosti maticových operací. Pokud typy matic operaci umožňují, operace sčítání, násobení, skalárního násobku matic splňuje asociativní zákon:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}), \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}), \quad (c \cdot d) \cdot \mathbf{A} = c \cdot (d \cdot \mathbf{A}).$$

Operace sčítání matic i skalární násobku jsou komutativní (násobení matic komutativní není):

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \quad c \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot c, \quad [\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}].$$

Operace sčítání je s oběma operacemi násobení spojena distributivními zákony:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

$$c \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c \cdot \mathbf{A} + c \cdot \mathbf{B} \quad (c + d) \cdot \mathbf{A} = c \cdot \mathbf{A} + d \cdot \mathbf{A}$$

Jednotková matice \mathbf{E} se chová jako jednička a nulová matice jako nula:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Pro transponování součtu a násobku matic platí $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ a $(c \cdot \mathbf{A})^T = c \cdot \mathbf{A}^T$.
 Pozor, při transponování součinu se **mění pořadí** transponovaných matic $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$.

2B. HODNOST MATICE

Velmi důležitou vlastností matice je její hodnost. Je to počet nezávislých řádků nebo sloupců. Nejprve si ujasněme pojem nezávislosti.

Nezávislost řádků

Uvažujme matici čísel z množiny „skalárů“ X , obvykle je to množina reálných čísel $X = \mathbb{R}$. Řádky matice jsou vektory stejné délky, které můžeme násobit číslem a sčítat po složkách jako matice typu $1 \times n$:

Definice 2.18. Bud' $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matice typu $m \times n$ s prvky $a_{ij} \in X$.

Matice \mathbf{A} se skládá z m **řádků** $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$, délky n : $\mathbf{r}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$.

Pro $c_1, c_2, \dots, c_m \in X$ **lineární kombinací** řádků nazveme vektor

$$c_1 \mathbf{r}_1 + c_2 \mathbf{r}_2 + \dots + c_m \mathbf{r}_m := (c_1 a_{11} + \dots + c_m a_{m1}, \dots, c_1 a_{1n} + \dots + c_m a_{mn}).$$

Pokud řádek \mathbf{r}_1 můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci řádků $\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$, tj. existují čísla c_2, \dots, c_m , že $\mathbf{r}_1 = c_2 \mathbf{r}_2 + \dots + c_m \mathbf{r}_m$, řekneme, že řádek \mathbf{r}_1 je **závislý** na řádcích $\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$.

Příklady 2.19. Řádek $\mathbf{r}_1 = (-4, 4, 5, 1)$ je závislý na řádcích $\mathbf{r}_2 = (1, 3, 2, 4)$, $\mathbf{r}_3 = (2, 0, 1, 2)$, $\mathbf{r}_4 = (0, -2, 4, -1)$, protože existují čísla $c_2 = 2$, $c_3 = -3$, $c_4 = 1$, že $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{r}_2 - 3\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4$.

Dále řekneme, že řádky $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$ jsou **lineárně závislé**, pokud alespoň jeden z nich je závislý na ostatních řádcích, tj. lze ho vyjádřit jako lineární kombinace ostatních řádků. Pokud žádný z nich není závislý na ostatních, řekneme, že řádky jsou **lineárně nezávislé**. Matematicky to zapisujeme implikací:

Definice 2.20. Řádky $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$ matice \mathbf{A} nazveme **lineárně nezávislé**, pokud jediná jejich lineární kombinace, která dává nulový vektor $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, je kombinace nulová, tj.

$$c_1 \mathbf{r}_1 + c_2 \mathbf{r}_2 + \dots + c_m \mathbf{r}_m = \mathbf{0} \implies c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0.$$

Poznámky 2.21. Přesvědčme se, že implikace definuje nezávislé řádky. Kdyby alespoň jedno z c_i bylo nenulové, například $c_1 \neq 0$, potom z rovnosti $c_1 \mathbf{r}_1 + c_2 \mathbf{r}_2 + \dots + c_m \mathbf{r}_m = \mathbf{0}$ plyne

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{1}{c_1}(c_2 \mathbf{r}_2 + \dots + c_m \mathbf{r}_m),$$

tj. řádek \mathbf{r}_1 je vyjádřen jako lineární kombinace řádků $\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$ a je tedy na nich závislý. Jestliže jsou vždy všechny $c_i = 0$, potom řádky \mathbf{r}_i jsou nezávislé.

Jak zjistíme počet nezávislých řádků? Vypustíme všechny nulové řádky. Pokud v matici najdeme řádek, který je závislý na ostatních, řádek vyřadíme. Pokud ve zbývajících řádcích najdeme další závislý řádek, také ho odstraníme. Takto postupujeme, až zůstanou jenom řádky lineárně nezávislé, které určují hodnost matice:

Definice 2.22. Hodnost matice \mathbf{A} je počet jejích lineárně nezávislých řádků. Značíme ji $h(\mathbf{A})$. Přesněji, $h(\mathbf{A}) = p$ pokud v matici existuje p nezávislých řádků, přičemž případné ostatní řádky jsou na nich závislé.

Hodnost nulové matice položíme $h(\mathbf{0}) = 0$.

Poznámky 2.23.

- (a) Nulový řádek je vždy závislý. Pokud jsou v matici dva stejné řádky, jsou závislé, druhý je závislý na prvním, také naopak. Jeden z nich můžeme vypustit.
- (b) Hodnost matice je počet nezávislých řádků, proto hodnost matice \mathbf{A} typu $m \times n$ je vždy menší nebo rovna počtu řádků, tj. $h(\mathbf{A}) \leq m$.
- (c) **Řádky jednotkové matice jsou nezávislé**, proto její hodnost je rovna počtu jejích řádků. Skutečně, žádný řádek matice nelze vyjádřit pomocí ostatních, protože i -tý řádek má na i -tém místě jedničku a ostatní řádky tam mají nuly a jedničku nelze vyjádřit jako kombinaci nul.

Hodnost matice se snadno určuje u tzv. schodovité matice:

Definice 2.24. Matici \mathbf{A} nazveme **schodovitou** nebo **stupňovitou**, pokud každý další nenulový řádek „začíná více nulami“ než řádek předchozí.

Příklad. Například matice typu 5×7

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je schodovitá, má postupně „schody“ šířky 1, 3 a 2, poslední řádek je nulový. Má proto čtyři nezávislé řádky, její hodnost je proto $h(\mathbf{A}) = 4$.

Jak určit hodnost matice v praxi? Zjišťovat nezávislost řádků není věc snadná. Dobře se to však zjišťuje u schodovité matice. Každý nenulový řádek je nezávislý na řádcích následujících. Skutečně, je-li a_{ij} jeho první nenulová složka v j -tém řádku, všechny další řádky mají na j -tém místě nulu, a proto žádnou jejich lineární kombinací na j -tém místě a_{ij} nedostaneme. Proto hodnost schodovité matice je **počet jejích nenulových řádků**.

Pro zjištění hodnosti matice matici „upravíme“ na schodovitý tvar. Použijeme ovšem jenom ty úpravy, které nemění počet nezávislých řádků a tím i hodnost matice:

Věta 2.25. Následující tzv. **elementární řádkové úpravy** nemění hodnost matice \mathbf{A} :

- (a) změníme pořadí řádků,
- (b) řádek vynásobíme **nenulovým** číslem,
- (c) k řádku **přičteme násobek jiného řádku** nebo lineární kombinaci **jiných** řádků,
- (d) vypustíme nulový řádek.

