

Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných

RNDr. Jiří Klaška, Dr.

Učební text předmětu

Matematika II

pro profesní a kombinovanou formu studia

Obsah

I	Diferenciální počet funkcí více proměnných	3
1	Funkce více proměnných	3
2	Limita a spojitost	6
3	Parciální a směrové derivace, gradient	9
4	Diferenciál a Taylorova věta	12
5	Lokální extrém	16
6	Vázané a globální extrém	19
7	Implicitní funkce	23
II	Integrační počet funkcí více proměnných	25
8	Integrál přes n -rozměrný interval	25
9	Integrál přes elementární oblast	28
10	Transformace integrálů	31
11	Aplikace vícerozměrných integrálů	36

Část I

Diferenciální počet funkcí více proměnných

1 Funkce více proměnných

1. Definice **Reálná funkce n -reálných proměnných** $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazení, které každému $x \in \mathbb{R}^n$ přiřadí nejvýše jedno $f(x) \in \mathbb{R}$.

Prvky $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ se nazývají **body** n -rozměrného prostoru \mathbb{R}^n .

Množina $Df = \{x \in \mathbb{R}^n; \exists y \in \mathbb{R} : f(x) = y\}$ se nazývá **definiční obor** funkce f .

Množina $Hf = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in Df : f(x) = y\}$ se nazývá **obor hodnot** funkce f .

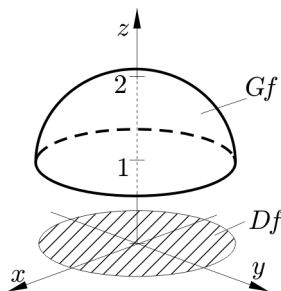
Množina $Gf = \{[x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)] \in \mathbb{R}^{n+1}; [x_1, \dots, x_n] \in Df\}$ se nazývá **graf** funkce f .

2. Poznámka

1. Místo $f([x_1, \dots, x_n])$ budeme pro jednoduchost psát pouze $f(x_1, \dots, x_n)$.
2. Z předchozí definice grafu plyne, že funkční hodnotu chápeme jako $n + 1$ souřadnici, tj. $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$.
3. Místo x_1, x_2, x_3 budeme psát x, y, z .
4. Pro $n = 2$ si lze graf f představovat jako rovinu, nebo její část, zakřivenou v \mathbb{R}^3 , tj. jako plochu.
5. Pro $n > 2$ ztrácíme možnost názorné představy. V případě funkce tří proměnných je grafem funkce část čtyřrozměrného prostoru. Z analogie můžeme ale usuzovat, že grafem funkce tří proměnných je trojrozměrný prostor, který je zakřiven v \mathbb{R}^4 . Jediným grafem funkce tří proměnných, který dokážeme znázornit, je graf funkce $f(x, y, z) = 0$. Grafem f je celý trojrozměrný prostor \mathbb{R}^3 .

3. Příklad Buď $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funkce dvou proměnných definovaná vztahem $f(x, y) = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Namalujte graf funkce f .

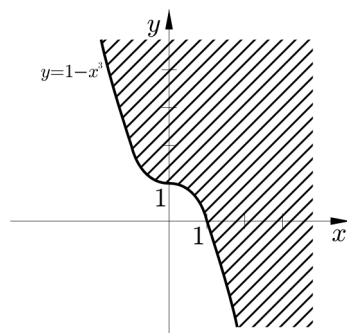
Řešení Vyšetřeme nejprve definiční obor. Zřejmě $[x, y] \in Df \Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$. Tedy $Df = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Geometricky je definiční obor kruh se středem v počátku a poloměrem 1. Jednoduchou úvahou lze zjistit, že $Hf = \langle 1, 2 \rangle$. Dále $Gf = \{[x, y, 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in Df\}$. Platí $z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Odtud $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$. Z analytické geometrie plyne, že graf funkce f je horní polovina kulové plochy o poloměru 1 se středem v bodě $[0, 0, 1]$. Graf je znázorněn v kartézské soustavě souřadnic (O, x, y, z) na Obrázku 1.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y) = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

4. Příklad Vyšetřete a nakreslete definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{\ln(x^3 + y)}$.

Řešení Zřejmě platí, že $[x, y] \in Df \Leftrightarrow \ln(x^3 + y) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 + y \geq 1$. Tedy $Df = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1 - x^3\}$. Nakreslíme obrázek. Viz Obrázek 2.

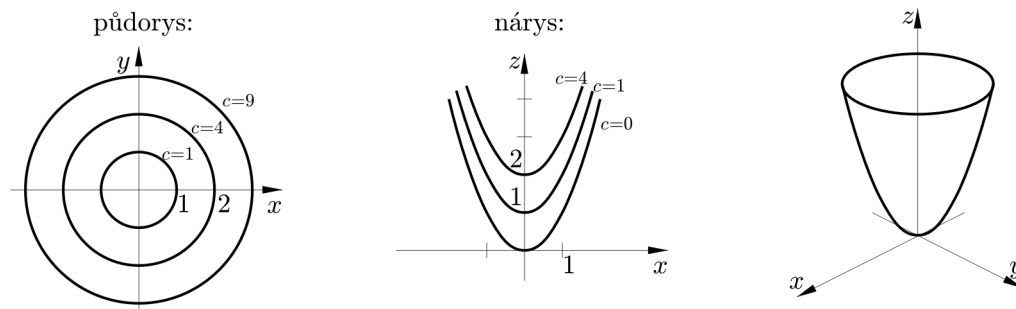
Obrázek 2: Def. obor funkce $f(x, y) = \sqrt{\ln(x^3 + y)}$

Metoda řezů

Graf funkce dvou proměnných je podmnožina trojrozměrného prostoru \mathbb{R}^3 . Základní geometrickou představu o grafech funkcí $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, lze získat v kartézské soustavě souřadnic (O, x, y, z) pomocí řezů grafu Gf systémem rovin $g_c(x, y) = c$, tj. $z = c$, kde $c \in \mathbb{R}$. Řezy jsou tedy průniky grafů Gf a Gg_c . Podobně lze použít další systémy rovin, např. $x = c$ nebo $y = c$.

5. Příklad Pomocí metody řezů vyšetřete a nakreslete graf funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Řešení Řezy rovinami $z = c$ jsou pro $c > 0$ kružnice $x^2 + y^2 = c$ o poloměru \sqrt{c} . Pro $c = 0$ je řez bod $[0, 0]$. Pro $c < 0$ jsou řezy prázdné množiny. Dále řezy rovinami $y = c$ jsou paraboly $z = x^2 + c^2$ s vrcholem ve výšce c^2 . Odtud a ze symetrie funkce f již plyne, že graf funkce f vznikne rotací paraboly $z = x^2$ kolem osy z . Grafem f je tzv. rotační paraboloid. Viz Obrázek 3.

Obrázek 3: Graf $f(x, y) = x^2 + y^2$ určený metodou řezů

6. Definice Buďte $x, y \in \mathbb{R}^n$. Potom číslo $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ se nazývá **vzdálenost bodů** x, y .
 Buď $x_0 \in \mathbb{R}^n, \delta > 0, \delta \in \mathbb{R}$. Pak množina $K(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n, d(x, x_0) < \delta\}$ se nazývá **δ -okolí bodu** x_0 .

7. Poznámka

1. δ -okolí bodu x_0 je otevřená koule v \mathbb{R}^n . Má střed v x_0 a poloměr δ .
2. Pro $n = 1$ dostáváme $K(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
3. Platí
 - i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
 - ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
 - iii) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$, tzv. **trojúhelníková nerovnost**.

8. Definice Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se nazývá **vnitřní bod** množiny Ω , když existuje $K(x_0, \delta)$ tak, že $K(x_0, \delta) \subseteq \Omega$. Množina Ω , jejíž každý bod je vnitřní se nazývá **otevřená množina**.

Bod $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se nazývá **hraniční bod** množiny Ω , když pro každé $\delta > 0$ platí $K(x_0, \delta) \cap \Omega \neq \emptyset \wedge K(x_0, \delta) \cap (\mathbb{R}^n - \Omega) \neq \emptyset$.

Označme $h(\Omega)$ množinu všech hraničních bodů množiny Ω . Množina $h(\Omega)$ se nazývá **hranice množiny** Ω .

Množina Ω se nazývá **uzavřená množina**, když $h(\Omega) \subseteq \Omega$.

Množina Ω se nazývá **ohraničená množina**, když existuje $\delta > 0$ tak, že $\Omega \subseteq K(o, \delta)$, kde $o = [0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^n$.

2 Limita a spojitost

9. Definice Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ reálná funkce n reálných proměnných.

Pak množina $(Df)' = \{x \in \mathbb{R}^n; \forall \varepsilon > 0 : (K(x, \varepsilon) - \{x\}) \cap Df \neq \emptyset\}$ se nazývá **derivace množiny Df** .

Řekneme, že **f má v bodě $x_0 \in (Df)'$ limitu $a \in \mathbb{R}$** , když $\forall K(a, \varepsilon) \exists K(x_0, \delta)$ tak, že $\forall x \in (K(x_0, \delta) - \{x_0\}) \cap Df : f(x) \in K(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

10. Poznámka Buď $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Pojem limity lze rozšířit na případ $x_0 \in \mathbb{R}_*, a \in \mathbb{R}_*$.

Je-li $a \in \{-\infty, \infty\}$, nazývá se **limita nevlastní**.

Pokud se v n -tici $x_0 \in \mathbb{R}_*$ vyskytne aspoň jednou nevlastní bod ∞ nebo $-\infty$, mluvíme o **limitě v nevlastním bodě**.

Definice limity nepožaduje, aby $x_0 \in Df$.

11. Věta Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $x_0 \in (Df)'$ **nejvýše jednu** limitu $a \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Sporem. Buďte $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ dvě různé limity funkce f v bodě x_0 . Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}d(a, b)$. Pak $\varepsilon > 0$ a podle definice limity $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ tak, že $\forall x \in (K(x_0, \delta_1) - \{x_0\}) \cap Df$ platí, že $f(x) \in K(a, \varepsilon)$, což znamená, že $d(a, f(x)) < \varepsilon$ a $\forall x \in (K(x_0, \delta_2) - \{x_0\}) \cap Df$ platí, že $f(x) \in K(b, \varepsilon)$, tj. $d(b, f(x)) < \varepsilon$. Zvolme $x \in K(x_0, \min\{\delta_1, \delta_2\}) - \{x_0\}$. Pak $d(a, b) \leq d(a, f(x)) + d(b, f(x)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, což je spor, neboť $d(a, b) = 2\varepsilon$.

12. Definice Buď $x_0 \in (Df)'$. Má-li f v x_0 limitu a , píšeme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

13. Poznámka Nejčastější úloha o limitách bývá formulována slovním obratem: Vyšetřete limitu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Co se má provést?

Pokud $x_0 \notin (Df)'$, řekneme, že symbol $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ není definován. V opačném případě mohou nastat právě dvě navzájem se vylučující možnosti.

1. f nemá limitu. Těž říkáme, že neexistuje limita f v x_0 .

2. f má v x_0 limitu. Tato limita je pak podle Věty 11 určena jednoznačně. Určení limity funkce více proměnných je obecně velmi obtížné. V některých jednodušších případech mohou při výpočtu pomoci následující věty.

14. Věta Nechť existují limity $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$. Pak platí

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b;$

ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = ab;$

iii) Pro $b \neq 0$: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$

15. Věta Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ a existuje $K(x_0, \delta) - \{x_0\}$ tak, že funkce $g(x)$ je na $K(x_0, \delta) - \{x_0\}$ **ohraničená**. Pak pro limitu součinu platí $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

16. Věta 1. Nechť $\exists K(x_0, \delta)$ tak, že $\forall x \in K(x_0, \delta) - \{x_0\}$ platí, že $f(x) > 0$.

Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

2. Nechť $\exists K(x_0, \delta)$ tak, že $\forall x \in K(x_0, \delta) - \{x_0\}$ platí, že $f(x) < 0$.

Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

17. Věta Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ racionální lomená funkce, $x_0 \in Df$. Pak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(x_0)$.

18. Příklad Vyšetříme limitu $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Řešení Označme $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Pak $Df = \mathbb{R}^2 - \{[0, 0]\}$ a $o = [0, 0] \in (Df)'$. Symbol $\lim_{x \rightarrow o} f(x)$ je tedy definován. Dokažme, že f nemá limitu v bodě $[0, 0]$. Sporem. Pripusťme, že funkce f má v bodě $[0, 0]$ limitu a . Pak podle definice pro $K(a, \frac{1}{4})$ existuje $K(o, \delta)$ tak, že $\forall x \in K(o, \delta) - \{o\}$ platí $f(x) \in K(a, \frac{1}{4})$. Uvažme body $b_1 = [\frac{\delta}{2}, 0]$, $b_2 = [\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]$. Zřejmě platí, že $b_1, b_2 \in K(o, \delta)$ neboť $d(o, b_1) = \sqrt{(0 - \frac{\delta}{2})^2 + (0 - 0)^2} = \frac{\delta}{2} < \delta$ a $d(o, b_2) = \sqrt{(0 - \frac{\delta}{2})^2 + (0 - \frac{\delta}{2})^2} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta$. Tedy $f(b_1) \in K(a, \frac{1}{4})$, $f(b_2) \in K(a, \frac{1}{4})$. Ale $f(b_1) = 0$ a $f(b_2) = \frac{1}{2}$. Odtud plyne, že $a \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $a \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, což je spor, neboť $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \cap (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = \emptyset$.

19. Definice Buď $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funkce dvou proměnných, $x_0 = [a, b]$.

Pak limity $L_1 = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right)$ a $L_2 = \lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right)$ se nazývají **postupné limity**.

