Diferenciál a Taylorova věta

1. Definice Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $a \in Df$. Řekneme, že f je **diferencovatelná v bodě a**, když $\forall h \in V_n$ takový, že $a + h \in Df$ platí $f(a+h) - f(a) = \mathbf{grad} f(a) \cdot h + |h| \cdot \tau(h)$, kde $\lim\limits_{h \to o} \tau(h) = 0$. Funkce $\tau(h)$ se nazývá nulová funkce. Číslo

$$\mathrm{d}f_h(a) = \mathbf{grad} f(a) \cdot h = (f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_n}(a)) \cdot (h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(a) h_i$$

se nazývá totální diferenciál funkce f v bodě a při přírůstku h a zobrazení $\mathrm{d}f(a) : V_n \to \mathbf{R}$ se nazývá **diferenciál funkce f v bodě a**.

2. Poznámka

1. Každá funkce $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ má v $a \in Df$ nejvýše jeden totální diferenciál $\mathrm{d}f(a)$.
2. $\mathrm{d}f(a)$ je lineární funkce. Pro libovolné $h_1, h_2 \in V_n$ a $c \in R$ platí $\mathrm{d}f(a)(h_1 + h_2) = \mathrm{d}f(a)(h_1) + \mathrm{d}f(a)(h_2)$ a $\mathrm{d}f(a)(c \cdot h) = c \cdot \mathrm{d}f(a)(h)$.
3. V literatuře se používjí často různá označení. Následující zápisy znamenají totéž: $d_h f(a) = \mathrm{d}f(a)(h) = \mathrm{d}f(a, h)$.

3. Příklad Buďte $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $f_i(x) = f_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ funkce pro $i = 1, \dots, n$. Spočtěme $\mathrm{d}f_i(x)$.

Řešení Předně platí, že $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0, & \text{pro } i \neq j, \\ 1, & \text{pro } i = j. \end{cases}$ Odtud plyne $\mathrm{d}f_i(x)(h) = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) h_i = h_i$. Protože $\mathrm{d}f_i(x) = \mathrm{d}x_i$, platí $\mathrm{d}x_i = h_i$. Pak lze psát $h = (h_1, \dots, h_n) = (\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_n) = \mathrm{d}x$ a diferenciál funkce f v obecném bodě $x = [x_1, \dots, x_n]$ při přírůstku h lze zapsat ve tvaru $d_h f(x) = \mathrm{d}f(a)(h) =$
$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right) f(x) = (\frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} \mathrm{d}x_n) f(x)$.

4. Věta Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, a \in Df$.

i) Nechť f je diferencovatelná v bodě a. Pak f je v tomto bodě spojitá.

ii) Nechť existují f'_{x_i} pro $i = 1, \dots, n$ v nějakém okolí $K(a, \delta)$ a f'_{x_i} jsou spojité v a. Pak f je diferencovatelná v a.

5. Definice Buď $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definovaná vztahem $g(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b$, kde $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbf{R}$. Pak Gg se nazývá **nadrovina** v $\mathbf{R}^{n+1}$. (Speciálně pro $n = 2$ je Gg rovina.)

Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ a $a \in Df$ bod takový, že existuje okolí $K(a, \delta) \subseteq Df$. Řekneme, že nadrovina Gg je **tečná nadrovina** ke grafu Gf v bodě $[a, f(a)]$, když

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{|x - a|} = 0.$$

6. Věta Graf funkce f má v bodě $[a, f(a)]$ tečnou nadrovinu právě tehdy, když f je diferencovatelná v bodě a.

Pak **rovnice tečné nadroviny** v $\mathbf{R}^{n+1}$ má tvar

$$x_{n+1} = f(a) + f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + f'_{x_n}(a)(x_n - a_n),$$

kde $a = [a_1, \dots, a_n]$. Rovnici lze zapsat ve tvaru $f'_{x_1}(a) x_1 + \cdots + f'_{x_n}(a) x_n - x_{n+1} + c = 0$, kde $c \in \mathbf{R}$.