Poznámky 2.26.

Uveďme myšlenku důkazu předchozí věty. Při žádné manipulaci s řádky (přidání nenulového řádku není dovoleno) se nemůže počet nezávislých řádků zvýšit, nevhodnou úpravou můžeme nezávislý řádek ztratit. Pokud po dané úpravě řádků matice existuje úprava, kterou dostaneme matici původní, hodnost matice se nemění. Projďme jednotlivé úpravy:

Při změně pořadí řádků není problém opačnou změnou pořadí dostat původní matici. Při násobení řádku nenulovým číslem c stačí řádek vynásobit číslem $1/c$. Jestliže k řádku přičteme lineární kombinace jiných řádků, odečtením stejné kombinace dostaneme původní matici. Podstatné však je, že **přičítaná kombinace neobsahuje původní řádek**. A vypuštění nulového řádku nemění počet nezávislých řádků.

Věta 2.27. Každou matici lze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na schodovitý tvar.

Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Tvrzení dokážeme, když načrtne postup, kterým z libovolné matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ dostaneme matici schodovitou.

Nechť v prvním sloupci matice jsou nenulové prvky, v opačném případě přejdeme k prvnímu dalšímu sloupci, ve kterém je alespoň jeden nenulový prvek. Pokud náhodou $a_{11} = 0$, najdeme i -tý řádek s $a_{i1} \neq 0$ a přesuneme ho před první řádek. Získáme tím matici s $a_{11} \neq 0$, tomuto prvku se říká **klíčový prvek** nebo také pivot. Nyní ke každému dalšímu k -tému řádku, pro který má $a_{k1} \neq 0$, přičteme $-a_{k1}/a_{11}$ -násobek prvního řádku. Tím získáme matici, která má v prvním sloupci nuly kromě prvního nenulového prvku.

Přejdeme ke druhému sloupci, první řádek už dále nebudeme měnit. Pokud $a_{22} \neq 0$ vybereme ho za klíčový prvek. Opět, kdyby $a_{22} = 0$, najdeme další i -tý řádek s $a_{i2} \neq 0$ a přesuneme ho mezi první a druhý řádek. Kdyby všechny $a_{i2} = 0$, $i \geq 2$, přejdeme ke třetímu sloupci. Opět k následujícím řádkům s $a_{k2} \neq 0$ přičteme $-a_{k2}/a_{22}$ -násobek druhého řádku. Tím získáme matici, která má ve druhém sloupci nuly kromě prvních dvou řádků.

Takto postupujeme až k poslednímu sloupci. Přitom každý další řádek začíná více nulami, pokud to už není řádek nulový. Tímto způsobem jsme získali schodovitou matici.

Uvedený postup se nazývá **Gaussova eliminace**. Pokud při eliminaci „nulujeme“ nejen prvky pod klíčovým prvkem, ale i nad klíčovým prvkem, mluvíme o **Jordanově eliminaci**.

Příklad 2.28. Určete hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 7 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ŘEŠENÍ: Matici převedeme elementárními řádkovými úpravami do schodovitého tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 7 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} / -7 \cdot \mathbf{r}_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} / -\mathbf{r}_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow h(\mathbf{A}) = 3.$$

Příklad 2.29. Určete hodnost matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 2 & 6 & 3 & 8 \\ -2 & -6 & 10 & 2 \end{pmatrix}$.

ŘEŠENÍ: Matici převedeme elementárními řádkovými úpravami do schodovitého tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 2 & 6 & 3 & 8 \\ -2 & -6 & 10 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} / -2 \cdot \mathbf{r}_1 \\ / +1 \cdot \mathbf{r}_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 13 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h(\mathbf{B}) = 2.$$

Sloupcové úpravy

Transponováním matice se nezávislé řádky mění na nezávislé sloupce. Lze dokázat, že hodnota matice se transponováním nemění. V důsledku toho hodnota matice je rovna i počtu nezávislých sloupců, které lze upravovat pomocí sloupcových úprav analogických úpravám řádkovým:

Věta 2.30. Buď \mathbf{A} matice typu $m \times n$.

Potom počet nezávislých řádků je roven počtu nezávislých sloupců a platí $h(\mathbf{A}^T) = h(\mathbf{A})$. Hodnota matice \mathbf{A} se rovná počtu nezávislých sloupců.

Hodnota matice je menší nebo rovna minimu počtu řádků a sloupců: $h(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.

Následující tzv. **elementární sloupcové úpravy** nemění hodnotu matice:

- (a) změníme pořadí sloupců,
- (b) sloupec vynásobíme **nenulovým** číslem,
- (c) ke sloupci přičteme lineární kombinaci libovolných **jiných** sloupců,
- (d) vypustíme nulový sloupec.

2C. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Soustavy lineárních rovnic – zkráceně SLR, se kterými jste se setkali již na střední škole, mají velký význam v technické praxi, protože řada inženýrských situací vede na řešení SLR. Soustavy lze výhodně zapsat a zkoumat pomocí matic. První otázkou, kterou se budeme zabývat, je zda daná soustava řešení má, případně, kolik těchto řešení je. Ukážeme si také praktickou metodu, kterou lze SLR řešit.

Definice 2.31. Nechtě a_{ij}, b_i jsou reálná čísla a x_i neznámé. Potom zápis

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad (2.1)$$

se nazývá **soustava m lineárních rovnic o n neznámých** x_1, \dots, x_n .

Číslo a_{ij} se nazývá **koefficient** v i -té rovnici u j -té neznámé.

Číslo b_i se nazývá **pravá strana** nebo **absolutní člen** i -té rovnice.

Maticový zápis soustavy rovnic

Uvedenou soustavu lze zapsat pomocí matic a vektorů. Podíváme-li se na definici násobení matic, zjistíme, že první rovnici lze zapsat jako součin řádkového vektoru $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$ a sloupcového vektoru (x_1, x_2, \dots, x_n) – podle definice násobení matic, který se rovná pravé straně b_1 . Stejným způsobem můžeme přepsat i ostatní rovnice. Protože všechny vektory jsou stejné délky, součiny mají stejný tvar a sloupcový vektor je vždy stejný, soustavu rovnic (2.1) lze zapsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Definice 2.32. Koeficienty a_{ij} uvedené soustavy rovnic tvoří matici \mathbf{A} typu $m \times n$ zvanou **maticí soustavy**.

Koeficienty b_i tvoří sloupcový **vektor pravých stran** \mathbf{b} typu $m \times 1$ a neznámé x_j sloupcový **vektor neznámých** \mathbf{x} typu $n \times 1$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Soustavu lineárních rovnic (2.1) tak lze zapsat v **maticovém tvaru** $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Rozšířenou maticí soustavy nazýváme matici \mathbf{A} rozšířenou o vektor \mathbf{b} oddělený od matice \mathbf{A} svislou čarou:

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right). \quad (2.4)$$

Poznámka 2.33. V příkladu mají neznámé jména (x_1, x_2, \dots, x_n) . V praxi však se neznámé mohou „jmenovat“ jinak: například (x, y, z) , nebo (s, t, u, v, w) nebo (a, b, c, d) a pod.

Poznámky 2.34. (Rovnost a rovnice) Vyjasněme si ještě tyto pojmy: **Rovnost**, například $2 + 3 = 5$, $\sqrt{9} = 3$, $\cos(\pi) = 1$, **je výrok**, který platí nebo neplatí. Často se zapisuje ve tvaru výrokové formy s proměnnými, přičemž se kvantifikátory vynechávají, předpokládá se, že výrok platí pro všechny přípustné hodnoty.