Následující věta popisuje vztah postupných limit k limitě $L = \lim_{[x,y] \rightarrow [a,b]} f(x, y)$.

20. Věta

1. Necht existují limity L_1, L_2 a $L_1 = L_2$. Pak L nemusí existovat.
2. Necht existuje L . Pak L_1, L_2 nemusí existovat.
3. Existují-li L, L_1, L_2 , pak nutně $L = L_1 = L_2$.
4. Necht existují L_1, L_2 a $L_1 \neq L_2$. Pak L neexistuje.

Pro ilustraci uveďme příklad situace (2) z předchozího tvrzení.

21. Příklad Buď $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že $Df = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \leq y \leq 2x\}$, $Hf = \{1\}$, tj. $f(x, y) = 1$ na Df .

Zřejmě $[0, 0] \in (Df)'$ a $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x, y) = 1$, viz Věta 17. Dvojnásobné limity L_1, L_2 ale neexistují.

Podle definice limity funkce jedné proměnné si snadno rozmyslíte proč. Poznamenejme, že $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ má v $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když $\forall K(a, \varepsilon) \exists K(x_0, \delta) - \{x_0\}$ tak, že $K(x_0, \delta) - \{x_0\} \subseteq Df$ a $\forall x \in K(x_0, \delta) - \{x_0\} : f(x) \in K(a, \varepsilon)$.

22. Poznámka Jak již bylo řečeno, vyšetřování limit funkcí více proměnných je obecně velmi obtížné. Uveďme nyní několik možností, jak při vyšetřování limit postupovat. Pro jednoduchost se omezíme na funkce dvou proměnných. Pro více proměnných se postupuje analogicky. Idea je založena na aplikaci Věty 11.

1. Metoda svazku přímek

Místo limity L vyšetřujeme limitu L^* , kde

$$L^* = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, k(x - x_0) + y_0).$$

Závisí-li limita L^* na směrnici k , pak L neexistuje. Nezávisí-li na k , nelze o existenci limity L nic usoudit.

2. Metoda svazku parabol

Místo limity L vyšetřujeme limitu L^{**} , kde

$$L^{**} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, k(x - x_0)^2 + y_0).$$

Závisí-li limita L^{**} na směrnici k , pak L neexistuje. Nezávisí-li na k , nelze o existenci limity L nic usoudit.

3. Metoda polárních souřadnic

Provedeme transformaci funkce f do polárních souřadnic. Dosadíme za $x = x_0 + \varrho \cos \varphi$ a za $y = y_0 + \varrho \sin \varphi$. Místo limity L pak vyšetřujeme limitu L^{***} , kde

$$L^{***} = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} f(x_0 + \varrho \cos \varphi, y_0 + \varrho \sin \varphi).$$

Závisí-li limita L^{***} na úhlu φ , pak L neexistuje. Nezávisí-li na φ , nelze o existenci limity L nic usoudit. Speciálně, je-li po transformaci $L^{***} = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} g(\varrho)h(\varphi)$, kde $\lim_{\varrho \rightarrow 0^+} g(\varrho) = 0$ a $h(\varphi)$ je ohraničená na $(0, 2\pi)$, pak $L = 0$.

23. Příklad Vyšetřete limitu $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$.

Řešení Obě postupné limity L_1, L_2 existují a jsou rovny nule. O existenci limity nelze na tomto základě nic usoudit. Použijeme metodu svazku přímek. Platí

$$L^* = \lim_{x \rightarrow 0, y=kx} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot k^2 x^2}{x^4 + k^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^2}{1 + k^4} = \frac{k^2}{1 + k^4}.$$

Protože limita L^* závisí na k , zadaná limita L neexistuje.

24. Příklad Vyšetřete limitu $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

Řešení Obě postupné limity L_1, L_2 existují a jsou rovny nule. Podobně neúspěšně dopadne vyšetření metodou svazku přímek i metodou svazku parabol. Platí $L^* = L^{**} = 0$. O existenci limity nelze na tomto základě nic usoudit. Použijeme metodu transformace do polárních souřadnic. Platí

$$L^{***} = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{\varrho^3 \cos^3 \varphi + \varrho^3 \sin^3 \varphi}{\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi} = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{\varrho^3 (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}{\varrho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \varrho (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) = 0.$$

Protože je funkce $h(\varphi) = \cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi$ ohraničená a funkce $g(\varrho) = \varrho$ má limitu 0, zadaná limita L existuje a je rovna 0.

25. Definice Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in Df$. Řekneme, že **f je spojitá v x_0** , když $\forall K(f(x_0), \varepsilon) \exists K(x_0, \delta)$ tak, že $\forall x \in K(x_0, \delta) \cap Df : f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$.

Řekneme, že **f je spojitá na množině $\Omega \subseteq Df$** , je-li spojitá v každém bodě $x \in \Omega$.

26. Věta Buď $x_0 \in Df \cap (Df)'$. Pak f je **spojitá** v $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

27. Věta Buď $x_0 \in Df \wedge x_0 \notin (Df)'$. Pak f je spojitá v x_0 .

Důkaz: Protože $x_0 \notin (Df)'$ existuje $K(x_0, \delta)$ tak, že $(K(x_0, \delta) - \{x_0\}) \cap Df = \emptyset$. Zřejmě $\forall K(f(x_0), \varepsilon)$ platí $\forall x \in K(x_0, \delta) \cap Df = \{x_0\}$ platí $f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$, tj. $f(x_0) \in K(f(x_0), \varepsilon)$.

28. Věta Buďte $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ spojitě v $x_0 \in Df$.

1. Pak $f \pm g, f \cdot g$ jsou spojitě v x_0 .
2. Je-li $g(x_0) \neq 0$, pak rovněž $\frac{f}{g}$ je spojitá v x_0 .

3 Parciální a směrové derivace, gradient

29. Definice Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ reálná funkce n reálných proměnných, $a = [a_1, \dots, a_n]$, $1 \leq i \leq n$. Položme $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kde $f_i(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ (pozn. funkce f_i se nazývá i -tá parciální funkce) a $Df_i = \{x_i \in \mathbb{R} : [a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n] \in Df\}$.

Číslo $f'_{x_i}(a) := f'_i(a)$ se nazývá parciální derivace funkce f v bodě a podle proměnné x_i . Buď Df'_{x_i} množina všech $a \in \mathbb{R}^n$, pro něž $f'_{x_i}(a)$ existuje.

Funkce $f'_{x_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ přiřazující každému $x \in Df'_{x_i}$ číslo $f'_{x_i}(x)$ se nazývá **parciální derivace** funkce f podle x_i . Místo f'_{x_i} lze ekvivalentně psát $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

30. Poznámka Již samotná definice poskytuje návod, jak parciální derivace počítat. Parciální derivaci funkce podle pevně zvolené proměnné vypočítáme tak, že funkci derivujeme jen podle této proměnné, přičemž ostatní proměnné považujeme za konstanty. Princip výpočtu uvedeme na následujícím příkladu.

31. Příklad Spočítejte parciální derivace f'_x a f'_y funkce $f(x, y) = x^2y + \ln\left(\frac{x}{y}\right)$.

Řešení Využijeme známých vzorců pro derivování funkce jedné proměnné a dále použijeme návodů v předchozí poznámce.

$$f'_x(x, y) = 2xy + \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = 2xy + \frac{1}{x} \quad \text{a} \quad f'_y(x, y) = x^2 + \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \frac{-x}{y^2} = x^2 - \frac{1}{y}.$$

32. Definice Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in Df$. Nechť $\forall i = 1, \dots, n$ existuje $f'_{x_i}(a)$.

Vektor **grad** $f(a) = (f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_n}(a))$ se nazývá gradient funkce f v bodě a .

Vektor **grad** $f = (f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n})$ nazýváme **gradient funkce** f .

33. Poznámka Symbolem V_n označme **euklidovský vektorový prostor** dimenze n nad \mathbb{R} . Prvky $v = (v_1, \dots, v_n) \in V_n$ nazýváme vektory. Jsou to n -tice reálných čísel zapsaných v kulaté závorce. Z vektorové algebry připomeňme, že rozdíl $x - y$ bodů $x, y \in \mathbb{R}^n$ interpretujeme jako vektor a součet $x + v$ bodu $x \in \mathbb{R}^n$ a vektoru $v \in V_n$ jako bod. Platí $[x_1, \dots, x_n] + (v_1, \dots, v_n) = [x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n]$.

Vektory $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1) \in V_n$ se nazývají **orty**. Orty jsou ortogonální, tzn. kolmé vektory, jejichž velikost je rovna 1.

Podobně jako u funkcí jedné reálné proměnné zavádíme pojem derivace vyšších řádů. Definici zavedeme pomocí principu matematické indukce.

34. Definice Buď $m \geq 1$ libovolné, $x_{i_1}, \dots, x_{i_m} \in \{x_1, \dots, x_n\}$. Pak funkce

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} \left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{m-1}}} \right)$$

se nazývá **m -tá parciální derivace** podle proměnných x_{i_1}, \dots, x_{i_m} v tomto pořadí.

Nultou parciální derivaci chápeme jako f .

Výraz $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}$ je zvykem zapisovat rovněž ve tvaru $f_{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}}^{(m)}$.

35. Poznámka Druhou derivací funkce n -proměnných $f(x)$ chápeme matici

$$f'' = \begin{pmatrix} f''_{x_1 x_1} & \dots & f''_{x_1 x_n} \\ & \ddots & \\ f''_{x_n x_1} & \dots & f''_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

Gradient funkce f se v tomto kontextu někdy chápe jako první derivace funkce f . Píšeme tedy $f' = \text{grad } f$.

36. Příklad Spočítejte parciální derivace druhého řádu $f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}$ a f''_{yx} funkce $f(x, y) = x^2y + \ln\left(\frac{x}{y}\right)$.

Řešení Využijeme výsledků z Příkladu 31. Platí $f'_x(x, y) = 2xy + \frac{1}{x}$ a $f'_y(x, y) = x^2 - \frac{1}{y}$. Druhé parciální derivace funkce f spočteme tak, že první parciální derivaci znovu parciálně zderivujeme podle zvolené proměnné. Platí

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy + \frac{1}{x}\right) = 2y - \frac{1}{x^2}, f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^2},$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_x) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy + \frac{1}{x}\right) = 2x, f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_y) = 2x.$$

Odtud plyne, že matice druhé derivace je tvaru

$$f'' = \begin{pmatrix} 2y - \frac{1}{x^2}, & 2x \\ 2x, & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Při výpočtu druhých parciálních derivací jsme narazili na důležitou skutečnost. Zjistili jsme, že $f''_{xy} = f''_{yx}$. Následující věta zaručuje, že nalezenou vlastnost mají všechny funkce, jejichž parciální derivace jsou spojité. Věta 37 se často nazývá Schwarzova věta, nebo též věta o zaměnitelnosti parciálních derivací. Matice f'' je v případě zaměnitelnosti symetrická podle hlavní diagonály.

37. Věta (Schwarzova věta) Necht všechny parciální derivace m -tého řádu funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité v bodě $a \in Df$. Pak jsou všechny parciální derivace až do řádu m včetně záměnné v bodě a , tj. v libovolné parciální derivaci m -tého řádu v bodě a nezávisí na pořadí derivování.

38. Poznámka Derivace do řádu $m - 1$ včetně jsou záměnné dokonce v nějakém okolí bodu a . Obecně existuje n^m parciálních derivací m -tého řádu funkce n proměnných. Splnění předpokladů Schwarzovy věty 37 redukuje tento počet na $\binom{n+m-1}{m}$.

39. Definice Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in Df$, $\vec{u} \in V_n$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pro každé $t \in \mathbb{R}$ položíme $g(t) := f(a + t\vec{u})$. Pak

$$f'_{\vec{u}}(a) := g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\vec{u}) - f(a)}{t}$$

se nazývá **derivace funkce f v bodě a ve směru vektoru \vec{u}** .

40. Příklad Spočítejte derivaci funkce $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ v bodě $a = [1, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (2, 1)$.

Řešení Využijeme definičního vztahu. Platí

$$g(t) = f(a + t\vec{u}) = f([1, 1] + t(2, 1)) = f(1 + 2t, 1 + t) = \frac{(1 + 2t)^2 - (1 + t)^2}{(1 + 2t)^2 + (1 + t)^2} = \frac{3t^2 + 2t}{5t^2 + 6t + 2}.$$

$$g'(t) = \frac{(6t + 2)(5t^2 + 6t + 2) - (3t^2 + 2t)(10t + 6)}{(5t^2 + 6t + 2)^2}, \quad f'_{\vec{u}}(a) = g'(0) = \frac{2 \cdot 2 - 0 \cdot 6}{2^2} = 1.$$

41. Věta Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in Df$, $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$. Pak

1. $f'_{e_i}(a) = f'_{x_i}(a)$.
2. Necht existuje $f'_{\vec{u}}(a)$. Pak pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ existuje $f'_{c\vec{u}}(a)$ a platí $f'_{c\vec{u}}(a) = c f'_{\vec{u}}(a)$.
3. Necht $f'_{\vec{u}}(x)$ je spojitá v $K(x, \delta)$ a existuje $f'_{\vec{v}}(x)$. Pak existuje $f'_{\vec{u} + \vec{v}}(x)$ a platí

$$f'_{\vec{u} + \vec{v}}(x) = f'_{\vec{u}}(x) + f'_{\vec{v}}(x).$$

4. $f'_{\vec{u}}(a) = \mathbf{grad} f(a) \cdot \vec{u} = (f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_n}(a)) \cdot (u_1, \dots, u_n)$.

