

Parciální derivace, gradient a směrová derivace

1. Příklad Spočítejte rychle všechny první parciální derivace triviálních funkcí:

- a) $f(x, y, z) = x^{(y^z)};$
- b) $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}} + x^y;$
- c) $f(x, y, z) = \sqrt{xy}(3x + 3z)^{\sqrt{yz}};$
- d) $f(x, y, z) = (3x + 2z)^{\ln z};$
- e) $f(x, y, z) = ze^{x^3 \ln \cos(x-y^2)}.$

2. Příklad Nalezněte bez váhání všechny první parciální derivace funkce f v bodě A :

- a) $f = \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}, A = [1, 1];$ *Výsledek:* $f'_x = -\sqrt{2}, f'_y = \sqrt{2}.$
- b) $f = \arcsin \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, A = [1, 0];$ *Výsledek:* $f'_x = 0, f'_y = -\sqrt{2}.$
- c) $f = (1 + \log_y x)^3, A = [e, e];$ *Výsledek:* $f'_x = \frac{12}{e}, f'_y = -\frac{12}{e}.$
- d) $f = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}, A = [1, 1];$ *Výsledek:* $f'_x = \frac{1}{4}, f'_y = 0.$

3. Příklad Okamžitě spočítejte všechny parciální derivace druhého řádu funkce f v bodě A :

- a) $f = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}), A = [1, 0];$ *Výsledek:* $-1, \frac{1}{4}, 0.$
- b) $f = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, A = [0, 1];$ *Výsledek:* $0, -\frac{1}{2}, 0.$
- c) $f = e^{xe^y}, A = [0, 0];$ *Výsledek:* $1, 0, 1.$

4. Příklad Jsou dány funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$. Nalezněte úhel gradientů těchto funkcí v bodě $[3, 4]$.
Výsledek: $\cos \alpha = -0.199, \alpha = 101^\circ 30'.$

5. Příklad Nalezněte bod, ve kterém gradient funkce $z = \ln(x + \frac{1}{y})$ je roven vektoru $(1, -\frac{16}{9})$.
Výsledek: $[-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}], [\frac{7}{3}, -\frac{3}{4}].$

6. Příklad Nalezněte body, ve kterých se velikost gradientu funkce $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ rovná 2.
Výsledek: Body ležící na kružnici $x^2 + y^2 = \frac{2}{3}.$

7. Příklad Určete úhel mezi gradienty funkce $z = \ln \frac{y}{x}$ v bodech $A = [\frac{1}{2}, \frac{1}{4}], B = [1, 1]$.
Výsledek: $\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}.$

8. Příklad Určete úhel mezi gradienty funkce $u = x^2 + y^2 + z^2$ v bodech $A = [a, 0, 0], B = [0, a, 0]$.
Výsledek: $\frac{\pi}{2}.$

9. Příklad Určete směrovou derivaci funkce $f = e^{x^2+y^2}$ v bodě $[1, 1]$ ve směru vektoru $(2, 1)$.
Výsledek: $6e^2.$

10. Příklad Určete směrovou derivaci funkce $f = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ v bodě $M = [1, 2]$ ve směru vektoru, který jde z bodu M do bodu $N = [4, 6]$.
Výsledek: 5.

11. Příklad Určete derivaci funkce $f = 3x^4 + xy + y^3$ v bodě $M = [1, 2]$ ve směru jednotkového vektoru, který svírá s kladným směrem osy x úhel 135° .
Výsledek: $-\frac{1}{\sqrt{2}}.$

12. Příklad Určete derivaci funkce $f = \ln(x + y)$ v bodě $[1, 2]$ ležícím na parabole $y^2 = 4x$ ve směru jednotkového vektoru tečny k parabole v tomto bodě.
Výsledek: $\frac{\sqrt{2}}{3}.$

13. Příklad Určete derivaci funkce $f = \operatorname{arctg}(xy)$ v bodě $[1, 1]$ ve směru jednotkového vektoru osy prvního kvadrantu. *Výsledek:* $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

14. Příklad Určete derivaci funkce $f = \ln(e^x + e^y)$ v počátku souřadnicového systému ve směru jednotkového vektoru, který svírá s kladným směrem osy x úhel α . *Výsledek:* $\frac{1}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha)$.

15. Příklad Určete derivaci funkce $f = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ v bodě $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ ležícím na kružnici $x^2 + y^2 - 2x = 0$ ve směru jednotkového vektoru tečny ke kružnici v tomto bodě. *Výsledek:* $-\frac{1}{2}$.