Analytická geometrie

1. Příklad Vypočtěte vnitřní úhly trojúhelníka ABC, kde $A = [2, -1, 3]$, $B = [1, 1, 1]$, $C = [0, 0, 5]$.

Výsledek: $\alpha = 90°$, $\beta = \gamma = 45°C$.

2. Příklad Nechť $A = [-1, 2, 3]$, $B = [1, 1, 1]$, $C = [0, 0, a]$. Určete a tak, aby $\vec{AB} \perp \vec{AC}$.

Výsledek: $a = 5$.

3. Příklad Určete vzdálenost bodu $M = [2, -1, 3]$ od přímky AB, kde $A = [-1, -2, 1]$, $B = [2, 2, 6]$.

Výsledek: $\frac{3}{10}\sqrt{38}$.

4. Příklad Bodem $P = [2, 3, 2]$ veďte kolmici k přímce $\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3}$.

Výsledek: $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-2}{1}$.

5. Příklad Určete rovnici roviny procházející rovnoběžkami $\frac{x-4}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$, $\frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-5}{1}$.

Výsledek: $x - 2y - 2z - 2 = 0$.

6. Příklad Určete kolmý průmět bodu $P = [2, 3, 2]$ na přímku $x = -3 + 2t, y = -6 + t, z = -1 + 3t$.

Výsledek: $[1, -4, 5]$.

7. Příklad Určete obecnou rovnici roviny procházející body $A = [1, -1, 2]$, $B = [2, 1, 2]$, $C = [1, 1, 4]$.

Výsledek: $2x - y + z - 5 = 0$.

8. Příklad Určete obecnou rovnici roviny α, která je dána body $A[5, -1, 0]$, $B = [1, 2, 5]$, $C = [-3, -2, 8]$.

Výsledek: $\alpha : 29x - 8y + 28z - 153 = 0$

9. Příklad Jsou dány body $A = [5, 1, -2]$ a $B = [3, -3, 3]$. Bodem A veďte rovinu ϱ, která bude kolmá k vektoru $\overrightarrow{AB}$.

Výsledek: $\varrho : \cancel{2x + 4y - 5z + 24 = 0}$

10. Příklad Bodem $A = [2, 1, -1]$ veďte rovinu kolmou k vektoru $\vec{v} = (1, -2, 3)$.

Výsledek: $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

11. Příklad Bodem $P[1, 2, 0]$ veďte rovinu β kolmou k přímce p dané parametricky $x = 3 + t$, $y = 2 - 2t$, $z = -5 + 6t, t \in \mathbb{R}$.

Výsledek: $\beta : x - 2y + 6z + 3 = 0$

12. Příklad Převeďte rovnici roviny na parametrický tvar:
a) $3x - 2y + 6z - 14 = 0$;
b) $z + 1 = 0$.

Výsledek: a) $x = \frac{14}{3} + \frac{2}{3}u - 2v, y = u, z = v$, b) $x = u, y = v, z = -1$.

13. Příklad Najděte úhel dvou rovin $x - y + \sqrt{2}z + 2 = 0$, $x + y + \sqrt{2}z - 3 = 0$.

Výsledek: $60°C$.

14. Příklad Dokažte, že následující roviny α a β jsou rovnoběžné a určete jejich vzdálenost.
$\alpha :\ 30x - 32y + 24z - 75 = 0$, $\beta : 15x - 16y + 12z - 25 = 0$.

Výsledek: $\frac{1}{2}$.

15. Příklad Napište parametrickou rovnici i obecnou rovnici osy z.

Výsledek: Par. rovnice: $x = 0, y = 0, z = t$, obecná rovnice: $x = 0, y = 0$.

16. Příklad Převeďte obecné rovnice $x+4y+4z-7=0$, $4x+4y+5z-11=0$ přímky na parametrické rovnice.

Výsledek: $x = 4t, y = -\frac{9}{4} + 11t, z = 4 - 12t$.

17. Příklad Napište parametrické rovnice přímky procházející bodem $M = [4, -5, 7]$ rovnoběžně s přímkou $x = 3 - t, y = 2 + 2t, z = 3$.

Výsledek: $x = 4 - t, y = -5 + 2t, z = 7$.

18. Příklad Zjistěte vzájemnou polohu přímek $x = 2 + t, y = 1 - 2t, z = 5 + 3t$ a $x = 4$, $y = 2 - 5t$, $z = 11t$.

Výsledek: Jde o různoběžky, průsečík je $[4, -3, 11]$.

19. Příklad Určete úhel přímek $x = -3 + t, y = -3 + 2t, z = 4 - 2t$ a $9x + 2y + 2z - 11 = 0$, $6x - y + 6z + 8 = 0$.

Výsledek: $\cos\varphi = \frac{4}{21}$.

20. Příklad Jsou dány přímky p, q. Určete úhel, který svírají. p je dána parametrickými rovnicemi $x = 3 - t, y = 4 + 2t, z = t, t \in \mathbb{R}$ a přímka q je dána jako průsečnice dvou rovin $2x - 3y + z - 1 = 0$, $5x + 2y - z - 10 = 0$.

Výsledek: $\cos\varphi = \frac{32}{\sqrt{6}\sqrt{411}} \doteq 0,6443$, tedy $\varphi \doteq 49°52'$

21. Příklad Určete průsečík přímky $x = -1 + 2t, y = 2 + t, z = 1 - t$ s rovinou $3x - 2y + z - 3 = 0$.

Výsledek: $[5, 5, -2]$.