42. Poznámka Platí $f'_{\vec{u}}(a) = |\mathbf{grad} f(a)| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos \varphi$, $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, kde φ je úhel vektorů $\mathbf{grad} f(a)$, \vec{u} .
Tedy $f'_{\vec{u}}(a)$ je maximální, když $\varphi = 0$.
Odtud plyne, že vektor $\mathbf{grad} f(a)$ určuje směr jímž f v a nejrychleji roste.

43. Příklad Spočtete derivaci funkce $f(x, y) = x^2y + \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ v bodě $a = [2, 3]$ ve směru $\vec{u} = (1, -2)$.

Řešení Pro gradient funkce f platí $\mathbf{grad} f = \left(2xy + \frac{1}{x}, x^2 - \frac{1}{y}\right)$ a $\mathbf{grad} f(a) = \left(\frac{25}{2}, \frac{11}{3}\right)$. Tedy $f'_{\vec{u}}(a) = \mathbf{grad} f(a) \cdot \vec{u} = \left(\frac{25}{2}, \frac{11}{3}\right) \cdot (1, -2) = \frac{31}{6}$.

4 Diferenciál a Taylorova věta

44. Definice Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in Df$. Řekneme, že f je **diferencovatelná v bodě a** , když $\forall h \in V_n$ takový, že $a + h \in Df$ platí $f(a + h) - f(a) = \mathbf{grad} f(a) \cdot h + |h| \cdot \tau(h)$, kde $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0$. Funkce $\tau(h)$ se nazývá nulová funkce. Číslo

$$df_h(a) = \mathbf{grad} f(a) \cdot h = (f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_n}(a)) \cdot (h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a) h_i$$

se nazývá totální diferenciál funkce f v bodě a při přírůstku h a zobrazení $df(a) : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá **diferenciál funkce f v bodě a** .

45. Poznámka

1. Každá funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v $a \in Df$ nejvýše jeden totální diferenciál $df(a)$.
2. $df(a)$ je lineární funkce. Pro libovolné $h_1, h_2 \in V_n$ a $c \in \mathbb{R}$ platí $df(a)(h_1 + h_2) = df(a)(h_1) + df(a)(h_2)$ a $df(a)(c \cdot h) = c \cdot df(a)(h)$.
3. V literatuře se používají často různá označení. Následující zápisy znamenají totéž:
 $dhf(a) = df(a)(h) = df(a, h)$.

46. Příklad Buďte $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i(x) = f_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ funkce pro $i = 1, \dots, n$. Spočtěme $df_i(x)$.

Řešení Předně platí, že $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0, & \text{pro } i \neq j, \\ 1, & \text{pro } i = j. \end{cases}$ Odtud plyne $df_i(x)(h) = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) h_i = h_i$. Protože $df_i(x) = dx_i$, platí $dx_i = h_i$. Pak lze psát $h = (h_1, \dots, h_n) = (dx_1, \dots, dx_n) = dx$ a diferenciál funkce f v obecném bodě $x = [x_1, \dots, x_n]$ při přírůstku h lze zapsat ve tvaru $dhf(x) = df(a)(h) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right) f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) f(x)$.

47. Věta Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in Df$.

- i) Nechť f je diferencovatelná v bodě a . Pak f je v tomto bodě spojitá.
- ii) Nechť existují f'_{x_i} pro $i = 1, \dots, n$ v nějakém okolí $K(a, \delta)$ a f'_{x_i} jsou spojitě v a . Pak f je diferencovatelná v a .

48. Definice Buď $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná vztahem $g(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b$, kde $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$. Pak Gg se nazývá **nadrovina** v \mathbb{R}^{n+1} . (Speciálně pro $n = 2$ je Gg rovina.)

Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $a \in Df$ bod takový, že existuje okolí $K(a, \delta) \subseteq Df$. Řekneme, že nadrovina Gg je **tečná nadrovina** ke grafu Gf v bodě $[a, f(a)]$, když

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{|x - a|} = 0.$$

49. Věta Graf funkce f má v bodě $[a, f(a)]$ tečnou nadrovinu právě tehdy, když f je diferencovatelná v bodě a .

Pak **rovnice tečné nadroviny** v \mathbb{R}^{n+1} má tvar

$$x_{n+1} = f(a) + f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + f'_{x_n}(a)(x_n - a_n),$$

kde $a = [a_1, \dots, a_n]$. Rovnici lze zapsat ve tvaru $f'_{x_1}(a)x_1 + \dots + f'_{x_n}(a)x_n - x_{n+1} + c = 0$, kde $c \in \mathbb{R}$.

50. Definice Vektor \mathbf{n} definovaný vztahem $\mathbf{n} = (f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_n}(a), -1) \in V_{n+1}$ se nazývá **normálový vektor** tečné nadroviny funkce f v bodě $[a, f(a)]$. Přímka v \mathbb{R}^{n+1} definovaná vektorovou rovnicí

$$[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] = [a_1, \dots, a_n, f(a_1, \dots, a_n)] + t(f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_n}(a), -1), t \in \mathbb{R},$$

se nazývá **normála** grafu Gf v bodě $[a, f(a)]$.

51. Poznámka

1. Diferenciálu $d_h f(a)$ lze využít k přibližnému vyjádření přírůstku funkce. Platí

$$d_h f(a) \approx f(a+h) - f(a).$$

2. **Diferenciál vyjadřuje přírůstek na tečné nadrovině.**

3. Výraz $f(x, y)dx + g(x, y)dy$ je totální diferenciál nějaké funkce $\Leftrightarrow f'_y = g'_x$.

52. Příklad Spočítejte diferenciál funkce $f(x, y) = \arctg(x + \ln y)$ v bodě $a = [0, 1]$ při přírůstku $h = (-0.2, 0.1)$.

Řešení Spočteme nejprve parciální derivace funkce f . Platí

$$f'_x = \frac{1}{1 + (x + \ln y)^2}, f'_x(a) = 1, \quad f'_y = \frac{1}{y(1 + (x + \ln y)^2)}, f'_y(a) = 1.$$

Odtud a z obecného tvaru diferenciálu plyne $d_h f(a) = f'_x(a)h_1 + f'_y(a)h_2 = 1 \cdot (-0.2) + 1 \cdot 0.1 = -0.1$.

53. Příklad Určete rovnici tečné roviny a normály k paraboloidu $f(x, y) = x^2 + y^2$ v bodě $[-2, 1, ?]$.

Řešení Dopočítáme chybějící souřadnici. Platí: $z = f(-2, 1) = 5$. Dále spočteme parciální derivace $f'_x = 2x$, $f'_x(-2, 1) = -4$, $f'_y = 2y$, $f'_y(-2, 1) = 2$. Dosadíme do rovnice tečné roviny. Dostáváme $z - 5 = -4(x + 2) + 2(y - 1)$. Odtud $4x - 2y + z + 5 = 0$. Normálový vektor je $n = (4, -2, 1)$. Rovnice normály má tvar $[x, y, z] = [-2, 1, 5] + t(4, -2, 1)$, kde $t \in \mathbb{R}$.

54. Definice Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $k \geq 2$. Řekneme, že funkce f je **k -krát diferencovatelná** v a , když existuje okolí $K(a, \delta)$ v němž jsou diferencovatelné všechny parciální derivace řádu $0 \leq m \leq k - 2$ a v bodě a jsou diferencovatelné všechny parciální derivace řádu $k - 1$. **Diferenciál k -tého řádu** funkce f je pak zobrazení $d^k f(x) : V_n^k \rightarrow \mathbb{R}$ definované vztahem

$$d^k f(x)(u_1, \dots, u_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} u_{11} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} u_{1n} \right) \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_1} u_{k1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} u_{kn} \right) f(x),$$

kde $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{in}) \in V_n$.

Speciálně pro $u_1 = \dots = u_k = h = (h_1, \dots, h_n) \in V_n$ píšeme

$$d_h^k f(x) = d^k f(x)(h, \dots, h) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right)^k f(x).$$

55. Poznámka K exaktnímu vyjádření $d_h^k f(x)$ lze použít tzv. **multinomickou větu**.

Buďte $n \geq 2, k \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$(a_1 + \dots + a_n)^k = \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \binom{k}{k_1, \dots, k_n} a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n}, \quad \text{kde} \binom{k}{k_1, \dots, k_n} = \frac{k!}{k_1! \dots k_n!}.$$

Součet probíhá přes všechny rozklady (kompozice) čísla k na právě n sčítanců, v nichž závisí na pořadí sčítanců.

56. Poznámka Pro $n = 2$ dostáváme známou **binomickou větu**

$$(a_1 + a_2)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a_1^i a_2^{k-i}.$$

57. Poznámka Někdy diferenciálem k -tého řádu funkce f v bodě x nazýváme pouze zobrazení $D^k f(x) : V_n \rightarrow \mathbb{R}$, $D^k f(x)(h) = d^k f(x)(h_1, \dots, h_k) = d_h^k f(x)$.

58. Věta Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in Df$. Nechť f má v nějakém $K(a, \delta)$ parciální derivace řádu k , které jsou spojité v a . **Pak existuje $d^k f(a)$.**

59. Věta Nechť funkce $u(x, y), v(x, y)$ mají parciální derivace prvního řádu v bodě $[x_0, y_0]$. Nechť $u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0)$. Je-li funkce $f(u, v)$ diferencovatelná v bodě $[u_0, v_0]$, pak **složená funkce** $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ má parciální derivace prvního řádu v $[x_0, y_0]$ a platí

$$F'_x(x_0, y_0) = f'_u(u_0, v_0)u'_x(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0)v'_x(x_0, y_0),$$

$$F'_y(x_0, y_0) = f'_u(u_0, v_0)u'_y(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0)v'_y(x_0, y_0).$$

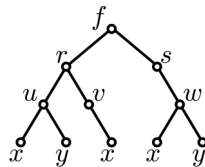
60. Příklad Buď $f = f(u(x, y), v(x, y))$. Spočítejte f''_{xy} .

Řešení Nejprve určíme f'_x . Platí $f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x$. Nyní $f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_x) = \frac{\partial}{\partial y}(f'_u u'_x + f'_v v'_x) = \frac{\partial}{\partial y}(f'_u)u'_x + f'_v u''_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}(f'_v)v'_x + f'_v v''_{xy} = (f''_{uu}u'_y + f''_{uv}v'_y)u'_x + f'_u u''_{xy} + (f''_{vu}u'_y + f''_{vv}v'_y)v'_x + f'_v v''_{xy} = f''_{uu}u'_x u'_y + f''_{uv}u'_x v'_y + f''_{vu}u'_y v'_x + f''_{vv}v'_x v'_y + f'_u u''_{xy} + f'_v v''_{xy}$.

61. Poznámka K nalezení parciální derivace složené funkce ve zcela obecné situaci poskytneme aspoň návod. Předpokládejme, že f je několikanásobně složená a má n proměnných. Postupujeme tak, že nejprve analyzujeme strukturu složení funkce f . To provedeme tak, že nakreslíme schéma složení, tzv. **strom**. Strom se skládá z uzlů a hran. Uzly reprezentují proměnné a funkce, hrany závislosti mezi nimi. Uzly znázorníme v obrázku body nebo kolečky, hrany úsečkami, které uzly spojují. Kolik vede různých cest od uzlu f k x_i , tolik bude mít derivace f'_{x_i} sčítanců. Každý sčítanec je součinem tolika činitelů, kolik hran je na cestě z f do x_i .

62. Příklad Analyzujte strukturu složení funkce $f(x, y) = \sqrt[3]{x^y + \ln^2 x} \cdot \arctg\left(1 + \frac{x}{y}\right)$, nakreslete odpovídající strom a spočítejte f'_x, f'_y .

Řešení Označme $f(r, s) = r \cdot s$, $r(u, v) = \sqrt[3]{u + v^2}$, $s(w) = \arctg w$, $u(x, y) = x^y$, $v(x) = \ln x$, $w(x, y) = 1 + \frac{x}{y}$. Nakreslíme schéma složení, viz Obrázek 4.



Obrázek 4: Schéma složení funkce $f(x, y) = \sqrt[3]{x^y + \ln^2 x} \cdot \arctg\left(1 + \frac{x}{y}\right)$

Graf na obrázku se nazývá strom. Z jeho struktury získáme vzorce pro hledané parciální derivace. Platí

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Odtud plyne

$$f'_x = \frac{1}{3} \frac{yx^{y-1} + \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{(x^y + \ln x)^2}} \cdot \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \sqrt[3]{x^y + \ln^2 x} \cdot \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y},$$

$$f'_y = \frac{1}{3} \frac{x^y \ln x}{\sqrt[3]{(x^y + \ln x)^2}} \cdot \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \sqrt[3]{x^y + \ln^2 x} \cdot \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{-x}{y^2}.$$

63. Definice Budťe $a \in \mathbb{R}^n, h \in V_n, h \neq 0$. Množina $\{x \in \mathbb{R}^n, x = a + th, t \in \langle 0, 1 \rangle\}$ se nazývá úsečka v \mathbb{R}^n o krajních bodech $a, a + h$.