Jsou to například tzv. vzorce například $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, které platí pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, nebo vzorec $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$, který platí pro každá kladná reálná čísla $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Naproti tomu **rovnice** není výrok. Například o kvadratické rovnici $x^2 + 2x - 15 = 0$ nemá smysl uvažovat, zda je pravdivá nebo nepravdivá. Je to výroková forma a představuje **úkol najít všechna „řešení“**, tj. hodnoty proměnné x , pro které se z výrokové formy stává pravdivý výrok. Tyto hodnoty se nazývají **řešení**, v našem případě jsou to dvě čísla 3 a -5 .

Rovnice se tedy skládá s výrokové formy s proměnnými a množinou, ve které máme hledat řešení. U kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ to mohou být reálná čísla \mathbb{R} nebo komplexní čísla \mathbb{C} a naším úkolem je vždy najít množinu **všech** řešení. Používáme přitom úpravy, při kterých se množina řešení nemění.

Ještě upřesněme pojem řešení soustavy lineárních rovnic:

Definice 2.35. (Řešení soustavy lineárních rovnic) Uvažujme soustavu rovnic (2.1). **Sloupcový vektor** $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ nazveme **řešením soustavy** (2.1), pokud po dosazení hodnot x_1, x_2, \dots, x_n do rovnic (2.1) za proměnné x_1, x_2, \dots, x_n dostaneme ve všech rovnicích (2.1) rovnosti. Množina všech řešení je proto podmnožina množiny $\mathbb{R}^{n \times 1}$ všech sloupcových vektorů \mathbf{x} splňujících (2.1).

Řešení soustav lineárních rovnic

Jak se řeší SLR? Pomocí **ekvivalentních úprav**, při kterých se množina řešení (sloupcových vektorů \mathbf{x}) nemění, soustavu rovnic upravíme na tvar s rovnicemi typu $x_i = b_i^*$, z kterých lze zjistit hodnoty řešení.

Které úpravy jsou ekvivalentní? Rovnici lze násobit číslem a k rovnici lze přičíst násobky jiných rovnic. Podíváme-li se na odpovídající rozšířenou soustavu rovnic, vidíme, že

- (a) změně pořadí rovnic odpovídá změna pořadí řádků rozšířené matice,
- (b) násobení rovnice nenulovým číslem odpovídá násobení řádku rozšířené matice číslem,
- (c) přičtení násobku rovnice k jiné rovnici odpovídá přičtení násobku řádku rozšířené matice k jinému řádku,
- (d) rovnici se samými nulami lze vynechat stejně jako lze vynechat nulový řádek.

Ekvivalentním úpravám soustavy rovnic tak odpovídají elementární řádkové úpravy matic, které jsme využili při zjišťování hodnoty matic. Výsledky shrneme v následující větě:

Věta 2.36. Soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tj. soustavu m lineárních rovnic o n neznámých lze vzájemně jednoznačně reprezentovat rozšířenou maticí $\mathbf{A}|\mathbf{b}$.
Ekvivalentním úpravám SLR vzájemně jednoznačně odpovídají elementární řádkové úpravy rozšířené matice.
Každou SLR lze řádkovými úpravami převést na soustavu se schodovitou rozšířenou maticí.

Podle tvaru rozšířené matice ve schodovitém tvaru můžeme už zjistit zda soustava má řešení. Pokud poslední nenulový řádek má tvar $(0, 0, \dots, 0|b)$, kde $b \neq 0$, řádek reprezentuje rovnici $0x_1 + \dots + 0x_n = b$, kterou nemůže splnit žádná n -tice čísel (x_1, \dots, x_n) . Z předpokladu, že soustava má řešení, jsme došli ke sporu, soustava proto žádné řešení nemá. Protože rozšířená matice má o jeden nenulový řádek víc než matice soustavy, hodnost soustavy $h(\mathbf{A})$ je menší, než hodnost rozšířené matice $h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

V opačném případě, tj. když $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, soustava řešení má. Pokud je nezávislých rovnic stejně jako neznámých, schodovitá matice \mathbf{A} má všechny „schody“ šířky jedna.

Poslední (nenulový) řádek má tvar $a_{nn}^* x_n = b_n^*$, odkud díky $a_{nn}^* \neq 0$ můžeme spočítat $x_n = b_n^*/a_{nn}^*$.

V předposlední rovnici $a_{n-1,n-1}^* x_{n-1} + a_{n-1,n}^* x_n = b_{n-1}^*$ přibyla jedna neznámá x_{n-1} . Protože hodnotu x_n už známe a $a_{n-1,n-1}^* \neq 0$, je jednoznačně určena hodnota neznámé x_{n-1} .

Protože každý „schod“ schodovité matice má šířku 1, je vždy další neznámá určena jednoznačně. V tomto případě tedy soustava má právě jedno řešení.

V případě, že „schod“ matice \mathbf{A} má šířku 2, v rovnici přibylly dvě neznámé. Jedné neznámé můžeme přiřadit libovolnou hodnotu, tzv. parametr, druhá neznámá je určena rovnicí. Řešení bude obsahovat parametr. Pro libovolnou hodnotu parametru dostáváme řešení. Proto soustava bude mít nekonečně mnoho řešení. Při „schodu“ šířky k řešení přibude $k - 1$ parametrů.

Poznámky 2.37. Popsaná metoda se nazývá **Gaussova eliminace**. Pokud při úpravě „nulujeme“ nejen prvky pod klíčovým prvkem, ale i nad ním, mluvíme o **Jordanově eliminaci**.

Dospěli jsme tak k velmi důležité větě, která vypovídá o řešení soustavy lineárních rovnic pomocí hodnoty matic soustavy, aniž bychom počítali jejich řešení:

Věta 2.38. (Frobeniova) Uvažujme soustavu m lineárních rovnic (2.1) o n neznámých zapsanou v maticovém tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ s maticí soustavy \mathbf{A} a rozšířenou maticí $\mathbf{A}|\mathbf{b}$. Potom:

- (a) Jestliže $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, soustava **nemá řešení**.
- (b) Jestliže $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$, soustava **má právě jedno řešení**.
- (c) Jestliže $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n$, soustava **má právě nekonečně mnoho řešení**, které všechny lze zapsat pomocí $n - h(\mathbf{A})$ parametrů.

Poznámky 2.39.

- (a) Frobeniova věta je jednoduchým kritériem řešitelnosti soustav lineárních rovnic. V případě, kdy řešení je nekonečně mnoho, často všechna řešení lze zapsat různými způsoby.
- (b) Uvědomme si, že může nastat právě jeden z těchto tří případů:
 - (i) soustava nemá žádné řešení (tzn. je neřešitelná),
 - (ii) soustava má jediné řešení,
 - (iii) soustava má nekonečně mnoho řešení.
- (c) Úprava rozšířené matice na schodovitý tvar se nazývá **přímý chod** Gaussovy eliminace. Výpočet neznámých z výsledné schodovité matice se pak nazývá **zpětný chod** Gaussovy eliminace, viz příklad 2.40 níže.

