Neurčitý integrál

20. srpna 2007

- 1. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

- 2. $\int (x^2 + 2x + 17)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

- 3. $\int \frac{1}{x^3 - x}\,\mathrm{d}x$

Vypočtěte integrál:

$$\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Příklad 1.

Řešení: Použijeme substituci:

$$\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} \operatorname{arctg} x = t \\ \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x = (x^2+1)\,\mathrm{d}t \end{array}\right]$$

Tato substituce je výhodná, protože se po dosazení za $\mathrm{d}x$ vykrátí jmenovatel.

Příklad 1.

Řešení: Použijeme substituci:

$$\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} = \left[\begin{array}{c} \operatorname{arctg} x = t \\ \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x = (x^2+1)\,\mathrm{d}t \end{array}\right] = \int \sqrt[3]{t}\,\mathrm{d}t$$

Dosadili jsme za $\mathrm{d}x$ ze substituční rovnice

Příklad 1.

Řešení: Použijeme substituci:

$$\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} = \left[\begin{array}{c} \operatorname{arctg} x = t \\ \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x = (x^2+1)\,\mathrm{d}t \end{array}\right] = \int \sqrt[3]{t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}t^{4/3} + C$$

Určili jsme primitivní funkci podle vzorce pro integraci x^n

Příklad 1.

Řešení: Použijeme substituci:

$$\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} = \left[\begin{array}{c} \operatorname{arctg} x = t \\ \\ \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \\ \mathrm{d}x = (x^2+1)\,\mathrm{d}t \end{array} \right] = \int \sqrt[3]{t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4} t^{4/3} + C =$$

$$\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\operatorname{arctg} x)^4} + C$$

Místo t jsme dosadili zpět $\operatorname{arctg} x$ ze substituční rovnice.

Příklad 2. Vypočtěte integrál:

$$\int (x^2 + 2x + 17)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$

Příklad 2.

Řešení: Použijeme metodu per partes:

$$\int (x^2 + 2x + 17)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{cc} u = x^2 + 2x + 17 & u' = 2x + 2 \\ v = \mathrm{e}^x & v' = \mathrm{e}^x \end{array} \right]$$

Volíme u a v' tak, aby se u derivováním zjednodušilo a v' šlo integrovat.

Příklad 2.

Řešení: Použijeme metodu per partes:

$$\int (x^2+2x+17)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{cc} u = x^2+2x+17 & u' = 2x+2 \\ v = \mathrm{e}^x & v' = \mathrm{e}^x \end{array}\right] =$$

$$= (x^2+2x+17)\mathrm{e}^x - \int (2x+2)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

Použili jsme vzorec pro per partes.

Příklad 2.

Řešení: Použijeme metodu per partes:

$$\int (x^2 + 2x + 17)\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x =$$

$$= (x^2 + 2x + 17)\mathrm{e}^x - \int (2x + 2)\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = 2x + 2 & u' = 2 \\ v = \mathrm{e}^x & v' = \mathrm{e}^x \end{bmatrix}$$

Na vzniklý integrál opět použijeme per partes stejným způsobem jako dříve.

Příklad 2.

Řešení: Použijeme metodu per partes:

$$\int (x^2 + 2x + 17)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x =$$

$$= (x^2+2x+17)\mathrm{e}^x - \int (2x+2)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = 2x+2 & u' = 2 \\ v = \mathrm{e}^x & v' = \mathrm{e}^x \end{bmatrix} =$$

$$= (x^2 + 2x + 17)\mathrm{e}^x - \left((2x+2)\mathrm{e}^x - \int 2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x\right)$$

Na vzniklý integrál opět použijeme per partes stejným způsobem jako dříve.

Příklad 2.