64. Věta Taylorova věta Budť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \Omega \subseteq Df$ otevřená množina. Nechť $m \in \mathbb{N}$ a pro libovolné $x \in \Omega$ existuje $d_h^{m+1}f(x)$. Budť $a \in \Omega, h = (h_1, \dots, h_n) \in V_n$ a nechť úsečka $a, a + h$ leží v Ω . Pak existuje $t \in \mathbb{R}, 0 < t < 1$ tak, že platí

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{1!} d_h f(a) + \frac{1}{2!} d_h^2 f(a) + \dots + \frac{1}{m!} d_h^m f(a) + \frac{1}{(m+1)!} d_h^{m+1} f(a + th).$$

65. Poznámka

- Polynom $T_m(x) = f(a) + \frac{1}{1!} d_h f(a) + \frac{1}{2!} d_h^2 f(a) + \dots + \frac{1}{m!} d_h^m f(a)$ se nazývá **Taylorův polynom** m -tého řádu funkce f v bodě a .
- Funkce $R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!} d_h^{m+1} f(a + th)$ **Taylorův zbytek**.
- Formule uvedená v Taylorově větě se nazývá Taylorův vzorec nebo též Taylorova formule.
- Pro $a = [0, \dots, 0]$ mluvíme o **Maclaurinově vzorci**.
- Věta platí i za slabšího předpokladu, když $d_h^{m+1}f(x)$ existuje v každém bodě x úsečky $a, a + h$. Zbytek $R_m(x)$ vyjadřuje chybu, které se dopustíme, nahradíme-li funkci f na Ω polynomem $T_m(x)$. Chybu $R_m(x)$ nedokážeme přesně spočítat, ale v řadě případů ji dokážeme uspokojivě odhadnout. Při konstrukci polynomu $T_m(x)$ používáme vztah $dx = h = x - a$.

66. Příklad Spočtete Taylorův polynom $T_2(x, y)$ funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x + \ln y)$ v bodě $a = [0, 1]$.

Řešení Parciální derivace prvního řádu známe z Příkladu 52. Dále víme, že $dx = x$ a $dy = y - 1$. Tedy první diferenciál funkce f v a má tvar $d_h f(a) = f'_x(a)dx + f'_y(a)dy = dx + dy = x + y - 1$.

Pro parciální derivace druhého řádu platí:

$$f''_{xx} = \frac{-2(x + \ln y)}{(1 + (x + \ln y)^2)^2}, f''_{xy} = \frac{-2(x + \ln y)}{y(1 + (x + \ln y)^2)^2}, f''_{yy} = \frac{-(1 + x + \ln y)^2}{y^2(1 + (x + \ln y)^2)^2},$$

$$f''_{xx}(a) = 0, f''_{xy}(a) = 0, f'_{yy}(a) = -1.$$

Druhý diferenciál funkce f v bodě a je tvaru

$$d_h f(a) = f''_{xx}(a)dx^2 + 2f'_{xy}(a)dx dy + f''_{yy}(a)dy^2 = -dy^2 = -(y - 1)^2.$$

Diferenciály dosadíme do Taylorovy formule $T_2(x, y) = f(a) + \frac{1}{1!} d_h f(a) + \frac{1}{2!} d_h^2 f(a)$ a provedeme úpravu. Platí $T_2(x, y) = -\frac{3}{2} + x + 2y - \frac{1}{2}y^2$.

5 Lokální extrémy

67. Definice Řekneme, že $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $a \in Df$:

1. **lokální maximum**, když $\exists K(a, \delta) \subseteq Df$ tak, že $\forall x \in K(a, \delta)$ platí $f(x) \leq f(a)$.
2. **lokální minimum**, když $\exists K(a, \delta) \subseteq Df$ tak, že $\forall x \in K(a, \delta)$ platí $f(a) \leq f(x)$.

68. Poznámka

1. Lokální minima a maxima funkce f se nazývají **lokální extrémy**.
2. Jsou-li nerovnosti na $K(a, \delta) - \{a\}$ splněny ostře, tzn. $<$, pak se extrémy nazývají **ostré extrémy**.
3. Bod $a \in Df$ se nazývá **stacionární bod**, když pro každé $i = 1, \dots, n$ platí $f'_{x_i}(a) = 0$.

69. Věta

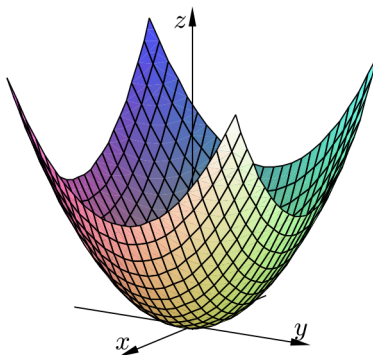
1. Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $a \in Df$ lokální extrém a pro každé $i = 1, \dots, n$ existuje $f'_{x_i}(a)$. Pak pro každé $i = 1, \dots, n$ platí $f'_{x_i}(a) = 0$, což znamená, že **grad** $f(a)$ je nulový vektor.
2. Funkce f může mít **lokální extrémy** pouze ve **stacionárních bodech**, nebo v bodech, v nichž **neexistuje aspoň jedna parciální derivace prvního řádu**.

70. Příklad Určete lokální extrémy funkce:

- a) $f(x, y) = x^2 + y^2$;
- b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- c) $f(x, y) = x^2 - y^2$.

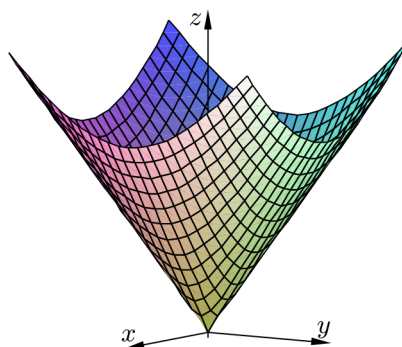
Řešení

- a) Určíme první parciální derivace $f'_x = 2x$ a $f'_y = 2y$. Odtud plyne, že parciální derivace prvního řádu existují pro každé $[x, y] \in \mathbb{R}^2$. Zřejmě jediný stacionární bod je bod $a = [0, 0]$ a **grad** $f(a) = (0, 0)$. V bodě a nastává lokální minimum. Viz Obrázek 5.



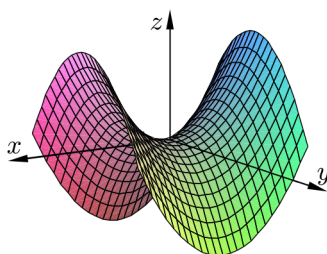
Obrázek 5: $f(x, y) = x^2 + y^2$, tj. rotační paraboloid

- b) $f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ a $f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Parciální derivace neexistují v bodě $a = [0, 0]$. V bodě a je lokální minimum funkce f . Viz Obrázek 6.



Obrázek 6: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, tj. „horní část“ kuželové plochy

- c) $f'_x = 2x$ a $f'_y = -2y$. Parciální derivace prvního řádu existují pro libovolný bod $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ a zřejmě jediný stacionární bod je bod $a = [0, 0]$ a $\mathbf{grad} f(a) = (0, 0)$. Zřejmě platí $\forall x \neq 0 : f(x, 0) = x^2 > 0$. Podobně $\forall y \neq 0 : f(0, y) = -y^2 < 0$. Z Definice 67 plyne, že f nemá v bodě a lokální extrém. Viz Obrázek 7.



Obrázek 7: $f(x, y) = x^2 - y^2$, tj. hyperbolický paraboloid

71. Definice Bud' $a \in Df$ a necht' $\forall i, j = 1, \dots, n$ existuje $f''_{x_i x_j}(a)$. Položme

$$D_k(a) = \begin{vmatrix} f''_{x_1 x_1}(a) & \dots & f''_{x_1 x_k}(a) \\ & \ddots & \\ f''_{x_k x_1}(a) & \dots & f''_{x_k x_k}(a) \end{vmatrix}.$$

Následující věta ukazuje, jak lze subdeterminantů $D_k(a)$ využít k vyšetření lokálních extrémů.

72. Věta (Sylvestrovo rozhodovací kritérium)

Bud' $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in Df$ stacionární bod. Necht' existuje $d^2 f(a)$. Platí

1. Jestliže $D_1(a) > 0, D_2(a) > 0, \dots, D_n(a) > 0$, pak f má v a **ostré lokální minimum**.
2. Jestliže $D_1(a) < 0, D_2(a) > 0, \dots, D_n(a)(-1)^n > 0$, pak f má v a **ostré lokální maximum**.
3. Necht' nenastane ani (1) ani (2) a $\forall k = 1, \dots, n$ platí $D_k(a) \neq 0$. Pak v bodě a **není lokální extrém**.

73. Poznámka Nenastane-li ani jedna z možností (1), (2), (3), pak může, ale nemusí být v a lokální extrém. V této situaci je nutno vyšetřit chování f v okolí $K(a, \delta)$ podrobněji. Viz bod 5 Algoritmu 74. Věty 69 a 72 poskytují dobrý návod jak při hledání lokálních extrémů postupovat.

74. Algoritmus pro nalezení lokálních extrémů funkce n -proměnných.

1. Spočítáme parciální derivace prvního řádu funkce f a položíme je rovny nule. Tím získáme systém rovnic.
2. Určíme všechna řešení a systému. Řešení jsou stacionární body. V nich může, ale nemusí být extrém. Dále nalezneme všechny body, v nichž neexistuje aspoň jedna první parciální derivace.
3. Spočteme parciální derivace druhého řádu a sestavíme matici funkcí f'' . Určíme číselné matice $f''(a)$ odpovídající stacionárním bodům.
4. Pro matice $f''(a)$ určíme hlavní subdeterminanty $D_k(a)$ pro $k = 1, \dots, n$ a podle Sylvestrova kritéria 72 rozhodneme, zda v a nastává extrém.
5. Nelze-li rozhodnout podle kritéria, použijeme následovně definici extrému. Spočteme $f(a)$. Zvolíme libovolný vektor v a spočteme $f(a + v)$. Pokusíme se dokázat jednu z nerovností $f(a) \geq f(a + v)$ (max), $f(a) \leq f(a + v)$ (min). Pokud se nedaří tyto nerovnosti dokázat, zkoušíme volit speciální podmnožiny okolí bodu a . Cílem volby je ukázat, že na zvolené části okolí není splněna definiční podmínka pro extrém, tj. dokázat, že v a není extrém. Podobně postupujeme v případě bodů v nichž neexistuje aspoň jedna parciální derivace prvního řádu.

75. Příklad Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 9y$.

Řešení Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule.

Vznikne soustava rovnic $f'_x = 2x + y - 6 = 0$, $f'_y = 2y + x - 9 = 0$. Parciální derivace existují pro každé $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ a proto jedinými kandidáty na lokální extrémy jsou stacionární body, které nalezneme vyřešením vzniklé soustavy rovnic. Soustava je lineární, můžeme tedy použít metod lineární algebry.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & -12 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right).$$

Nalezli jsme stacionární bod $a = [1, 4]$. Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matici $f''(a)$. Platí $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = 1$, $f''_{yy} = 2$. Odtud plyne, že

$$f'' = f''(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matice $f''(a)$ a použijeme Sylvestrovo kritérium 72. Platí $D_1(a) = 2 > 0$ a $D_2(a) = -3 < 0$. Podle kritéria nastává v bodě $a = [1, 4]$ ostré lokální maximum funkce f .

6 Vázané a globální extrémy

76. Definice Budte $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $m < n$, $g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkce. Položme $V = \{x \in \mathbb{R}^n; g_1(x) = 0 \wedge \dots \wedge g_m(x) = 0\}$.

Řekneme, že f má v bodě $a \in Df \cap V$ **vázané lokální maximum** podmínkou $a \in V$, když $\exists K(a, \delta)$ tak, že $\forall x \in K(a, \delta) \cap Df \cap V$ platí $f(x) \leq f(a)$.

Řekneme, že f má v bodě $a \in Df \cap V$ **vázané lokální minimum** podmínkou $a \in V$, když $\exists K(a, \delta)$ tak, že $\forall x \in K(a, \delta) \cap Df \cap V$ platí $f(a) \leq f(x)$.

Vázaná lokální minima a maxima funkce f se nazývají **vázané lokální extrémy**.

77. Poznámka Podmínka $a \in V$ se nazývá vazba a rovnice $g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$ se nazývají vazebné rovnice nebo též **vazebné podmínky**.

78. Poznámka Buď $m = 1$. V některých případech lze z rovnice $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ jednoznačně určit některé x_i . Například $x_i = \bar{g}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Pak za x_i dosadíme do $f(x_1, \dots, x_n)$ výraz \bar{g} a dostáváme funkci $F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, která má pouze $n - 1$ proměnných. Úloha o nalezení vázaných extrémů funkce f s vazbou V je tím převedena na ekvivalentní úlohu o nalezení lokálních extrémů funkce F . V případech, kdy nelze výše uvedeného postupu použít, vede v řadě případů k řešení tzv. **metoda Lagrangeových multiplikátorů** (viz následující Věta 79).

79. Věta (Lagrange) Budte $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $m < n$ funkce spojitě diferencovatelné na otevřené množině Ω obsahující V a necht' $\forall x \in \Omega$ platí, že hodnost matice $\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right]_{i,j}$ je rovna m . Buď $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkce definovaná vztahem

$$L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n). \quad (1)$$

Funkce L se nazývá Lagrangeova funkce a konstanty $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ se nazývají Lagrangeovy multiplikátory. Necht' systém $m + n$ rovnic o $m + n$ neznámých

$$\begin{aligned} L'_{x_1} &= 0, \\ &\vdots \\ L'_{x_n} &= 0, \\ g_1 &= 0, \\ &\vdots \\ g_m &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

má řešení $[a_1, \dots, a_n, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0]$.

Má-li L v bodě $a = [a_1, \dots, a_n]$ pro $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$ lokální extrém, pak f má v a vázaný lokální extrém téhož typu s vazbou $a \in V$.

Nemá-li L lokální extrém, neplyne odtud, že f nemá vázaný lokální extrém.

80. Poznámka

1. Výraz $\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right]_{i,j}$ označuje matici o m řádcích a n sloupcích.
2. Podmínka, že hodnost matice $\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right]_{i,j}$ je rovna m znamená, že žádná z rovnic $g_i(x) = 0$ není zbytečná.