Příklady

Při odvozování předchozí věty jsme ukázali, jak lze danou rozšířenou matici převést na matici schodovitou. Ilustrujme Gaussovu metodu řešení soustavy lineárních rovnic na několika typických příkladech:

Příklad 2.40. Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{cccccccl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ & & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}$$

ŘEŠENÍ: Napišeme rozšířenou matici soustavy a pomocí elementárních řádkových úprav ji převedeme na schodovitý tvar. Pokud je jeden řádek násobkem druhého, jeden z nich vypustíme.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} / + 2\mathbf{r}_1 \\ / - \mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ / + \mathbf{r}_2 \\ / - \mathbf{r}_2 \end{array} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Daná soustava nemá řešení, neboť v posledním řádku jsou všechny koeficienty u neznámých nulové, kdežto absolutní člen není nula. Hodnost matice soustavy je jenom 3, ale hodnost rozšířené matice je 4.

Příklad 2.41. Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & & & = & -4 \end{array}$$

ŘEŠENÍ:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} / - \mathbf{r}_1 \\ / - 2\mathbf{r}_1 \\ / - 2\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ / + \frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \\ / - \frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \end{array} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Poslední řádek dává rovnici $2x_3 = 3$, odkud $x_3 = \frac{3}{2}$. Předposlední řádek dává přímo $x_2 = 1$. A konečně první řádek dává rovnici $x_1 = -1 + 2x_2 - x_3$. Po dosazení za x_2 a x_3 dostaneme $x_1 = -\frac{1}{2}$. Daná soustava má tedy jediné řešení: $(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$.

Příklad 2.42. Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 6 \end{array}$$

ŘEŠENÍ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} / - \mathbf{r}_1 \\ / - \mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Dostali jsme soustavu 2 (nezávislých) rovnic pro 4 neznámé. Rozdíl $4 - 2 = 2$ dává dvě volné neznámé, které budou parametry. Může to být jedna z neznámých x_1 nebo x_2 a neznámá x_4 , nikoliv však neznámá x_3 , protože $a_{24} = 0$, a proto x_3 je jednoznačně určena rovnicí $2x_3 = 4$. Zvolíme-li za „volné“ neznámé x_2, x_4 , pak lehce dopočítáme $x_3 = 2$, $x_1 = 2x_2 - x_4$.

Položíme-li $x_2 = t$, $x_4 = s$, pak daná soustava má nekonečně mnoho řešení, která lze zapsat ve tvaru $(2t - s, t, 2, s)$, kde t, s jsou parametry, tj. libovolná čísla.

Poznámky 2.43. Má-li soustava lineárních rovnic nekonečně mnoho řešení, pak ze schodovitého tvaru rozšířené matice plyne, kolik soustava bude mít volných neznámých, tj. pomocí kolika parametrů lze vyjádřit obecné řešení. Není však určeno, které neznámé máme zvolit za parametry. Při „schodu“ šířky 2 ze dvojice neznámých můžeme zvolit kteroukoliv. Vyjádření obecného řešení proto není jednoznačné, záleží na tom, které neznámé zvolíme za parametry.

Pro vyjádření obecného řešení doporučujeme následující postup:

- Napišeme systém rovnic odpovídající výsledné schodovité matici.
- Na levé straně ponecháme takových $h(\mathbf{A})$ neznámých, aby matice sestavené z koeficientů u těchto neznámých měla nenulový determinant. Ostatních $(n - h(\mathbf{A}))$ neznámých převedeme na pravou stranu: toto budou „volné“ neznámé, tj. libovolné reálné parametry.
- Neznámé stojící vlevo pak vypočteme zpětným chodem Gaussovy eliminace nebo Cramrovým pravidlem, viz Věta 2.63.

Nahradíme-li dále parametr $t \in \mathbb{R}$ parametrem $t + c$ nebo $b \cdot t + c$, kde $b \neq 0$, dostaneme jiné vyjádření neznámých, množina řešení se však nezmění.

Homogenní soustavy lineárních rovnic

Speciálním případem soustav lineárních rovnic jsou soustavy s nulami na pravé straně:

Definice 2.44. Necht' a_{ij} jsou reálná čísla. Pak soustava

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \quad (2.5)$$

se nazývá **homogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých**.

Protože rozšířená matice soustavy (2.5), vznikla z matice \mathbf{A} přidáním sloupce samých nul, je zřejmé $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, a tedy podle Frobeniovy věty soustava má vždy řešení:

Věta 2.45. Každá homogenní soustava lineárních rovnic (2.5) má alespoň jedno řešení. Je jím vždy **nulové řešení** $\mathbf{x} = \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$.

Homogenní soustava lineárních rovnic (2.5) má buď jediné nulové řešení, nebo nekonečně mnoho řešení které lze zapsat s jedním nebo více parametry. Počet parametrů je $n - h(\mathbf{A})$.

Příklad 2.46. Řešte homogenní soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & + & 2x_4 & = & 0. \end{array}$$

ŘEŠENÍ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) / -\mathbf{r}_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Daná soustava má nekonečně mnoho řešení. Položíme-li $x_3 = t$ a $x_4 = s$, potom všechna řešení lze zapsat ve tvaru $(-3t + s, t - s, t, s)$, kde t, s jsou libovolná reálná čísla.

2D. DETERMINANTY

Čtvercové matice s „rovnými“ svislými závorkami, jaké užíváme pro absolutní hodnotu, nazýváme determinanty. Je to vlastně funkce, která čtvercové matici přiřadí skalár, např. reálné číslo. Determinanty byly dokonce používány dříve než matice v Číně ve 3. století př. n.l. k řešení soustav lineárních rovnic. Eliminací lze zjistit, že soustava dvou lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, tj.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2, \end{aligned}$$

má řešení, právě když koeficienty druhé rovnice nejsou násobky druhé rovnice, tj. $a_{11} : a_{21} \neq a_{12} : a_{22}$, odkud plyne $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Tato kombinace se nazývá determinant. I jednotlivé řešení lze vyjádřit pomocí determinantů, jak si ukážeme později. Řešení soustavy tří lineárních rovnic vede na podobné výrazy – determinanty matic typu 3×3 . Této metodě řešení SLR se říká Cramerovo pravidlo. Budeme se jím zabývat později.

Obecná definice determinantu z matice libovolné velikosti n není jednoduchá. Než k ní přistoupíme, ukážeme si, jak se počítají determinanty druhého a třetího stupně.

Definice 2.47. Determinant ze čtvercové matice \mathbf{A} zapisujeme $|\mathbf{A}|$ nebo $\det(\mathbf{A})$ nebo $\det \mathbf{A}$. Determinanty stupně 1, 2, 3 počítáme podle vzorců:

n=1 Determinant matice $\mathbf{A} = (a_{11})$ je číslo a_{11} , tedy $\det(\mathbf{A}) = a_{11}$.

n=2 Determinant z matice 2×2 počítáme pomocí tzv. **křížového pravidla**

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

n=3 Determinant z matice 3×3 počítáme pomocí tzv. **Sarrusova pravidla**

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}). \end{aligned}$$

Poznámky 2.48.

- (a) V případě $n = 2$ je determinant podle křížového pravidla roven součinu prvků na hlavní diagonále „ \searrow “ mínus součin prvků na vedlejší diagonále „ \swarrow “.

- (b) V případě $n = 3$ determinant počítáme podle pravidla pojmenovaného podle francouzského matematika P. F. Sarruse (1798–1858). Výpočet se dobře pamatuje, když pod matici s řádky $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ přepíšeme ještě první dva řádky $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$. Nejdříve sečteme součiny prvků na třech hlavních červených \searrow diagonálách a potom odečteme součet součinů na třech vedlejších modrých \swarrow diagonálách. Stejný výsledek dostaneme, když matici se sloupci $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ rozšíříme o dva první sloupce $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ a sčítáme součiny prvků na diagonálách jako v předchozím případě:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- (c) Pozor, v případě $n = 4$ **nelze užít** pravidlo „analogické“ Sarrusovu pravidlu, dostali bychom chybný výsledek, protože „diagonály“ hlavní i vedlejší jsou jenom čtyři a sčítanců však má být 24.