22. Příklad Určete rovinu procházející přímkou $p: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+1}{2}$ rovnoběžně s přímkou $q: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{1}$.

Výsledek: $3x - y - z - 2 = 0$.

23. Příklad Určete úhel přímky $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+5}{-1}$ s rovinou $4x - y + z + 24 = 0$.

Výsledek: $45°$.

24. Příklad Určete rovnici kolmice z bodu $A = [4, 1, 2]$ na přímku $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$.

Výsledek: $\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

25. Příklad Určete rovnici přímky procházející bodem $[-6, 3, 4]$ rovnoběžně s přímkou $x-2y-3z+7=0$, $4x + 5y - z - 9 = 0$.

Výsledek: $\frac{x+6}{17} = \frac{y-3}{-11} = \frac{z-4}{13}$.

26. Příklad Určete úhel přímek p a q, které jsou zadány obecnými rovnicemi takto: $p:\ x-y-2z-1=0$, $x - y + z + 1 = 0$, $q:\ 2x - y - z - 1 = 0$, $2x + y + z - 1 = 0$.

Výsledek: $60°$.

27. Příklad Určete kolmý průmět bodu $[8, 2, 1]$ do roviny $3x - 4y + z + 9 = 0$.

Výsledek: $[5, 6, 0]$.

28. Příklad Určete kolmý průmět přímky $a: 2x+2y-3z=0, x-3y-2z+5=0$ do roviny $\beta: 3x+y+2z+3=0$.

Výsledek: Kolmým průmětem je přímka $m: \frac{x+1}{5}=\frac{y}{-17}=\frac{z}{1}$.
Pozn.: Hledanou přímku m je také možno vyjádřit jako průsečnici zadané roviny β a roviny α, která obsahuje přímku a a je k rovině β kolmá. Potom $m: 3x+y+2z+3=0, 5x+y-8z+5=0$.

29. Příklad Určete obsah trojúhelníka ABC, kde $A=[3,3,4]$, $B=[3,5,4]$, $C=[4,5,3]$.

Výsledek: $\sqrt{2}$.

30. Příklad Určete rovnici roviny procházející bodem $[0,3,2]$ a přímkou $x+y-z+1=0, x-2y-z+5=0$.

Výsledek: $5x-y-5z+13=0$.

31. Příklad Vypočtěte vzdálenost dvou rovnoběžných přímek $p: x=2t-2, y=t+2, z=t+1$ a $q: x=2t-2, y=t+3, z=t+2$.

Výsledek: $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

32. Příklad Určete vzdálenost bodu $[2,3,5]$ od přímky $\frac{x-2}{9}=\frac{y+5}{5}=\frac{z-3}{1}$.

Výsledek: $\cancel{\sqrt{\frac{5514}{107}}}$. $\sqrt{\frac{5512}{107}}$

33. Příklad Nalezněte rovnici roviny, která kolmo promítá zadanou přímku $p: 7x-2y+5z-10=0$, $3x+y+2z-6=0$ do souřadné roviny xy.

Výsledek: $x+9y-10=0$.

34. Příklad Napište parametrické rovnice i obecnou rovnici roviny xy.

Výsledek: Par. rovnice: $x=u, y=v, z=0$, obec. rovnice: $z=0$.

35. Příklad Počátkem souřadnic veďte rovinu rovnoběžně s různoběžkami $a: \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-1}$ a $b: \frac{x}{4}=\frac{y}{-8}=\frac{z-1}{12}$.

Výsledek: $-x+y+z=0$.

36. Příklad Určete vzdálenost bodu $[2,-1,3]$ od přímky AB, kde $A=[-1,-2,1]$, $B=[2,2,6]$.

Výsledek: $\frac{3}{10}\sqrt{38}$.

37. Příklad Určete rovnici přímky k, která prochází bodem $A=[1,2,3]$ a je kolmá k přímce p dané parametricky $x=2+4t, y=-1+t, z=1+2t, t\in\mathbb{R}$. Přímky k a p jsou různoběžné.

Výsledek: Rovina α, která prochází bodem A kolmo k přímce p má rovnici $\alpha: 4x+y+2z-12=0$. Průsečík $P=p\cap\alpha$ vychází pro parametr $t=\frac{1}{7}$ a $P=\left[\frac{18}{7},-\frac{6}{7},\frac{9}{7}\right]$. Přímka k je dána bodem A a směrovým vektorem $\overrightarrow{AP}=\left(\frac{11}{7},-\frac{20}{7},-\frac{12}{7}\right)$. Přímka k má potom parametrické vyjádření $x=1+\frac{11}{7}t$, $y=2-\frac{20}{7}t$, $z=3-\frac{12}{7}t$, kde $t\in\mathbb{R}$. Pozn.: Směrový vektor přímky k je možno vynásobit například číslem 7 a pro parametrické vyjádření pak použít vektor s celočíselnými souřadnicemi.

38. Příklad Je dán čtyřstěn $ABCD$, kde $A=[1,2,1]$, $B=[0,5,7]$, $C=[3,-1,-1]$, $D=[0,6,5]$. Určete průsečík výšky jehlanu, která prochází bodem D s podstavou ABC.

Výsledek: Výška v (pro $D\in v$) vychází $x=12t, y=6+10t, z=5-3t, t\in\mathbb{R}$. Rovina podstavy ABC má rovnici $\alpha: 12x+10y-3z-29=0$. Pro hledaný průsečík P vychází parametr $t=-\frac{16}{253}$. $P=\left[-\frac{192}{253},\frac{1358}{253},\frac{1313}{253}\right]$.