81. Příklad Vyšetřete vázané extrémy $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ s vazbou $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení Z vazby nelze vyjádřit jednoznačně žádnou proměnnou. Sestavíme tedy Lagrangeovu funkci

$$L(x, y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a přidáme vazebnou rovnici:

$$L'_x = -4 + 2\lambda x = 0,$$

$$L'_y = -3 + 2\lambda y = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Získali jsme tak soustavu tří rovnic o třech neznámých x, y, λ . Tuto soustavu musíme nyní vyřešit. Z první rovnice plyne $x = \frac{2}{\lambda}$ a ze druhé $y = \frac{3}{2\lambda}$. Dosazením za x a y do rovnice vazby dostáváme

$$\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1.$$

Odtud po krátké úpravě plyne $\lambda^2 = \frac{25}{4}$ a tedy $\lambda = \pm \frac{5}{2}$.

Pro $\lambda = \frac{5}{2}$ dostáváme $x = \frac{4}{5}, y = \frac{3}{5}$. Získali jsme stacionární bod Lagrangeovy funkce $a_1 = [\frac{4}{5}, \frac{3}{5}]$.

Podobně pro $\lambda = -\frac{5}{2}$ dostáváme $x = -\frac{4}{5}, y = -\frac{3}{5}$. Nalezli jsme druhý stacionární bod $a_2 = [-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}]$.

Nyní vyšetříme nalezené stacionární body pomocí druhé derivace Lagrangeovy funkce. Určíme druhé parciální derivace a sestavíme matice $L'', L''(a_1), L''(a_2)$. Platí

$$L'' = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}, \quad L''(a_1) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad L''(a_2) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

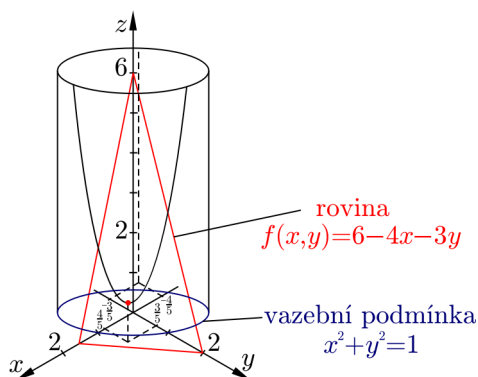
Nyní můžeme použít Sylvestrovo kritérium.

Pro a_1 platí $D_1(a_1) = 5, D_2(a_1) = 25$. Odtud plyne, že L má v bodě $a_1 = [\frac{4}{5}, \frac{3}{5}]$ pro $\lambda = \frac{5}{2}$ lokální minimum a podle Věty 79 má f ve stejném bodě vázané lokální minimum vzhledem k dané vazbě.

Analogicky pro a_2 platí $D_1(a_2) = -5, D_2(a_2) = 25$. Odtud plyne, že L má v bodě $a_2 = [-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}]$ pro $\lambda = -\frac{5}{2}$ lokální maximum a f má v bodě a_2 vázané lokální maximum. Tím je úloha vyřešena.

Pokusme se ještě vysvětlit **geometrický význam** celé úlohy.

Grafem funkce $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ je rovina v obecné poloze. Vazebná rovnice $x^2 + y^2 = 1$ je rovnice kružnice ležící v rovině xy . Hledáme tedy extrémy na křivce, která vznikne průnikem válcové plochy určené touto kružnicí s danou rovinou. Průnikovou křivkou je elipsa. Situace je znázorněna na následujícím Obrázku 8. Poznamenejme jen, že na obrázku je zobrazena jen část elipsy a pouze vázané lokální minimum. Polohu vázaného lokálního maxima si jistě pozorný čtenář dokáže sám představit, když si dopočítá z -ovou souřadnici bodu a_2 .)



Obrázek 8: Vázané extrémy funkce $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ s podmínkou $x^2 + y^2 = 1$

82. Příklad Vyšetřete vázané extrémy $f(x, y) = x^2 - y^2$ s vazbou $2x - y + 1 = 0$.

Řešení Lagrangeova funkce je tvaru

$$L(x, y) = x^2 - y^2 + \lambda(2x - y + 1).$$

Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a přidáme vazebnou rovnici

$$L'_x = 2x + 2\lambda = 0,$$

$$L'_y = -2y - \lambda = 0,$$

$$2x - y + 1 = 0.$$

Získali jsme soustavu tří rovnic o třech neznámých x, y, λ . Z první rovnice plyne $\lambda = -x$ a ze druhé $\lambda = -2y$. Odtud dostáváme $x = 2y$.

Dosazením do vazby a krátkým výpočtem zjistíme, že existuje jediný stacionární bod $a = [-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]$ pro $\lambda = \frac{2}{3}$.

Nyní vyšetříme stacionární bod pomocí druhé derivace Lagrangeovy funkce. Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice $L'', L''(a)$. Platí

$$L'' = L''(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Protože $D_1(a) = 2 > 0$ a $D_2(a) = -4 < 0$ nemá Lagrangeova funkce L podle Sylvestrova kritéria lokální extrém.

Pozor! Odtud ale neplyne, že f nemá vázaný extrém s danou vazbou. Ukážeme nyní, že f vázaný extrém má. Budeme postupovat tak, že úlohu o vázaném extrému převedeme na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce jedné proměnné.

Z vazby vyjádříme y . Platí $y = 2x + 1$. Dosadíme do zadané funkce. Dostaneme

$$F(x) = f(x, 2x + 1) = x^2 - (2x + 1)^2.$$

Odtud $F'(x) = -6x - 4$. Nalezneme stacionární bod $x_0 = -\frac{2}{3}$. Protože platí $F''(x) = -6 < 0$ je v bodě $x_0 = -\frac{2}{3}$ lokální maximum funkce $F(x)$. Tedy funkce $f(x, y)$ má v bodě $[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]$ vázané lokální maximum.

83. Definice Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \Omega \subseteq Df, a \in \Omega$.

Řekneme, že f má v a **globální maximum na Ω** , když $\forall x \in \Omega$ platí $f(x) \leq f(a)$. Klademe $\max f(\Omega) = f(a)$.

Řekneme, že f má v a **globální minimum na Ω** , když $\forall x \in \Omega$ platí $f(a) \leq f(x)$. Klademe $\min f(\Omega) = f(a)$.

Hodnoty $\max f(\Omega)$ a $\min f(\Omega)$ se nazývají globální maximum a globální minimum funkce f na množině Ω . Místo globální též říkáme **absolutní**.

84. Věta (Weierstrasse) Buď $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ohraničená, uzavřená množina a $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá funkce na $\Omega \subseteq Df$. Platí následující tvrzení:

1. f je ohraničená na Ω .
2. Existují $a, b \in \Omega$ tak, že $\forall x \in \Omega : f(a) \leq f(x) \leq f(b)$,
tzn. existuje $\min f(\Omega) = f(a)$ a $\max f(\Omega) = f(b)$.
3. Nechť $\min f(\Omega)$ nastane v bodě $a \in \Omega$. Pak f má v a lokální minimum, nebo $a \in h(\Omega)$.
Analogicky nechť $\max f(\Omega)$ nastane v bodě $a \in \Omega$. Pak f má v a lokální maximum, nebo $a \in h(\Omega)$.

85. Poznámka

1. Není-li Ω uzavřená, nebo ohraničená, pak $\min f(\Omega)$ a $\max f(\Omega)$ nemusí existovat.

2. Pokud $\min f(\Omega)$, $\max f(\Omega)$ existují, jsou určena jednoznačně. Funkce však může nabývat těchto hodnot obecně ve více bodech.
3. Hranici množiny Ω lze často popsat pomocí rovnic. Vyšetřování hranice tedy vede k vázaným extrémům.

Weierstrassova věta poskytuje návod pro nalezení $\min f(\Omega)$ a $\max f(\Omega)$. Jak postupovat popíšeme v následujícím algoritmu.

86. Poznámka Algoritmus pro nalezení globálních extrémů.

1. Nalezneme lokální extrémy funkce f a z nich vybereme ty, které leží v Ω . Nechť \mathbb{A} označuje množinu funkčních hodnot v nalezených bodech lokálních extrémů.
2. Nalezneme vázané extrémy funkce f s vazbou $V = h(\Omega)$. Nechť \mathbb{B} označuje množinu funkčních hodnot v nalezených bodech vázaných extrémů a v bodech, které jsou průniky různých vazeb.
3. Nechť $M = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$. Pak globální maximum $\max f(\Omega) = \max M$ a globální minimum $\min f(\Omega) = \min M$.

87. Příklad Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2$ na obdélníku Ω , který je určen body $A = [0, 0]$, $B = [2, 0]$, $C = [2, 1]$, $D = [0, 1]$.

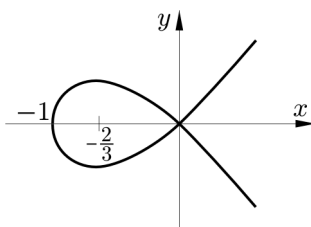
Řešení

1. Nalezneme lokální extrémy funkce f . Spočteme parciální derivace $f'_x = 2x - 2$ a $f'_y = 2y - 1$ a nalezneme stacionární bod $s = [1, \frac{1}{2}]$. Matice druhé derivace je rovna $f'' = f''(s) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hlavní minory této matice jsou kladné a proto v bodě s nastává lokální minimum funkce f . Platí $f(s) = 0$. Tedy $\mathbb{A} = \{0\}$.
2. Hranice množiny Ω je tvořena čtyřmi úsečkami. Vyšetření hranice $h(\Omega)$ se tedy rozpadá na vyřešení čtyř úloh na vázané extrémy s funkcí f a vazbami $V_1 : y = 0$, $V_2 : x = 2$, $V_3 : y = 1$ a $V_4 : x = 0$. Pozor! Při této formulaci je zapotřebí zvlášť vyšetřit body A, B, C, D , které jsou průniky různých vazeb. Úlohy f, V_i , kde $i = 1, 2, 3, 4$ převedeme na ekvivalentní úlohy nalezení lokálních extrémů funkcí F_i , kde $F_1(x) = f(x, 0) = (x - 1)^2 + \frac{1}{4}$, $F_2(y) = f(2, y) = (y - \frac{1}{2})^2 + 1$, $F_3(x) = f(x, 1) = (x - 1)^2 + \frac{1}{4}$, $F_4(y) = f(0, y) = (y - \frac{1}{2})^2 + 1$.
Snadno se zjistí, že úloha f, V_1 má vázané minimum v bodě $a = [1, 0]$;
 f, V_2 má vázané minimum v $b = [2, \frac{1}{2}]$;
 f, V_3 má vázané minimum v $c = [1, 1]$ a f, V_4 má vázané minimum v $d = [0, \frac{1}{2}]$.
3. Spočteme funkční hodnoty v nalezených bodech. Platí $f(a) = f(c) = \frac{1}{4}$, $f(b) = f(d) = 1$ a $f(A) = f(B) = f(C) = f(D) = \frac{5}{4}$. Odtud $\mathbb{B} = \{\frac{1}{4}, 1, \frac{5}{4}\}$. $M = \{0, \frac{1}{4}, 1, \frac{5}{4}\}$. Odtud $\max f(\Omega) = \max M = \frac{5}{4}$ a nastává v bodech A, B, C, D . Dále $\min f(\Omega) = \min M = 0$ a nastává v bodě s .

7 Implicitní funkce

88. Příklad Uvažujme rovnici $f(x, y) = 0$, kde $f(x, y)$ je funkce dvou proměnných a necht' $\Omega = \{[x, y] \in Df; f(x, y) = 0\}$ je množina všech řešení této rovnice. Na následujících příkladech ukažme, že množina Ω může být velmi rozmanitá.

1. Pro $f(x, y) = x^6 + x^2 + 1$ je $\Omega = \emptyset$.
2. Pro $f(x, y) = x^4 + y^4$ je $\Omega = \{[0, 0]\}$.
3. Pro $f(x, y) = xy - |xy|$ je $\Omega = \{[x, y]; x, y \geq 0 \vee x, y \leq 0\}$, tj. celý první a třetí kvadrant.
4. Pro $f(x, y) = x^2 - y^2$ je $\Omega = \{[x, x]; x \in \mathbb{R}\} \cup \{[x, -x]; x \in \mathbb{R}\}$. Množinu Ω tedy tvoří dvojice přímek $y = x$ a $y = -x$.
5. Pro $f(x, y) = x^3 + x^2 - y^2$ se nedá struktura množiny Ω již snadno uhodnout. Snadno se ale spočítá, že $y = \pm\sqrt{x^3 + x^2}$. Odtud plyne, že množina Ω bude symetrická podle osy x . Stačí tedy vyšetřit průběh funkce $g(x) := \sqrt{x^3 + x^2}$. Viz Obrázek 9.



Obrázek 9: Graf funkce dané implicitně rovnicí $x^3 + x^2 - y^2 = 0$

Je zřejmé, že množina Ω není grafem žádné funkce. V okolí některých konkrétních bodů ji však lze za graf funkce považovat. Tyto úvahy přirozeným způsobem vedou k zavedení pojmu funkce dané implicitně rovnicí.

89. Definice Buď $A = [x_0, y_0] \in Df$ bod definičního oboru funkce $f(x, y)$ takový, že $A \in \Omega$. Existuje-li okolí $K(A, \delta)$ tak, že $\Omega \cap K(A, \delta)$ je totožná s grafem nějaké funkce $y = g(x)$, pak říkáme, že funkce $g(x)$ je v okolí bodu A určena **implicitně rovnicí** $f(x, y) = 0$.