Matematická definice determinantu stupně n

Definice je založena na pojmu permutace, tj. „pořadí“ čísel $\{1, 2, \dots, n\}$:

Definice 2.49. Buď n přirozené číslo. **Permutací** (pořadím) $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ nazveme uspořádanou n -tici čísel $p_i \in \mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$, přičemž každé číslo se v permutaci \mathbf{p} vyskytuje právě jednou. Je to tedy bijekce \mathbb{N}_n na sebe. Množinu všech permutací n čísel označíme symbolem $P(n)$:

$$P(n) = \{\mathbf{p} : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_n, \mathbf{p} \text{ – vzájemně jednoznačné}\}.$$

Z kombinatoriky je známo, že množina $P(n)$ má $|P(n)| = n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ permutací.

Inverzí v permutaci $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ rozumíme dvojici (p_i, p_j) , pro kterou platí $i < j$ a $p_i > p_j$. Pokud je počet inverzí v permutaci sudý, mluvíme o **sudé** permutaci, pokud je lichý, mluvíme o **liché** permutaci.

Znaménko permutace je $\text{sgn}(\mathbf{p}) = (-1)^{\text{počet inverzí}}$, tj. $\text{sgn}(\mathbf{p}) = 1$ pro sudé permutace a $\text{sgn}(\mathbf{p}) := -1$ pro permutace liché.

Příklady 2.50. Permutace $(1, 2, 3, 4, 5)$ je permutace sudá a $\text{sgn}(\mathbf{p}) = 1$, protože nemá žádnou inverzi. Naproti tomu permutace $(1, 4, 3, 2, 5)$ je lichá, protože obsahuje 3 inverze: $(4, 3)$, $(4, 2)$, $(3, 2)$, a proto $\text{sgn}(\mathbf{p}) = -1$.

Poznámka 2.51. Místo počtu inverzí můžeme k zjištění znaménka permutace použít počet výměn dvou členů permutace, pomocí které vedou k identické permutaci. Například u permutace $(1, 4, 3, 2, 5)$ stačí jediná výměna 4 s 2, která vede na identickou permutaci $(1, 2, 3, 4, 5)$, permutace je proto lichá.

Nyní můžeme přistoupit k definici determinantu libovolného stupně:

Definice 2.52. Determinant čtvercové matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (n, n) je roven součtu

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\mathbf{p} \in P(n)} \text{sgn}(\mathbf{p}) \cdot a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \dots \cdot a_{np_n}. \quad (2.6)$$

Poznámky 2.53. Definice dává stejné hodnoty pro $n \leq 3$. Skutečně, pro $n = 2$ jsou jen dvě permutace: sudá $(1, 2)$ a lichá $(2, 1)$, proto $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{\mathbf{p} \in P(2)} \text{sgn}(\mathbf{p}) a_{1\mathbf{p}_1} a_{2\mathbf{p}_2} = \text{sgn}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) a_{11} a_{22} + \text{sgn}(\mathbf{2}, \mathbf{1}) a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$.

Pro $n = 3$ v $P(3)$ máme 6 permutací: tři sudé $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ a tři liché $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 2, 1)$, a tudíž 6 sčítanců. Snadno lze ověřit, že dostáváme Sarrusovo pravidlo.

Pro $n = 4$ už máme součet $4! = 24$ součinů 4 čísel, $n = 5$ dává součet $5! = 120$ součinů 5 čísel. Se zvětšujícím n počet členů rychle narůstá: pro $n = 10$ je to součet $P(n) = 3\,628\,800$ součinů 10 čísel. Proto hledejme vhodnější metodu pro výpočet determinantů z „velkých“ matic.

Determinant lze také počítat pomocí rozvoje determinantu podle zvoleného řádku (nebo sloupce), přičemž determinant stupně n se převede na součet n subdeterminantů stupně $n - 1$.

Definice 2.54. Buď \mathbf{A} čtvercová matice stupně n . Matici, která vznikne z matice \mathbf{A} vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce označíme \mathbf{A}_{ij} . Determinant $\det(\mathbf{A}_{ij})$ nazveme **subdeterminant** nebo též **minor** determinantu původní matice \mathbf{A} .

Věta 2.55. Laplaceova věta. Determinant stupně $n \geq 2$ lze rozepsat pomocí **rozvoje podle i -tého řádku** na součet n subdeterminantů stupně $n - 1$:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik}) \equiv (-1)^{i+1} a_{i1} \det(\mathbf{A}_{i1}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(\mathbf{A}_{in}), \quad (2.7)$$

nebo pomocí **rozvoje podle j -tého sloupce** opět na součet n subdeterminantů stupně $n - 1$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(\mathbf{A}_{kj}) \equiv (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\mathbf{A}_{1j}) + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(\mathbf{A}_{nj}). \quad (2.8)$$

Idea důkazu. Odvodíme vzorec pro rozvoj podle 1-tého sloupce. Množinu všech permutací $P(n)$ rozdělíme na n skupin permutací. První skupinu tvoří permutace s $p_1 = 1$. Vynecháme-li z těchto permutací první složku $p_1 = 1$, dostaneme množinu $(n - 1)!$ permutací na množině $(2, 3, \dots, n)$, kterou označme $P'_1(n - 1)$. V součtu (2.6) každý sčítanec této skupiny začíná číslem a_{11} . Znaménko permutace $(1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ je stejné jako znaménko permutace (p_2, p_3, \dots, p_n) . Součet členů s těmito permutacemi je

$$\sum_{\mathbf{p} \in P(n), p_1=1} \text{sgn}(\mathbf{p}) \cdot a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = a_{11} \sum_{\mathbf{p}' \in P'_1(n-1)} \text{sgn}(\mathbf{p}') \cdot a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = a_{11} \det(\mathbf{A}_{11}).$$

Dostáváme tak první člen rozvoje (2.8) s $j = 1$ a $k = 1$.

Druhý člen s $j = 1$ a $k = 2$ dostaneme z druhé skupiny permutací s $p_1 = 2$, změní se však znaménko permutace: $\text{sgn}(2, p_2, p_3, \dots, p_n) = -\text{sgn}(p_2, p_3, \dots, p_n)$. Třetí člen je zase kladný. Takto postupujeme dále s $p_1 = 3, \dots, n$.

Příklad 2.56. Rozviňte následující determinant (a) podle druhého řádku a (b) podle třetího sloupce:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

ŘEŠENÍ: (a) Rozvoj podle druhého řádku dává:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ 5 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -\mathbf{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} + \mathbf{1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} - \mathbf{5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} + \mathbf{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

(b) Rozvoj podle třetího sloupce je výhodný, protože díky $a_{43} = 0$ poslední člen vypadne:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & \mathbf{2} & 6 \\ 2 & 1 & \mathbf{5} & 3 \\ 5 & 2 & \mathbf{3} & 1 \\ 4 & 1 & \mathbf{0} & 4 \end{vmatrix} = \mathbf{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} - \mathbf{5} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} + \mathbf{3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} - \mathbf{0} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Poznámky 2.57.