7. Definice Vektor **n** definovaný vztahem **n** $= (f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_n}(a), -1) \in V_{n+1}$ se nazývá **normálový vektor** tečné nadroviny funkce f v bodě $[a, f(a)]$. Přímka v $\mathbf{R}^{n+1}$ definovaná vektorovou rovnicí

$$[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] = [a_1, \ldots, a_n, f(a_1, \ldots a_n)] + t\big(f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_n}(a), -1\big), t \in \mathbf{R},$$

se nazývá **normála** grafu Gf v bodě $[a, f(a)]$.

8. Poznámka

1. Diferenciálu $d_h f(a)$ lze využít k přibližnému vyjádření přírůstku funkce. Platí

$$d_h f(a) \approx f(a+h) - f(a).$$

2. **Diferenciál vyjadřuje přírůstek na tečné nadrovině.**

3. Výraz $f(x,y)\mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y$ je totální diferenciál nějaké funkce $\Leftrightarrow f'_y = g'_x$.

9. Příklad Spočtěte diferenciál funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x + \ln y)$ v bodě $a = [0,1]$ při přírůstku $h = (-0.2, 0.1)$.

Řešení Spočteme nejprve parciální derivace funkce f. Platí

$$f'_x = \frac{1}{1+(x+\ln y)^2}, f'_x(a) = 1, \quad f'_y = \frac{1}{y(1+(x+\ln y)^2)}, f'_y(a) = 1.$$

Odtud a z obecného tvaru diferenciálu plyne $d_h f(a) = f'_x(a)h_1 + f'_y(a)h_2 = 1 \cdot (-0.2) + 1 \cdot 0.1 = -0.1$.

10. Příklad Určete rovnici tečné roviny a normály k paraboloidu $f(x,y) = x^2 + y^2$ v bodě $[-2, 1, ?]$.

Řešení Dopočítáme chybějící souřadnici. Platí: $? = f(-2,1) = 5$. Dále spočteme parciální derivace $f'_x = 2x$, $f'_x(-2,1) = -4$, $f'_y = 2y$, $f'_y(-2,1) = 2$. Dosadíme do rovnice tečné roviny. Dostáváme $z - 5 = -4(x+2) + 2(y-1)$. Odtud $4x - 2y + z + 5 = 0$. Normálový vektor je $n = (4, -2, 1)$. Rovnice normály má tvar $[x, y, z] = [-2, 1, 5] + t(4, -2, 1)$, kde $t \in \mathbf{R}$.

11. Definice Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$, $k \geq 2$. Řekneme, že funkce f je **k-krát diferencovatelná** v a, když existuje okolí $K(a, \delta)$ v němž jsou diferencovatelné všechny parciální derivace řádu $0 \leq m \leq k-2$ a v bodě a jsou diferencovatelné všechny parciální derivace řádu $k-1$. **Diferenciál k-tého řádu** funkce f je pak zobrazení $\mathrm{d}^k f(x) : V_n^k \to \mathbf{R}$ definované vztahem

$$\mathrm{d}^k f(x)(u_1, \ldots, u_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}u_{11} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}u_{1n}\right) \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_1}u_{k1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}u_{kn}\right) f(x),$$

kde $u_i = (u_{i1}, \ldots, u_{in}) \in V_n$.

Speciálně pro $u_1 = \cdots = u_k = h = (h_1, \ldots, h_n) \in V_n$ píšeme

$$\mathrm{d}_h^k f(x) = \mathrm{d}^k f(x)(h, \ldots h) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_1}h_n\right)^k f(x).$$

12. Poznámka K exaktnímu vyjádření $\mathrm{d}_h^k f(x)$ lze použít tzv. **multinomickou větu**.
Buďte $n \geq 2, k \in \mathbf{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$. Pak platí

$$(a_1 + \cdots + a_n)^k = \sum_{k_1+\cdots+k_n=k} \binom{k}{k_1, \ldots, k_n} a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n}, \quad \text{kde} \binom{k}{k_1, \ldots, k_n} = \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!}.$$

Součet probíhá přes všechny rozklady (kompozice) čísla k na právě n sčítanců, v nichž závisí na pořadí sčítanců.