90. Věta (O existenci) Necht' $f(x, y)$ je spojitá na δ -okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ a $A \in \Omega$. Má-li funkce $f(x, y)$ spojitou parciální derivaci $f'_y(x, y)$ v bodě A a platí $f'_y(A) \neq 0$, pak existuje okolí bodu A v němž je rovnicí $f(x, y) = 0$ definována implicitně právě jedna spojitá funkce $y = g(x)$.

91. Poznámka Věta 90 nemá konstruktivní charakter, tj. neumožňuje funkci g nalézt. Funkce g daná implicitně rovnicí $f(x, y) = 0$ může být totiž vyšší funkce, i když f je elementární. Podmínka $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ je postačující, nikoli však nutná pro existence implicitní funkce. Viz například rovnice $x - y^3 = 0$.

92. Věta (O derivaci) Necht' jsou splněny předpoklady Věty 90 a necht' f má v okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ spojitě parciální derivace prvního řádu. Pak má funkce $y = g(x)$, která je v okolí A určena implicitně rovnicí $f(x, y) = 0$ derivaci v bodě x_0 a platí

$$g'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

93. Poznámka Vysvětleme hlavní ideu důkazu. Rovnici $f(x, y) = 0$ zderivujeme podle x , přičemž f považujeme za složenou funkci proměnné x . Tedy y považujeme ze funkci proměnné x . Platí $f'_x \cdot x'_x + f'_y \cdot$

$y'_x = 0 \Leftrightarrow f'_x + f'_y y' = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$. Analogicky lze počítat i vyšší derivace. Odvoďme vzorec pro y'' . Rovnici $f'_x + f'_y y' = 0$ znovu zderivujeme podle x . $f''_{xx} + f''_{xy} y' + (f''_{yx} + f''_{yy} y') y' + f'_y y'' = 0$. Odtud po dosazení za y' a krátké úpravě dostaneme

$$y'' = -\frac{f''_{xx}(f'_y)^2 - 2f''_{xy}f'_x f'_y + f''_{yy}(f'_x)^2}{(f'_y)^3}.$$

94. Příklad Nalezněte $y'(0)$ pro funkci danou implicitně rovnicí $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$.

Řešení Nejprve postupujme podle vzorce $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$. Spočteme $F'_x = ye^{xy} - 2x$ a $F'_y = xe^{xy} + 3y^2$. Odtud plyne

$$y' = -\frac{ye^{xy} - 2x}{xe^{xy} + 3y^2} = \frac{2x - ye^{xy}}{xe^{xy} + 3y^2}.$$

Ke stejnému výsledku lze dojít zderivováním zadané rovnice podle x . Platí

$$\begin{aligned} e^{xy}(y + xy') - 2x + 3y^2 y' &= 0. \\ y'(xe^{xy} + 3y^2) &= 2x - ye^{xy}. \end{aligned}$$

Odtud však opět plyne

$$y' = \frac{2x - ye^{xy}}{xe^{xy} + 3y^2}.$$

Abychom mohli do posledně uvedeného vztahu dosadit, musíme vědět čemu je rovno y . To zjistíme tak, že dosadíme $x = 0$ do zadané rovnice. Platí $e^0 - 0 + y^3 = 0$. Odtud $y^3 = -1$ a tedy $y = -1$. Nyní $y'(0) = \frac{2 \cdot 0 - (-1)e^{0 \cdot (-1)}}{3(-1)^2 + 0 \cdot e^{0 \cdot (-1)}} = \frac{1}{3}$. Z kladnosti derivace plyne, že funkce daná implicitně je v bodě $x = 0$ rostoucí.

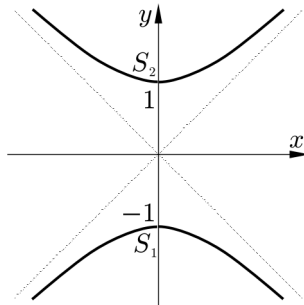
95. Příklad Nalezněte lokální extrémy funkce dané implicitně rovnicí $x^2 - y^2 + 1 = 0$.

Řešení Nejprve vypočteme derivaci y' podle vzorce $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$. Platí $y' = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$.

Podobně zderivováním rovnice $x^2 - y^2 + 1 = 0$ dostáváme $2x - 2yy' = 0$, odkud plyne $y' = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}$. Derivace existuje kdykoliv, když $y' \neq 0$. Nalezneme stacionární body. Zřejmě $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ze zadané rovnice dosazením $x = 0$ dopočítáme y .

Platí $y^2 = 1$ a odtud $y = -1$ nebo $y = 1$. Získali jsme dva stacionární body $S_1 = [0, -1]$ a $S_2 = [0, 1]$. Dále spočteme y'' . Rovnici $2x - 2yy' = 0$ znovu zderivujeme podle x . Platí $2 - 2y'y' - 2yy'' = 0$. Odtud $y'' = \frac{2 - 2(y')^2}{2y} = \frac{1 - (y')^2}{y}$.

Pomocí druhé derivace rozhodneme existenci extrémů ve stacionárních bodech. Pro bod S_1 platí $y''(0) = \frac{1 - (\frac{0}{-1})^2}{-1} = -1 < 0$. Tedy v bodě S_1 je lokální maximum. Pro bod S_2 platí $y''(0) = \frac{1 - (\frac{0}{1})^2}{1} = 1 > 0$. V S_2 je lokální minimum. Viz Obrázek 10.



Obrázek 10: Lokální extrémy funkce dané implicitně rovnicí $x^2 - y^2 + 1 = 0$

Část II

Integrální počet funkcí více proměnných

8 Integrál přes n -rozměrný interval

96. Definice Buď $A = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ n -rozměrný uzavřený interval a $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkce ohraničená na $A \subseteq Df$. Definujme

- $|A| = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$ **objem** A .
- $d(A) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$ **průměr** A .
- Pro $i = 1, \dots, n$ buď $D_i : a_i = x_i^{(0)} < x_i^{(1)} < \cdots < x_i^{(m_i)} = b_i$ tzv. **dělení** $\langle a_i, b_i \rangle$.
- Pak $D = [D_1, \dots, D_n]$ se nazývá **dělení** A .

Dále postupujme následovně:

1. Dělení D rozloží A na $m = m_1 \cdots m_n$ n -rozměrných intervalů

$$A_{k_1, \dots, k_n} = \langle x_1^{(k_1-1)}, x_1^{(k_1)} \rangle \times \cdots \times \langle x_n^{(k_n-1)}, x_n^{(k_n)} \rangle,$$

kde $1 \leq k_i \leq m_i$ a $i = 1, \dots, n$. Označme tyto intervaly pro zjednodušení $A^{(1)}, \dots, A^{(m)}$.

2. V každém intervalu $A^{(j)}$ pro $j = 1, \dots, m$ zvolme bod (tj. reprezentanta intervalu A_j) $y_j \in A^{(j)}$.
3. Položme $\|D\| = \max\{d(A^{(j)}); j = 1, \dots, m\}$. $\|D\|$ je tzv. **norma dělení** D .
4. Nyní každému $k \in \mathbb{N}$ přiřadíme dělení $D(k)$ intervalu A .
Posloupnost $\{D(k)\}_{k=1}^\infty$ se nazývá **nulová posloupnost**, když $\|D(k)\| \rightarrow 0$.
5. Definujme $S_f(D) = \sum_{j=1}^m f(y_j) |A^{(j)}|$. Číslo $S_f(D)$ se nazývá **integrální součet** funkce f pro dělení D intervalu A a pro danou volbu reprezentantů y_j .

97. Definice Řekneme, že ohraničená funkce f je Riemannovsky integrovatelná na A a číslo $a \in \mathbb{R}$ nazveme **n -rozměrný Riemannův integrál funkce f na množině A** , když pro každou nulovou posloupnost $D(k)$ dělení intervalu A a pro každou volbu reprezentantů v těchto děleních platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_f(D(k)) = a.$$

98. Poznámka Riemannův n -rozměrný integrál f na A budeme označovat

$$\int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad \text{nebo také} \quad \overbrace{\int \cdots \int_A}^{n\text{-krát}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

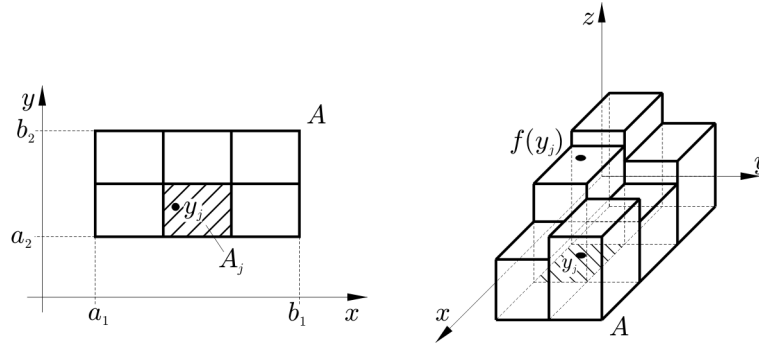
99. Poznámka Speciálně dvojrozměrný a trojrozměrný integrál funkce f na A budeme označovat

$$\iint_A f(x, y) dx dy \quad \text{a} \quad \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz.$$

100. Poznámka

1. Místo dvojrozměrný a trojrozměrný říkáme rovněž **dvojný** a **trojný**.
2. Historickou motivací k zavedení vícerozměrných integrálů byl výpočet objemů těles.

101. Poznámka Objasněme podrobněji hlavní myšlenku konstrukce a pro názornost uveďme Obrázek 11 pro případ $n = 2$.



Obrázek 11: Myšlenka Definice 96 pro $n = 2$

Integrální součet $S_f(D)$ přibližně vyjadřuje hodnotu integrálu z f na A . Čím je dělení D jemnější, tím přesněji $S_f(D)$ vyjadřuje integrál. Předpoklad konvergence posloupnosti norem dělení k nule znamená, že zjemňování je rozloženo po A rovnoměrně. Číslo $S_f(D)$ pak vyjadřuje součet objemů $n + 1$ rozměrných kvádrů nad dělením D s výškami závislými na volbě reprezentantů. Po limitním přechodu pak získáme objem $n + 1$ rozměrného tělesa nad podstavou A , které je zhora ohraničeno grafem funkce f .

102. Definice Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq Df$ ohraničená množina. Funkce definovaná vztahem

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \in \mathbb{R}^n - \Omega, \\ 1, & \text{pro } x \in \Omega, \end{cases}$$

se nazývá **charakteristická funkce množiny Ω** .

Zřejmě pro ohraničenou množinu Ω vždy existuje n -rozměrný uzavřený interval A tak, že $\Omega \subseteq A$.

Řekneme, že f je **Riemannovsky integrovatelná (RI) na Ω** , když funkce $\chi_\Omega \cdot f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je Riemannovsky integrovatelná na A . Pak klademe

$$\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_A \chi_\Omega(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

103. Poznámka Definice je korektní, protože integrál z funkce f nezávisí na volbě A .

1. Existuje-li $\int_{\Omega} dx_1 \dots dx_n$, pak se Ω nazývá **měřitelná v Jordanově smyslu** a $|\Omega| = \int_{\Omega} dx_1 \dots dx_n$ se nazývá **míra Ω** .

2. Pro $n = 2$ je míra obsah, pro $n = 3$ objem.

104. Věta

1. Buďte $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ měřitelné množiny, které nemají společné vnitřní body. Pak

$$|\Omega_1 \cup \Omega_2| = |\Omega_1| + |\Omega_2|.$$

2. Buď f spojitá na měřitelné množině Ω . Pak f je Riemannovsky integrovatelná na Ω .

3. Buď f ohraničená na Ω a necht' pro množinu A všech bodů nespojitosti f platí $|A| = 0$. Pak f je Riemannovsky integrovatelná na Ω .
4. Necht' f, g jsou Riemannovsky integrovatelné na Ω a pro každý bod $[x_1, \dots, x_n] \in \Omega$ platí $f(x_1, \dots, x_n) \leq g(x_1, \dots, x_n)$. Pak

$$\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \leq \int_{\Omega} g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Speciálně, když pro každé $[x_1, \dots, x_n] \in \Omega$ platí $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$, pak

$$\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \geq 0.$$

105. Věta

1. Necht' $\forall [x_1, \dots, x_n] \in \Omega$ platí $c_1 \leq f(x_1, \dots, x_n) \leq c_2$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a f je Riemannovsky integrovatelná na měřitelné množině Ω . Pak

$$c_1 |\Omega| \leq \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \leq c_2 |\Omega|.$$

2. Buď f spojitá funkce na uzavřené měřitelné množině Ω . Pak uvnitř Ω existuje bod $[a_1, \dots, a_n] \in \Omega$ tak, že platí

$$\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = f(a_1, \dots, a_n) |\Omega|.$$

Číslo $f(a_1, \dots, a_n)$ se nazývá **střední hodnota f na Ω** a platí

$$f(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

106. Věta Buďte $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkce Riemannovsky integrovatelné na měřitelné množině Ω a $c_i \in \mathbb{R}$ libovolné konstanty, kde $i = 1, \dots, m$. Pak funkce $\sum_{i=1}^m c_i f_i(x_1, \dots, x_n)$ je Riemannovsky integrovatelná na Ω a platí

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^m c_i f_i(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \sum_{i=1}^m c_i \int_{\Omega} f_i(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

9 Integrál přes elementární oblast

107. Definice Množina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá **elementární oblast typu** (x_1, \dots, x_n) , když každý bod $[x_1, \dots, x_n] \in \Omega$ splňuje nerovnosti

$$\begin{aligned} a_1 &\leq x_1 \leq a_2 \\ g_1(x_1) &\leq x_2 \leq h_1(x_1) \\ g_2(x_1, x_2) &\leq x_3 \leq h_2(x_1, x_2) \\ &\vdots \\ g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) &\leq x_n \leq h_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}), \end{aligned}$$

kde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2$ a pro každé $i = 1, \dots, n-1$ jsou $g_i, h_i : \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$ spojité funkce splňující podmínku $g_i < h_i$ pro vnitřní body Ω .