- (a) Pomocí rozvoje determinantu stupně 4 jsme dostali součet čtyř determinantů třetího stupně, které lze počítat pomocí Sarrusova pravidla, nebo každý znovu rozvést na součet 3 determinantů druhého stupně. V obou případech po dopočítání determinant vyjde stejně.
- (b) Tímto způsobem lze postupně každý determinant stupně n převést na součet n subdeterminantů stupně $n - 1$, každý z nich na $n - 1$ (tj. celkem $n(n - 1)$) subdeterminantů stupně $n - 2$, až se dostaneme na $n \cdot (n - 1) \cdots 4$ subdeterminantů třetího stupně, které lze počítat pomocí Sarrusova pravidla jako součet 6 členů. Celkem tedy sčítáme $n!$ členů, tj. stejně jako při počítání podle definice: počet permutací $P(n)$ je $n!$
- (c) Pro velké n , například $n = 50$ je $50! \doteq 3 \cdot 10^{64}$. Kdybychom uměli sečíst bilion sčítanců za vteřinu, trvalo by to řádově 10^{36} let, tj. mnohem déle než existuje vesmír.

Hodnota determinantu při řádkových úpravách

Pro výpočet „velkých“ determinantů nutno využít jinou metodu. Studujme proto, jak se mění determinant při elementárních řádkových úpravách matice.

Věta 2.58. Při elementárních řádkových úpravách matice \mathbf{A} hodnota determinantu $\det(\mathbf{A})$

- (a) změní znaménko při výměně dvou řádků,
- (b) se vynásobí číslem c pokud jeden řádek vynásobíme číslem c ,
- (c) se nezmění, pokud k danému řádku přičteme násobek jiného řádku.

DŮKAZ. Buď \mathbf{A} čtvercová matice stupně n , označme její řádky $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$. Pro úsporu místa řádky budeme psát za sebou místo pod sebou: $\mathbf{A} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)^T$.

Ze vztahu (2.6) v Definici 2.52 je okamžitě vidět, že vynásobením i -tého řádku číslem c v každém sčítanci se a_{ip_i} nahradí $c \cdot a_{ip_i}$ a celková hodnota determinantu se vynásobí číslem c :

$$\det(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{c} \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_n)^T = \mathbf{c} \cdot \det(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_n)^T.$$

Výměnou dvou řádků se v součtu (2.6) změní znaménko každé permutace a proto determinant změní znaménko, například

$$\det(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_n)^T = -\det(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_n)^T$$

Důsledkem předchozí vlastnosti je skutečnost, že matice s dvěma stejnými řádky má determinant nulový. Skutečně, výměnou těchto řádků se má změnit znaménko determinantu, a přitom se matice nezmění. ovnost $c = -c$ platí jen když $c = 0$. Poto hodnota determinantu je nulová: nechť $\mathbf{r} := \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j$ ($i \neq j$), potom platí

$$\det(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}_n)^T = -\det(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}_n)^T = 0.$$

Přičteme-li k i -tému řádku násobek c násobek k -tého řádku dostaneme dva determinanty:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i + c \mathbf{r}_k, \dots, \mathbf{r}_k, \dots, \mathbf{r}_n)^T &= \\ &= \det(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_k, \dots, \mathbf{r}_n)^T + c \det(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k, \dots, \mathbf{r}_k, \dots, \mathbf{r}_n)^T \end{aligned}$$

první je původní determinant a druhý determinant je nulový, protože má dva stejné řádky.

Poznámky 2.59. Determinant je nulový, pokud obsahuje nulový řádek, nebo má dva stejné řádky, nebo jeden řádek je násobkem druhého. Protože navíc transponováním matice se hodnota determinantu nemění, lze determinant upravovat také pomocí elementárních sloupcových operací:

Věta 2.60. Transponováním matice se hodnota determinantu nemění: $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$.

Při elementárních sloupcových úpravách matice \mathbf{A} hodnota determinantu $\det(\mathbf{A})$

- (a) změní znaménko při záměně dvou sloupců,
- (b) se vynásobí číslem c pokud jeden sloupec vynásobíme číslem c ,
- (c) se nezmění, pokud k danému sloupci přičteme násobek jiného sloupce.

Výpočet determinantu

V případě horní trojúhelníkové matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ se determinant rovná součinu prvků na hlavní diagonále: $\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$. Skutečně, protože v posledním řádku je jediný nenulový prvek a_{nn} , permutace dávající nenulový součin musí končit prvkem $p_n = n$. V předposledním řádku mimo členu v posledním sloupci, je jediný nenulový prvek $a_{n-1,n-1}$, proto jediná permutace, která dává nenulový součin, má $p_{n-1} = n-1$. Tak postupně zjistíme, že jediná permutace, která dává nenulový součin, je permutace identická $\mathbf{p} = (1, 2, \dots, n)$.

Stejně tvrzení platí i pro dolní trojúhelníkovou matici. Protože každou matici lze upravit na horní trojúhelníkovou matici, dostáváme následující návod k výpočtu determinantu:

Věta 2.61. Matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ vhodnými řádkovými nebo sloupcovými úpravami upravíme na **horní trojúhelníkovou matici** \mathbf{A}^* s prvky $a_{11}^*, a_{22}^*, \dots, a_{nn}^*$ na diagonále, přičemž

- při každé úpravě typu (a) (výměně dvou řádků nebo sloupců) **změníme znaménko** a
- při každé úpravě (b) (násobení řádku nebo sloupce $c_i \neq 0$) hodnotu determinantu **násobíme $1/c_i$** .

Potom

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^m \frac{1}{c_1 \cdots c_q} a_{11}^* a_{22}^* \cdots a_{nn}^*,$$

kde m je počet záměn dvojic řádků nebo sloupců a c_i jsou konstanty z úprav typu (b).

Příklad 2.62. Vypočítejte determinant matice \mathbf{A} metodami: (a) pomocí Sarrusova pravidla, (b) převodem na trojúhelníkovou matici, (c) rozvojem podle druhého řádku. Matice \mathbf{A} je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \\ -5 & 4 & -9 \end{pmatrix}.$$

ŘEŠENÍ:

(a) Podle Sarrusova pravidla je (za matici \mathbf{A} jsme si připsali první dva sloupce)

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= [2 \cdot 6 \cdot (-9) + (-3)(-7)(-5) + 8 \cdot 4 \cdot 4] - [8 \cdot 6 \cdot (-5) + (-3)4(-9) + 2(-7)4] = \\ &= (-108 - 105 + 128) - (-240 + 108 - 56) = -85 + 188 = 103. \end{aligned}$$

(b) Převodem na trojúhelníkovou matici pomocí řádkových úprav:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \\ -5 & 4 & -9 \end{vmatrix} \xrightarrow[-\frac{5}{2}\mathbf{r}_1]{-\frac{1}{2}\mathbf{r}_1} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 0 & 12 & -23 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow{+\frac{7}{24}\mathbf{r}_2} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 0 & 12 & -23 \\ 0 & 0 & \frac{103}{24} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{24}(2 \cdot 12 \cdot 103) = 103. \end{aligned}$$

(c) Podle Laplaceovy věty 2.55 platí

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \\ -5 & 4 & -9 \end{vmatrix} = (-4) \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -5 & -9 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= (-4)(27 - 32) + 6(-18 + 40) + 7(8 - 15) = 20 + 132 - 49 = 103. \end{aligned}$$

Poznámky. Srovnáním metod použitých v předchozím případě vychází Sarrusovo pravidlo jako nejrychlejší. V případě determinantů z velkých matic však vyjde metoda převodu na trojúhelníkovou matici jako jediná možná: při převodu matice stupně n na trojúhelníkovou potřebujeme řádově n^3 operací. Při $n = 50$ to vychází na $125\,000 = 1.25 \cdot 10^5$, což je proti $50! \doteq 3 \cdot 10^{64}$ podstatně méně.