13. Poznámka Pro $n = 2$ dostáváme známou **binomickou větu**

$$(a_1 + a_2)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_1^i a_2^{k-i}.$$

14. Poznámka Někdy diferenciálem k-tého řádu funkce f v bodě x nazýváme pouze zobrazení $D^k f(x) : V_n \to \mathbf{R}$, $D^k f(x)(h) = \mathrm{d}^k f(x)(h_1, \dots, h_2) = \mathrm{d}_h^k f(x)$.

15. Věta Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, a \in Df$. Nechť f má v nějakém $K(a, \delta)$ parciální derivace řádu k, které jsou spojité v a. **Pak existuje** $\mathrm{d}^k f(a)$.

16. Věta Nechť funkce $u(x, y), v(x, y)$ mají parciální derivace prvního řádu v bodě $[x_0, y_0]$. Nechť $u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0)$. Je-li funkce $f(u, v)$ diferencovatelná v bodě $[u_0, v_0]$, pak **složená funkce** $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ má parciální derivace prvního řádu v $[x_0, y_0]$ a platí

$$F'_x(x_0, y_0) = f'_u(u_0, v_0)u'_x(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0)v'_x(x_0, y_0),$$

$$F'_y(x_0, y_0) = f'_u(u_0, v_0)u'_y(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0)v'_y(x_0, y_0).$$

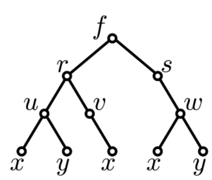
17. Příklad Buď $f = f(u(x, y), v(x, y))$. Spočtěte f''_{xy}.

Řešení Nejprve určíme f'_x. Platí $f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x$.
Nyní $f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_x) = \frac{\partial}{\partial y}(f'_u u'_x + f'_v v'_x) = \frac{\partial}{\partial y}(f'_u)u'_x + f'_u u''_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}(f'_v)v'_x + f'_v v''_{xy} = (f''_{uu}u'_y + f''_{uv}v'_y)u'_x + f'_u u''_{xy} + (f''_{vu}u'_y + f''_{vv}v'_y)v'_x + f'_v v''_{xy} = f''_{uu}u'_x u'_y + f''_{uv}u'_x v'_y + f''_{vu}u'_y v'_x + f''_{vv}v'_x v'_y + f'_u u''_{xy} + f'_v v''_{xy}$.

18. Poznámka K nalezení parciální derivace složené funkce ve zcela obecné situaci poskytneme aspoň návod. Předpokládejme, že f je několikanásobně složená a má n proměnných. Postupujeme tak, že nejprve analyzujeme strukturu složení funkce f. To provedeme tak, že nakreslíme schéma složení, tzv. **strom**. Strom se skládá z uzlů a hran. Uzly reprezentují proměnné a funkce, hrany závislosti mezi nimi. Uzly znázorníme v obrázku body nebo kolečky, hrany úsečkami, které uzly spojují. Kolik vede různých cest od uzlu f k x_i, tolik bude mít derivace f'_{x_i} sčítanců. Každý sčítanec je součinem tolika činitelů, kolik hran je na cestě z f do x_i.

19. Příklad Analyzujte strukturu složení funkce $f(x, y) = \sqrt[3]{x^y + \ln^2 x} \cdot \operatorname{arctg}(1 + \frac{x}{y})$, nakreslete odpovídající strom a spočtěte f'_x, f'_y.

Řešení Označme $f(r, s) = r \cdot s$, $r(u, v) = \sqrt[3]{u + v^2}$, $s(w) = \operatorname{arctg} w$, $u(x, y) = x^y$, $v(x) = \ln x$, $w(x, y) = 1 + \frac{x}{y}$. Nakreslíme schéma složení, viz Obrázek 1.