Buď σ permutace množiny $\{x_1, \dots, x_n\}$. Pokud v předchozích nerovnostech píšeme $\sigma(x_i)$ místo x_i , pak Ω se nazývá **elementární oblast typu** $(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n))$.

108. Poznámka

1. Místo elementární se též někdy říká **normální**.
2. Tatáž množina může být různých typů.
3. Speciálně n -rozměrný uzavřený interval je elementární oblast všech možných typů.

109. Příklad

1. Kruh $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ je elementární oblast typu (x, y) ale i typu (y, x) . Platí $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ a $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -1 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$.
2. Mezikružší Ω , kde $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ není elementární oblastí žádného typu, ale lze ji na elementární rozdělit.

110. Definice Množina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá **regulární**, je-li sjednocením konečného počtu elementárních oblastí libovolného typu, které mají společné nejvýše svoje hranice.

111. Věta Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ elementární oblast. Pak Ω je měřitelná.

112. Důsledek Každá regulární množina je měřitelná.

113. Věta Buď $\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$ regulární oblast, složená z elementárních oblastí Ω_i , které mají společné nejvýše svoje hranice. Pak

$$\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

114. Věta Fubiniho věta Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ elementární oblast typu (x_1, \dots, x_n) a nechť funkce f je Riemannovsky integrovatelná na Ω . Pak

$$\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{g_1(x_1)}^{h_1(x_1)} \left(\dots \left(\int_{g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})}^{h_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_2 \right) dx_1.$$

Pro typ $(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n))$ platí analogické tvrzení.

115. Důsledek (Dirichletova věta) Buď $\Omega = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$ n -rozměrný uzavřený interval a nechť funkce f je Riemannovsky integrovatelná na Ω . Pak

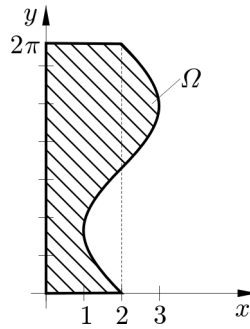
$$\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \left(\dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_1.$$

Je-li navíc funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ ve tvaru součinu $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$, pak integrál lze počítat podle vztahu

$$\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) dx_1 \cdots \int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) dx_n.$$

116. Příklad Spočítejte dvojrozměrný integrál $\iint_{\Omega} \frac{x}{3} dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x = 0, y = 0, y = 2\pi, x = 2 + \sin y$.

Řešení Nejprve nakreslíme oblast Ω . Vztahy $x = 0, y = 0, y = 2\pi$ určují přímky, které v rovině spolu s křivkou $x = 2 + \sin y$ vymezují obor Ω . Viz Obrázek 12.



Obrázek 12: $\Omega : x = 0, y = 0, y = 2\pi, x = 2 + \sin y$

Oblast Ω je typu (y, x) , ale není typu (x, y) . Nerovnosti charakterizující obor Ω jako oblast typu (y, x) jsou tvaru $0 \leq y \leq 2\pi, 0 \leq x \leq 2 + \sin y$. Aplikujeme Fubiniho větu.

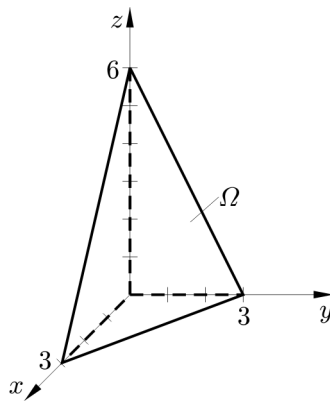
$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{x}{3} dx dy &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2+\sin y} \frac{x}{3} dx \right) dy = \int_0^{2\pi} \left[\frac{x^2}{6} \right]_0^{2+\sin y} dy = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} (2+\sin y)^2 dy = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} (4 + \sin y + \sin^2 y) dy = \\ &= \frac{1}{6} \left[4y - 4 \cos y + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4} \sin 2y \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

117. Příklad Spočítejte trojrozměrný integrál $\iiint_{\Omega} y dx dy dz$, kde Ω je určena vztahy $x, y, z \geq 0, 2x + 2y + z = 6$.

Řešení Nejprve nakreslíme oblast Ω . Vztahy $x = 0, y = 0, z = 0, 2x + 2y + z = 6$ určují roviny, které v trojrozměrném prostoru vymezují čtyřstěn. Viz Obrázek 13.

Čtyřstěn je oblast libovolného typu. Provedeme zápis pomocí nerovností. Typ oblasti zvolíme (x, y, z) . Platí $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3 - x, 0 \leq z \leq 6 - 2x - 2y$. Nyní můžeme aplikovat Fubiniho větu.

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} y dx dy dz &= \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} \left(\int_0^{6-2x-2y} y dz \right) dy \right) dx = \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} [yz]_0^{6-2x-2y} dy \right) dx = \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} y(6 - 2x - 2y) dy \right) dx = \\ &= 2 \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} y(3 - x) - y^2 dy \right) dx = 2 \int_0^3 \left[\frac{y^2}{2} (3 - x) - \frac{y^3}{3} \right]_0^{3-x} dx = 2 \int_0^3 \frac{(3-x)^2}{6} - \frac{(3-x)^2}{6} dx = 2 \int_0^3 \frac{(3-x)^2}{6} dx = \\ &= \frac{1}{3} \left[-\frac{(3-x)^4}{4} \right]_0^3 = \frac{27}{4}. \end{aligned}$$



Obrázek 13: $\Omega : x, y, z \geq 0, 2x + 2y + z \leq 6$

Pro ilustraci rozepíšeme ještě daný čtyřstěn jako oblast typu (y, z, x) . Nerovnosti jsou tvaru

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq 3, \\ 0 &\leq z \leq 6 - 2y, \\ 0 &\leq x \leq \frac{1}{2}(6 - 2y - z). \end{aligned}$$

Aplikace Fubiniho věty má pak tvar $\int_0^3 \left(\int_0^{6-2y} \left(\int_0^{(6-2y-z)/2} y \, dx \right) dz \right) dy$.

10 Transformace integrálů

118. Definice Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ uzavřená a ohraničená množina. Pak Ω se nazývá **n -rozměrná oblast**.

119. Definice Buď $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zobrazení, kde $F = [f_1, \dots, f_n]$, přičemž $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$. Nechť $\Omega^* \subseteq DF$ je oblast a nechť ke každému bodu $[y_1, \dots, y_n] \in \Omega^*$ je rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(y_1, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (3)$$

přiřazen bod $[x_1, \dots, x_n] = [f_1(y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(y_1, \dots, y_n)] \in \mathbb{R}^n$ tak, že platí:

- a) Je-li $F(\Omega^*) = \Omega$, pak Ω je oblast v \mathbb{R}^2 .
- b) Zobrazení F je na $\Omega^* - h(\Omega^*)$ injektivní (prosté).
- c) Je-li $\Omega_1^* \subseteq \Omega^*$ oblast, pak $F(\Omega_1^*)$ je oblast a platí $F(\Omega_1^*) \subseteq \Omega$.

Pak řekneme, že transformační rovnice (3) transformují oblast Ω na oblast Ω^* .

Zobrazení F se pak nazývá **transformace** a determinant

$$J(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_1} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_n} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \quad (4)$$

se nazývá **Jakobián transformace F** .

120. Věta (Věta o transformaci integrálu) Nechť rovnice (3) transformují oblast Ω na oblast Ω^* , f_1, \dots, f_n mají spojité parciální derivace na Ω^* a pro každý bod $[y_1, \dots, y_n] \in \Omega^* - h(\Omega^*)$ platí $J(y_1, \dots, y_n) \neq 0$. Dále nechť f je spojitá na oblasti Ω . Pak platí

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_{\Omega^*} f(f_1(y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(y_1, \dots, y_n)) \cdot J(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n. \end{aligned}$$

121. Důsledek Nechť platí předpoklady Věty 120. Potom

- 1. pro $n = 2$ platí: Je-li $x = f_1(u, v), y = f_2(u, v)$, pak

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega^*} f(f_1(u, v), f_2(u, v)) \cdot J(u, v) du dv;$$

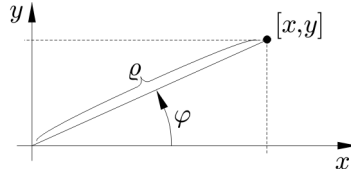
- 2. pro $n = 3$ platí: Je-li $x = f_1(u, v, w), y = f_2(u, v, w), z = f_3(u, v, w)$, pak

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} f(f_1(u, v, w), f_2(u, v, w), f_3(u, v, w)) \cdot J(u, v, w) du dv dw.$$

122. Definice Buď $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformace, která je definovaná rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= f_1(\varrho, \varphi) = \varrho \cos \varphi, \\ y &= f_2(\varrho, \varphi) = \varrho \sin \varphi, \end{aligned} \quad (5)$$

přičemž $DF = \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$. Pak F se nazývá **transformace do polárních souřadnic**. Rovnice transformují \mathbb{R}^2 na množinu $\langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$. Význam ϱ, φ zachycuje následující Obrázek 14.



Obrázek 14: Polární souřadnice

123. Věta Transformace do polárních souřadnic má Jakobián $J = J(\varrho, \varphi) = \varrho$.

Důkaz: $J(\varrho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\varrho \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{vmatrix} = \varrho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \varrho.$

124. Poznámka Buďte $x_0, y_0, a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$. Rovnice

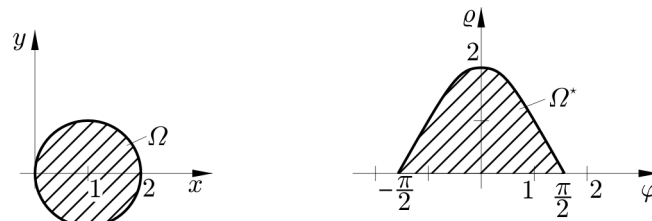
$$\begin{aligned} x &= x_0 + a\varrho \cos \varphi, \\ y &= y_0 + b\varrho \sin \varphi \end{aligned} \quad (6)$$

se nazývají transformační rovnice do **zobecněných polárních souřadnic**.

Jakobián této transformace je $J = J(\varrho, \varphi) = ab\varrho$.

125. Příklad Spočítejte dvojrozměrný integrál $\iint_{\Omega} x \, dx \, dy$, kde $\Omega : x^2 + y^2 \leq 2x$.

Řešení Nejprve nakreslíme oblast Ω . Vztah $x^2 + y^2 \leq 2x$ upravíme na tvar $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Odtud je již zřejmé, že oblast Ω je kruh o poloměru 1 se středem v bodě $[1, 0]$. Viz Obrázek 15.



Obrázek 15: Transformace do polárních souřadnic

Existuje více postupů, jak daný integrál vypočítat. Ukažme si dva postupy.

1. způsob řešení: V případě, že oblast Ω je kruh nebo jeho část, je výhodné provést transformaci do polárních souřadnic. Rovnice

$$x^2 + y^2 = 2x$$

hranice oblasti přejde transformací v rovnici

$$\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi = 2\varrho \cos \varphi,$$

tj.

$$\varrho = 2 \cos \varphi.$$

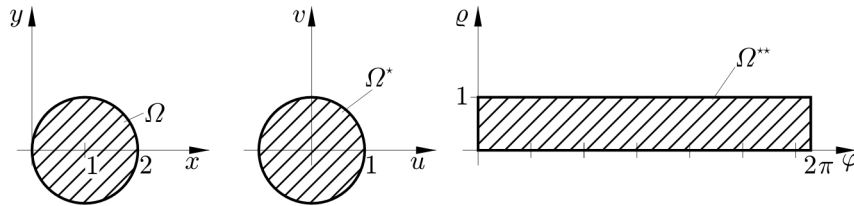
Transformací se oblast Ω změní v oblast Ω^* . Přitom $\Omega^* : -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ a $0 \leq \varrho \leq 2 \cos \varphi$. Viz Obrázek 15. Použijeme Větu 120 o transformaci. Platí

$$\iint_{\Omega} x \, dx dy = \iint_{\Omega^*} \varrho \cos \varphi \cdot \varrho \, d\varrho d\varphi = \iint_{\Omega^*} \varrho^2 \cos \varphi \, d\varrho d\varphi.$$

Poslední integrál dopočítáme podle Fubiniho věty.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega^*} \varrho^2 \cos \varphi \, d\varrho d\varphi &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \cos \varphi} \varrho^2 \cos \varphi \, d\varrho \right) d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3} \varrho^3 \cos \varphi \right]_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \frac{8}{3} \left[\frac{1}{4} \cos^3 x \cdot \sin x + \frac{3}{8} \cos x \cdot \sin x + \frac{3}{8} x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{8} \pi = \pi. \end{aligned}$$

2. způsob řešení: V následujícím řešení nejprve provedeme transformaci, která posune střed kruhu do počátku systému souřadnic. Teprve pak provedeme transformaci do polárních souřadnic. Viz Obrázek 16. V tomto případě se vyhneme integrálu z funkce $\cos^4 x$, který vyžaduje delší samostatný výpočet.