Řešení soustav lineárních rovnic pomocí determinantů

Determinanty lze využít i při řešení soustav lineárních rovnic ve speciálním případě, kdy je matice soustavy \mathbf{A} čtvercová, tj. rovnic je stejný počet jako neznámých, a determinant z matice \mathbf{A} je nenulový, tj. $|\mathbf{A}| \neq 0$. K určení řešení nám poslouží následující tzv. Cramerovo pravidlo:

Věta 2.63. (Cramerovo pravidlo) Nechť je dána soustava n lineárních rovnic o n neznámých $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, jejíž matice soustavy \mathbf{A} má nenulový determinant $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Potom soustava má jediné řešení (x_1, x_2, \dots, x_n) , přičemž

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|}, \quad x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|}, \quad \dots \quad x_n = \frac{|\mathbf{A}_n|}{|\mathbf{A}|},$$

kde matice \mathbf{A}_j vznikla z matice \mathbf{A} nahrazením j -tého sloupce \mathbf{s}_j sloupcem pravých stran \mathbf{b} :

$$|\mathbf{A}_1| = |\mathbf{b}, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \dots, \mathbf{s}_n|, \quad |\mathbf{A}_2| = |\mathbf{s}_1, \mathbf{b}, \mathbf{s}_3, \dots, \mathbf{s}_n|, \quad \dots, \quad |\mathbf{A}_n| = |\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \dots, \mathbf{b}|.$$

Poznámky.

Cramerovo pravidlo má spíše teoretický význam, protože pro „větší“ n je výpočet determinantů numericky značně náročný. Na druhou stranu však metoda dává vzorec pro přímý výpočet jednotlivých neznámých, což může být někdy výhodné. Například v případě $n = 2$ a $|\mathbf{A}| \neq 0$ řešení soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je dáno vzorci

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}.$$

Příklad 2.64. Cramerovým pravidlem určete řešení soustavy

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \end{aligned}$$

ŘEŠENÍ: Spočítáme nejprve determinant matice soustavy, který určí, zda soustava má řešení. Pomocí Sarrusova pravidla dostáváme

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - (-3) \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 = 12 \neq 0,$$

a proto matice \mathbf{A} je regulární, tj. řešení existuje a je jediné.

Spočtěme si determinanty matic, ve kterých sloupec pravých stran postupně nahrazuje sloupec koeficientů:

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 12 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) \cdot 12 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 12 - (-3) \cdot 3 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) \cdot 1 = 24,$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 36, \quad |\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 60.$$

Po Cramerova pravidla tedy

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|} = \frac{24}{12} = 2, \quad x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|} = \frac{36}{12} = 3, \quad x_3 = \frac{|\mathbf{A}_3|}{|\mathbf{A}|} = \frac{60}{12} = 5.$$

Soustava má právě jedno řešení $\mathbf{x} = (2, 3, 5)^T$.

2E. ČTVERCOVÉ MATICE

Čtvercové matice stejného stupně n mají zvláštní postavení mezi maticemi: lze je jako čísla nejen navzájem sčítat, ale i násobit bez omezení. U čísel číslo 1 hraje roli neutrálního prvku: pro každé číslo $x \in X$ platí $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$. U čtvercových matic stejnou roli hraje jednotková matice \mathbf{E} : pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Inverzní operací k operaci násobení čísel je dělení čísel, dělit však můžeme jen číslem nenulovým. Pro každé nenulové číslo a existuje číslo b zvané převrácená hodnota takové, že $a \cdot b = b \cdot a = 1$. Značíme ho $\frac{1}{a}$ nebo a^{-1} . Je to vlastně řešením rovnice $a \cdot b = 1$.

U čtvercových matic analogicky zavedeme tzv. inverzní matici:

Definice 2.65. Buď \mathbf{A} čtvercová matice typu $n \times n$. Čtvercová matice \mathbf{B} typu $n \times n$ se nazývá maticí **inverzní** k matici \mathbf{A} , jestliže

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}. \quad (2.9)$$

Matici inverzní k matici \mathbf{A} značíme \mathbf{A}^{-1} .

Na první pohled není z uvedené definice zřejmé, zda matice \mathbf{B} inverzní k \mathbf{A} existuje vždy, zda je určena jednoznačně, a jak tuto matici vypočítat. K formulaci odpovědi nám pomůže teorie determinantů.

Věta 2.66. Buďte \mathbf{A}, \mathbf{B} matice stejného stupně. Potom platí:

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}).$$

Protože determinant jednotkové matice \mathbf{E} je roven 1, z podmínky (2.9) $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{E}) = 1$ plyne, že jak $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, tak $\det(\mathbf{B}) \neq 0$. Ukáže se, že je to i podmínka postačující. Tyto matice nazveme regulární:

Definice 2.67. Matici \mathbf{A} nazveme **regulární** jestliže $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Tuto důležitou vlastnost lze definovat i pomocí dalších podmínek:

Věta 2.68. Buď $\mathbf{A} = (a_{ij})$ stupně n . Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (a) Matice \mathbf{A} je **regulární**, tj. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
- (b) Matice \mathbf{A} má **největší možnou hodnotu** $h(\mathbf{A}) = n$.
- (c) Matice \mathbf{A} má **nezávislé řádky**.
- (d) Matice \mathbf{A} má **nezávislé sloupce**.

Co znamená podmínka $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}$? Označme \mathbf{b}_j j -tý sloupec matice \mathbf{B} a \mathbf{e}_j j -tý sloupec jednotkové matice \mathbf{E} mající jedničku na j -tém místě, ostatní nuly. Potom rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}$ představuje n soustav rovnic pro jednotlivé neznámé \mathbf{b}_j s pravými stranami \mathbf{e}_j :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_n = \mathbf{e}_n.$$

Matice soustavy ve všech případech je matice \mathbf{A} , a proto podle Frobeniovy věty pokud hodnota matice \mathbf{A} je maximální, tj. $h(\mathbf{A}) = n$, každá soustava má právě jedno řešení \mathbf{b}_j , které tvoří inverzní matici $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Dospěli jsme tak k větě:

Věta 2.69. Ke každé regulární matici \mathbf{A} existuje právě jedna matice inverzní \mathbf{A}^{-1} .

Předchozí úvaha také dává způsob výpočtu inverzní matice. Protože všechny soustavy mají stejnou matici soustavy, zapíšeme je do jedné soustavy s n vektory pravých stran \mathbf{e}_j a n vektory neznámých \mathbf{b}_j :

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \quad \text{tj. maticově} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}.$$

Výpočet potom probíhá tak, že rozšířenou matici $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ typu $n \times n + n$ převedeme postupně řádkovými úpravami (tzv. Jordanovou eliminací) na tvar, kdy vlevo na místě matice \mathbf{A} vznikne matice jednotková. Přitom vpravo na místě matice \mathbf{E} vznikne matice inverzní \mathbf{B} , schématicky

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) \sim \text{řádkové úpravy} \sim (\mathbf{E}|\mathbf{B}) = (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}).$$

Příklad 2.70. Vypočtěte inverzní matici \mathbf{A}^{-1} k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

ŘEŠENÍ: Rozšířenou matici $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ postupně upravujeme řádkovými úpravami:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}|\mathbf{E}) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} / -2\mathbf{r}_3 \\ / -\mathbf{r}_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} / -3\mathbf{r}_2 \\ / +2\mathbf{r}_2 \end{array} \sim \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -5 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} / +\frac{2}{5}\mathbf{r}_1 \\ / +\frac{4}{5}\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -5 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Druhá matice je hledaná inverzní matice:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

□

Adjungovaná matice

Ukažme si ještě jeden způsob výpočtu inverzní matice založený na pojmu adjungovaná matice:

Definice 2.71. Buď $\mathbf{A} = (a_{ij})$ čtvercová matice stupně n .