Obrázek 1: Schéma složení funkce $f(x, y) = \sqrt[3]{x^y + \ln^2 x} \cdot \operatorname{arctg}(1 + \frac{x}{y})$

Graf na obrázku se nazývá strom. Z jeho struktury získáme vzorce pro hledané parciální derivace. Platí

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}, \quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Odtud plyne

$$f'_x = \frac{1}{3}\frac{yx^{y-1}+\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{(x^y+\ln x)^2}} \cdot \operatorname{arctg}(1+\frac{x}{y}) + \sqrt[3]{x^y+\ln^2 x} \cdot \frac{1}{1+(1+\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{1}{y},$$

$$f'_y = \frac{1}{3}\frac{x^y \ln x}{\sqrt[3]{(x^y+\ln x)^2}} \cdot \operatorname{arctg}(1+\frac{x}{y}) + \sqrt[3]{x^y+\ln^2 x} \cdot \frac{1}{1+(1+\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{-x}{y^2}.$$

20. Definice Buďte $a \in \mathbf{R}^n, h \in V_n, h \neq 0$. Množina $\{x \in \mathbf{R}^n, x = a + th, t \in \langle 0, 1\rangle\}$ se nazývá úsečka v $\mathbf{R}^n$ o krajních bodech $a, a+h$.

21. Věta **Taylorova věta** Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \Omega \subseteq Df$ otevřená množina. Nechť $m \in N$ a pro libovolné $x \in \Omega$ existuje $\mathrm{d}_h^{m+1} f(x)$. Buď $a \in \Omega, h = (h_1, \dots, h_n) \in V_n$ a nechť úsečka $a, a+h$ leží v Ω. Pak existuje $t \in \mathbf{R}$, $0 < t < 1$ tak, že platí

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}_h f(a) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}_h^2 f(a) + \cdots + \frac{1}{m!}\mathrm{d}_h^m f(a) + \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}_h^{m+1} f(a+th).$$

22. Poznámka

1. Polynom $T_m(x) = f(a) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}_h f(a) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}_h^2 f(a) + \cdots + \frac{1}{m!}\mathrm{d}_h^m f(a)$ se nazývá **Taylorův polynom** m-tého řádu funkce f v bodě a.
2. Funkce $R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}_h^{m+1} f(a+th)$ **Taylorův zbytek**.
3. Formule uvedená v Taylorově větě se nazývá Taylorův vzorec nebo též Taylorova formule.
4. Pro $a = [0, \dots, 0]$ mluvíme o **Maclaurinově vzorci**.
5. Věta platí i za slabšího předpokladu, když $\mathrm{d}_h^{m+1} f(x)$ existuje v každém bodě x úsečky $a, a+h$. Zbytek $R_m(x)$ vyjadřuje chybu, které se dopustíme, nahradíme-li funkci f na Ω polynomem $T_m(x)$. Chybu $R_m(x)$ nedokážeme přesně spočítat, ale v řadě případů ji dokážeme uspokojivě odhadnout. Při konstrukci polynomu $T_m(x)$ používáme vztah $\mathrm{d}x = h = x - a$.

23. Příklad Spočtěte Taylorův polynom $T_2(x, y)$ funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x + \ln y)$ v bodě $a = [0, 1]$.

Řešení Parciální derivace prvního řádu známe z Příkladu 9. Dále víme, že $\mathrm{d}x = x$ a $\mathrm{d}y = y - 1$. Tedy první diferenciál funkce f v a má tvar $d_h f(a) = f'_x(a)\mathrm{d}x + f'_y(a)\mathrm{d}y = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y = x + y - 1$.

Pro parciální derivace druhého řádu platí:

$$f''_{xx} = \frac{-2(x+\ln y)}{(1+(x+\ln y)^2)^2}, f''_{xy} = \frac{-2(x+\ln y)}{y(1+(x+\ln y)^2)^2}, f''_{yy} = \frac{-(1+x+\ln y)^2}{y^2(1+(x+\ln y)^2)^2},$$
$$f''_{xx}(a) = 0, f''_{xy}(a) = 0, f'_{yy}(a) = -1.$$

Druhý diferenciál funkce f v bodě a je tvaru

$$\mathrm{d}_h f(a) = f''_{xx}(a)\mathrm{d}x^2 + 2f'_{xy}(a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{yy}(a)\mathrm{d}y^2 = -\mathrm{d}y^2 = -(y-1)^2.$$

Diferenciály dosadíme do Taylorovy formule $T_2(x, y) = f(a) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}_h f(a) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}_h^2 f(a)$ a provedeme úpravu. Platí $T_2(x, y) = -\frac{3}{2} + x + 2y - \frac{1}{2}y^2$.