Obrázek 16: Posunutí a transformace do polárních souřadnic

Chceme, aby se rovnice $(x-1)^2 + y^2 = 1$ změnila v rovnici $u^2 + v^2 = 1$. Je zřejmé, že stačí položit $u = x - 1$ a $v = y$. Odtud plyne, že

$$\begin{aligned} x &= u + 1, \\ y &= v. \end{aligned}$$

Jakobián této transformace je

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Platí

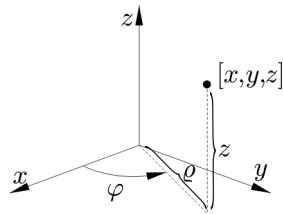
$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x \, dx dy &= \iint_{\Omega^*} (u + 1) \, du dv = \iint_{\Omega^{**}} (\varrho \cos \varphi + 1) \cdot \varrho \, d\varrho d\varphi = \iint_{\Omega^{**}} \varrho^2 \cos \varphi \, d\varrho d\varphi + \iint_{\Omega^{**}} \varrho \, d\varrho d\varphi = \\ &= \int_0^1 \varrho^2 d\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi + \int_0^1 \varrho d\varrho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{\varrho^3}{3} \right]_0^1 \cdot [\sin \varphi]_0^{2\pi} + \left[\frac{\varrho^2}{2} \right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = \pi. \end{aligned}$$

126. Definice Buď $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformace, která je definovaná rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= f_1(\varrho, \varphi, z) = \varrho \cos \varphi, \\ y &= f_2(\varrho, \varphi, z) = \varrho \sin \varphi, \\ z &= f_3(\varrho, \varphi, z) = z, \end{aligned} \tag{7}$$

přičemž $DF = \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \mathbb{R}$. Pak F se nazývá transformace do **válcových (cylindrických) souřadnic**.

Rovnice transformují \mathbb{R}^3 na množinu $\langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \mathbb{R}$. Význam ϱ, φ, z zachycuje následující Obrázek 17.



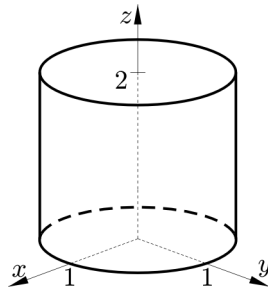
Obrázek 17: Válcové souřadnice

127. Věta Transformace do válcových souřadnic má Jakobián $J = J(\rho, \varphi, z) = \rho$.

$$\text{Důkaz: } J(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho.$$

128. Příklad Spočítejte trojrozměrný integrál $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, kde Ω je určena vztahy $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2$.

Řešení Nejprve nakreslíme oblast Ω . Vztah $x^2 + y^2 \leq 1$ určuje válec o poloměru 1. Viz Obrázek 18. Výška válce je dána vztahy $0 \leq z \leq 2$. Omezení $x \geq 0, y \geq 0$ vyčlení z válce čtvrtinu.



Obrázek 18:

Zjištění, že oblast Ω je čtvrtina válce nás vede k nápadu transformovat danou oblast do válcových souřadnic. Zřejmě

$$\begin{aligned} \rho &\in \langle 0, 1 \rangle, \\ \varphi &\in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \\ z &\in \langle 0, 2 \rangle. \end{aligned}$$

Tedy transformací se oblast Ω změní v kvádr $\Omega^* = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$. Použijeme Větu 120 o transformaci. Platí

$$\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} z\sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} \cdot \rho d\rho d\varphi dz = \iiint_{\Omega^*} z\rho^2 d\rho d\varphi dz.$$

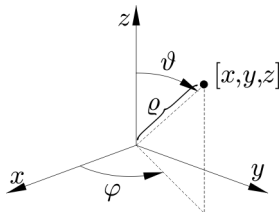
Integrační obor Ω^* je trojrozměrný interval a proto můžeme použít Dirichletovu větu 115. Navíc integrand je ve tvaru součinu a proto použijeme její speciální verzi.

$$\iiint_{\Omega^*} z\rho^2 d\rho d\varphi dz = \int_0^1 \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \int_0^2 z dz = \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \frac{\pi}{3}.$$

129. Definice Bud' $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformace, která je definovaná rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= f_1(\varrho, \varphi, \vartheta) = \varrho \cos \varphi \sin \vartheta, \\ y &= f_2(\varrho, \varphi, \vartheta) = \varrho \sin \varphi \sin \vartheta, \\ z &= f_3(\varrho, \varphi, \vartheta) = \varrho \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (8)$$

přičemž $DF = \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle$. Pak F se nazývá transformace do **kulových (sférických) souřadnic**. Rovnice transformují \mathbb{R}^3 na množinu $\langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle$. Význam $\varrho, \varphi, \vartheta$ zachycuje následující Obrázek 19.



Obrázek 19: Kulové (sférické) souřadnice

130. Věta Transformace do kulových souřadnic má Jakobián $J = J(\varrho, \varphi, \vartheta) = -\varrho^2 \sin \vartheta$.

Důkaz:

$$\begin{aligned} J(\varrho, \varphi, \vartheta) &= \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta & \sin \varphi \sin \vartheta & \cos \vartheta \\ -\varrho \sin \varphi \sin \vartheta & \varrho \cos \varphi \sin \vartheta & 0 \\ \varrho \cos \varphi \cos \vartheta & \varrho \sin \varphi \cos \vartheta & -\varrho \sin \vartheta \end{vmatrix} = \\ &= -\varrho^2 \cos^2 \varphi \sin^3 \vartheta - \varrho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta - \varrho^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta - \varrho^2 \sin^2 \varphi \sin^3 \vartheta = \\ &= -\varrho^2 \sin^3 \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - \varrho^2 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \\ &= -\varrho^2 \sin^3 \vartheta - \varrho^2 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta = -\varrho^2 \sin \vartheta (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) = -\varrho^2 \sin \vartheta. \end{aligned}$$

131. Příklad Spočítejte trojrozměrný integrál $\iiint_{\Omega} x^2 + y^2 + z^2 \, dx dy dz$, kde Ω je určena vztahy $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$.

Řešení Vztah $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ určuje kouli o poloměru jedna se středem v počátku. Protože $z \geq 0$ je Ω polokoule. Je-li oblast Ω částí koule, je výhodné provést transformaci do kulových souřadnic. Zřejmě

$$\begin{aligned} \varrho &\in \langle 0, 1 \rangle, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle, \\ \vartheta &\in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle. \end{aligned}$$

Transformací se oblast Ω změní v kvádr $\Omega^* = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Podle Věty 120 o transformaci platí

$$\iiint_{\Omega} x^2 + y^2 + z^2 \, dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} (\varrho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \varrho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \varrho^2 \cos^2 \vartheta) \cdot \varrho^2 \sin \vartheta \, d\varrho d\varphi d\vartheta.$$

Upravíme integrand a provedeme výpočet. Integrační obor Ω^* je trojrozměrný interval a proto můžeme použít Dirichletovu větu 115. Navíc po úpravě je integrand ve tvaru součinu a proto použijeme její speciální verzi. Platí

$$\iiint_{\Omega^*} \varrho^4 \sin \vartheta \, d\varrho d\varphi d\vartheta = \int_0^1 \varrho^4 \, d\varrho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \, d\vartheta = \left[\frac{\varrho^5}{5} \right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos \vartheta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{5}.$$

11 Aplikace vícerozměrných integrálů

132. Věta Buď $M \subseteq \mathbb{R}^2$ rovinná oblast (obrazec). Pak pro **obsah rovinné oblasti** M platí

$$S(M) = \iint_M dx dy.$$

133. Věta Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ prostorová oblast (těleso). Pak pro **objem prostorové oblasti** Ω platí

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz.$$

134. Věta Buď $f(x, y) \geq 0$ spojitá funkce na oblasti $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak **objem kolmého válce** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ohraničeného podstavou M v rovině xy a plochou Gf je roven

$$V(\Omega) = \iint_M f(x, y) dx dy.$$

135. Věta Buďte $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, f'_x, f'_y spojitě funkce na oblasti $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak **obsah plochy** $P = Gf$ nad oblastí M je roven

$$S(P) = \iint_M \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy.$$

136. Věta Buď $M \subseteq \mathbb{R}^2$ oblast, $\varrho(x, y) \geq 0$ hustota v bodě $[x, y] \in M$, ϱ spojitá na M . Pak pro **hmotnost dvojrozměrné oblasti** M platí

$$m(M) = \iint_M \varrho(x, y) dx dy.$$

137. Věta Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ oblast, $\varrho(x, y, z) \geq 0$ hustota v bodě $[x, y, z] \in \Omega$, ϱ spojitá na Ω . Pak pro **hmotnost trojrozměrné oblasti** Ω platí

$$m(\Omega) = \iiint_{\Omega} \varrho(x, y, z) dx dy dz.$$

138. Věta Buď $M \subseteq \mathbb{R}^2$ oblast, $\varrho(x, y) \geq 0$ hustota v bodě $[x, y] \in M$, ϱ spojitá na M . Pak **statické momenty rovinné oblasti** M vzhledem k souřadnicovým osám x, y jsou

$$S_x(M) = \iint_M y \varrho(x, y) dx dy,$$

$$S_y(M) = \iint_M x \varrho(x, y) dx dy$$

a pro **těžiště** T **rovinné oblasti** M platí

$$T(M) = \left[\frac{S_y(M)}{m(M)}, \frac{S_x(M)}{m(M)} \right].$$

139. Poznámka Místo slova těžiště je lépe použít termínu **hmotný střed**. Uvedené vztahy platí totiž za předpokladu, že tíhové pole je homogenní.

140. Věta Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ oblast, $\varrho(x, y, z) \geq 0$ hustota v bodě $[x, y] \in \Omega$, ϱ spojitá na Ω . Pak pro **statické momenty oblasti** Ω vzhledem k souřadnicovým rovinám xy, xz, yz platí

$$S_{xy}(\Omega) = \iiint_{\Omega} z \varrho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$S_{xz}(\Omega) = \iiint_{\Omega} y \varrho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$S_{yz}(\Omega) = \iiint_{\Omega} x \varrho(x, y, z) dx dy dz$$

a pro **těžiště** T **trojrozměrné oblasti** Ω platí

$$T(\Omega) = \left[\frac{S_{yz}(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_{xz}(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_{xy}(\Omega)}{m(\Omega)} \right].$$

141. Věta Buď $M \subseteq \mathbb{R}^2$ oblast, $\varrho(x, y) \geq 0$ hustota v bodě $[x, y] \in M$, ϱ spojitá na M . Pak pro **kvadratické momenty (momenty setrvačnosti) oblasti** M vzhledem k osám x, y, z platí

$$I_x(M) = \iint_M y^2 \varrho(x, y) dx dy,$$

$$I_y(M) = \iint_M x^2 \varrho(x, y) dx dy,$$

$$I_z(M) = I_x(M) + I_y(M).$$

142. Věta Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ oblast, $\varrho(x, y, z) \geq 0$ hustota v bodě $[x, y, z] \in \Omega$, ϱ spojitá na Ω . Pak pro **kvadratické momenty (momenty setrvačnosti)** Ω vzhledem k osám x, y, z platí

$$I_x(\Omega) = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \varrho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_y(\Omega) = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \varrho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_z(\Omega) = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \varrho(x, y, z) dx dy dz.$$

143. Příklad Určete velikost povrchu plochy, která je grafem funkce $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Řešení Grafem funkce $f(x, y)$ je horní polovina kulové plochy. Velikost povrchu Gf vypočteme ze vztahu $|Gf| = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy$, kde oblast $\Omega = Df$ je kruh $x^2 + y^2 \leq 1$. Určíme parciální

derivace. Platí

$$f'_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

$$f'_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Při výpočtu integrálu provedeme transformaci do polárních souřadnic. Oblast Ω se změní v obdélník $\Omega^* = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$. Dostáváme

$$\begin{aligned} |Df| &= \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2}} dx dy = \iint_{\Omega} \sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}} dx dy = \iint_{\Omega^*} \frac{\varrho d\varrho d\varphi}{\sqrt{1-\varrho^2}} = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^1 \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} = \left| \begin{array}{l} t^2 = 1 - \varrho^2 \\ \varrho d\varrho = -t dt \\ 0 \rightarrow 1 \\ 1 \rightarrow 0 \end{array} \right| = 2\pi \cdot \int_1^0 \frac{-t dt}{\sqrt{t^2}} = 2\pi \int_0^1 dt = 2\pi. \end{aligned}$$

144. Příklad Spočítejte souřadnice těžiště tělesa $\Omega : 0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)$. Hustota tělesa je konstantní a je rovna 1.

Řešení Těleso Ω je ohraničeno dvěma plochami. Zdola rovinou $z = 0$ a zhora paraboloidem $z = 1 - (x^2 + y^2)$. Vzhledem k tvaru tělesa Ω je zřejmé, že $x_T = 0$ a $y_T = 0$. Dopočítáme $z_T = \frac{S_{xy}(\Omega)}{m(\Omega)}$. Oblast Ω transformujeme do válcových souřadnic. Platí

$$\begin{aligned} \varrho &\in \langle 0, 1 \rangle, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle, \\ z &\in \langle 0, 1 - \varrho^2 \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{xy}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} z \varrho d\varrho d\varphi dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1-\varrho^2} z dz \right) d\varphi \right) d\varrho = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \varrho (1 - \varrho^2)^2 d\varphi \right) d\varrho = \pi \int_0^1 \varrho (1 - \varrho^2)^2 d\varrho = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} \varrho d\varrho d\varphi dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1-\varrho^2} \varrho dz \right) d\varphi \right) d\varrho = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \varrho (1 - \varrho^2) d\varphi \right) d\varrho = 2\pi \int_0^1 \varrho (1 - \varrho^2) d\varrho = 2\pi \left[\frac{\varrho^2}{2} - \frac{\varrho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že těžiště tělesa Ω je bod $T = [0, 0, \frac{1}{3}]$.