Označme \mathbf{A}_{ij} matici vzniklou z matice \mathbf{A} vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce.

Algebraickým doplňkem prvku a_{ij} nazveme číslo

$$d_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij}),$$

kde matice \mathbf{A}_{ij} vznikla z matice \mathbf{A} vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce.

Transponovanou matici algebraických doplňků nazveme **adjungovanou maticí** k matici \mathbf{A} a označíme:

$$\mathbf{A}^* = (d_{ij})^T.$$

Z definice je plyne, že ke každé matici lze sestavit matici adjungovanou. Z následující vlastnosti je vidět, že adjungovaná matice má podobnou vlastnost jako matice inverzní a lze ji využít k výpočtu inverzní matice:

Věta 2.72. Ke každé čtvercové matici \mathbf{A} **existuje matice adjungovaná \mathbf{A}^*** a platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{E}. \quad (2.11)$$

V případě, že $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, dostáváme vztah pro **výpočet inverzní matice**:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \mathbf{A}^* \quad (2.12)$$

DŮKAZ. Naznačme důkaz rovnosti (2.11), která je podstatou výpočtu inverzní matice. Mějme matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Prvky adjungované matice \mathbf{A}^* označme a_{ij}^* . Algebraický doplněk prvku a_{ij} značíme $d_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij})$, kde \mathbf{A}_{ij} je matice \mathbf{A} bez i -tého řádku a j -tého sloupce. Proto platí $a_{ji}^* = d_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij})$.

Uvažujme součin $\mathbf{B} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*$. Prvek b_{ij} součinu \mathbf{B} je

$$b_{ij} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}^* = \sum_{k=1}^n a_{ik} d_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{i+k} \det(\mathbf{A}_{jk}).$$

V případě $j = i$ podle Laplaceovy věty 2.55 je b_{ij} rovno rozvoji determinantu matice \mathbf{A} podle $i = j$ -tého řádku (2.7), tj. pro $i = j$ máme $b_{ij} = \det(\mathbf{A})$. V případě $j \neq i$ je to rozvoj determinantu matice, ve kterém je místo řádku \mathbf{r}_j řádek \mathbf{r}_i , protože matice \mathbf{A}_{jk} mají vynechaný j -tý řádek, místo něho mají řádek i -tý. Jde tedy o rozvoj determinantu s dvěma stejnými řádky, determinant je proto nulový. Dostáváme tak $b_{ij} = 0$ pro $j \neq i$. Matice \mathbf{B} je tedy jednotková. Druhou rovnost $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$ lze dokázat rozvojem determinantu podle sloupce.

Příklad 2.73. Určete adjungovanou matici \mathbf{A}^* a inverzní matici \mathbf{A}^{-1} k matici z Příkladu 2.70

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

ŘEŠENÍ: Adjungovanou matici podle (2.11) dostaneme transponováním matice algebraických doplňků:

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Před výpočtem matice inverzní nejprve spočítáme determinant matice \mathbf{A} . Libovolná metoda výpočtu dává $\det(\mathbf{A}) = -5$. Matice \mathbf{A} je tedy regulární a podle Věty 2.69 existuje k matici \mathbf{A} matice inverzní. Pomocí (2.12) dostáváme

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \mathbf{A}^* = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Dospěli jsme k matici stejné jako při výpočtu řádkovými úpravami v Příkladu 2.69.

Poznámky. Kterou metodou budeme počítat inverzní matice z „velké“ matice? K výpočtu adjungované matice stupně n potřebujeme spočítat n^2 determinantů stupně $n-1$. Vzhledem k náročnosti výpočtu determinantů velké matice, inverzní matice k velké matici lze počítat jedinečně pomocí řádkových úprav matice $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$.

Maticové rovnice

Podobně jako číselné rovnice např. $a \cdot x = b$ máme i maticové rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, za předpokladu že matice mají takové typy, že dané operace a rovnosti jsou definované – mají „smysl“. Při řešení těchto rovnic opět budeme využívat úpravy, které nemění množinu všech řešení rovnice:

Věta 2.74. Ekvivalentní úpravy maticových rovnic V následujícím budeme předpokládat, že typy matic jsou takové, že operace sčítání, násobení i relace rovnosti jsou definované.

Potom při následujících úpravách se množina všech řešení maticové rovnice nemění:

- (a) Přičtením stejné matice k oběma stranám rovnice.
- (b) Násobením obou stran rovnice stejným nenulovým číslem.
- (c) Násobením obou stran rovnice stejnou regulární maticí zleva.
- (d) Násobením obou stran rovnice stejnou regulární maticí zprava.

Pozor, násobení není komutativní, nelze měnit pořadí matic v součinu!

Při řešení lze využívat také vlastnosti inverzní matice:

Věta 2.75. Pro regulární matice \mathbf{A}, \mathbf{B} platí:

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}, \quad (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T.$$

Příklad 2.76. Soustava lineárních rovnic. Pomocí inverzní matice lze vyjádřit i řešení soustavy n lineárních rovnic pro n neznámých

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

ŘEŠENÍ: Za předpokladu, že matice soustavy \mathbf{A} je regulární, existuje matice inverzní \mathbf{A}^{-1} . Vynásobením obou stran rovnice zleva maticí \mathbf{A}^{-1} dostáváme

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

Protože $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ dostáváme výsledek

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}.$$

□

Příklad 2.77. Řešte rovnice s neznámou maticí \mathbf{X} :

- (a) $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$,
- (b) $\mathbf{X} \mathbf{A} = \mathbf{B}$,
- (c) $\mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{D}$,
- (d) $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{X} \mathbf{B}^T = \mathbf{C}$.

Za jakých předpokladů pro matice řešení existuje?

ŘEŠENÍ: Předpokládáme, že matice jsou typu $n \times n$. Pokud matice \mathbf{A} je regulární, existuje inverzní matice \mathbf{A}^{-1} :

- (a) První rovnici vynásobíme maticí \mathbf{A}^{-1} **zleva** a dostáváme $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$.
- (b) Druhou rovnici násobíme maticí \mathbf{A}^{-1} **zprava** a dostáváme $\mathbf{X} = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1}$.
- (c) Pokud navíc \mathbf{B} je regulární, po odečtení matice \mathbf{C} rovnici (c) násobíme inverzní maticí \mathbf{A}^{-1} **zleva** a inverzní maticí \mathbf{B}^{-1} **zprava**. Dostáváme tak řešení $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{C}) \mathbf{B}^{-1}$.
- (d) Pokud navíc \mathbf{B} je regulární, rovnici (d) násobíme maticí \mathbf{A} **zleva** a maticí $(\mathbf{B}^T)^{-1}$ **zprava**. Dostáváme tak řešení $\mathbf{X} = \mathbf{A} \mathbf{C} (\mathbf{B}^T)^{-1}$.