Řešení: Použijeme metodu per partes:

$$\int (x^2 + 2x + 17)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x =$$
$$= (x^2 + 2x + 17)\mathrm{e}^x - \int (2x + 2)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x =$$
$$= (x^2 + 2x + 17)\mathrm{e}^x - \Big((2x + 2)\mathrm{e}^x - \int 2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x\Big) =$$
$$= (x^2 + 2x + 17)\mathrm{e}^x - (2x + 2)\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + C$$

Našli jsme primitivní funkci, u e^x je to obzvlášť jednoduché.

Příklad 2.

Řešení: Použijeme metodu per partes:

$$
\begin{aligned}
&\int (x^2 + 2x + 17)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \\
&= (x^2 + 2x + 17)\mathrm{e}^x - \int (2x + 2)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \\
&= (x^2 + 2x + 17)\mathrm{e}^x - \Big((2x + 2)\mathrm{e}^x - \int 2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x\Big) = \\
&= (x^2 + 2x + 17)\mathrm{e}^x - (2x + 2)\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + C = \\
&= (x^2 + 17)\mathrm{e}^x + C
\end{aligned}
$$

Laskavý čtenář nechť si výsledek zderivuje a porovná se zadanou funkcí v integrálu.

Příklad 3. Vypočtěte integrál:

$$\int \frac{1}{x^3 - x} \, \mathrm{d}x$$

Příklad 3. $\int \frac{1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme rozklad na parciální zlomky:

$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{(x-1)(x+1)x}$

Nejprve je třeba rozložit jmenovatele na součin kořenových činitelů.

Příklad 3. $\int \frac{1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{(x-1)(x+1)x} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x}$$

Použili jsme pravidla pro sestavení parciálních zlomků na základě počtu a násobnosti kořenů.

Příklad 3. $\int \frac{1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{(x-1)(x+1)x} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x} =$$
$$= \frac{Ax^2+Ax+Bx^2-Bx+Cx^2-C}{x^3-x}$$

Parciální zlomky jsme převedli na společného jmenovatele. Nyní budeme porovnávat koeficienty v čitatelích prvního a posledního zlomku.

Příklad 3. $\int \frac{1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme rozklad na parciální zlomky:

$\frac{0x^2+0x+1}{x^3-x} = \frac{Ax^2+Ax+Bx^2-Bx+Cx^2-C}{x^3-x}$

$$A + B + C = 0$$

Porovnáváme koeficienty u x^2.

Příklad 3. $\int \frac{1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme rozklad na parciální zlomky:

$\frac{0x^2+0x+1}{x^3-x} = \frac{Ax^2+Ax+Bx^2-Bx+Cx^2-C}{x^3-x}$

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ A-B &= 0 \end{aligned}$$

Porovnáváme koeficienty u x.

Příklad 3. $\int \frac{1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme rozklad na parciální zlomky:

$\frac{0x^2+0x+1}{x^3-x} = \frac{Ax^2+Ax+Bx^2-Bx+Cx^2-C}{x^3-x}$

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ A-B &= 0 \\ -C &= 1 \end{aligned}$$

Porovnáváme koeficienty u konstantních členů.

Příklad 3. $\int \frac{1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme rozklad na parciální zlomky:

$\frac{0x^2+0x+1}{x^3-x} = \frac{Ax^2+Ax+Bx^2-Bx+Cx^2-C}{x^3-x}$

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ A-B &= 0 \Rightarrow A=B \\ -C &= 1 \Rightarrow C=-1 \Rightarrow A+B=1 \Rightarrow A=B=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Řešíme systém tří lineárních rovnic o třech neznámých.

Na tomto slajdu je C=-1,
ale na následujících slajdech je nesprávn používáno +1

Příklad 3. $\int \frac{1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Rozklad na parciální zlomky tedy je:

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1} + \frac{1}{x}$$

Příklad 3. $\int \frac{1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Integrál se tedy rozloží:

$$\int \frac{1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1/2}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1/2}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Podle věty o integraci součtu.

Příklad 3. $\int \frac{1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Integrál se tedy rozloží:

$$\int \frac{1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1/2}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1/2}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \ln|x| + C$$

Určili jsme primitivní funkce.