Diferenciální počet funkcí více proměnných

Doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.

Neřešené příklady

Matematika II

Obsah

Část I
Diferenciální počet funkcí více proměnných

1 Základní vlastnosti funkcí více proměnných

1. Příklad Vyjádřete objem z kužele jako funkci jeho strany x a výšky y.

Výsledek: $z = \frac{\pi r^2 y}{3} = \frac{1}{3}\pi(x^2 - y^2)y$.

2. Příklad Vyjádřete rychle obsah S trojúhelníku jako funkci jeho tří stran x, y, z.

Výsledek: $S = \frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)}$.

Poznámka: Tedy jestliže označíme $s = \frac{x+y+z}{2}$, potom $S = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$. Odvodili jsme notoricky známý Heronův vzorec.

3. Příklad Je dána složená funkce $z = u^w + w^{u+v}$, kde $u = x + y$, $v = x - y$, $w = xy$. Vyjádřete bezodkladně z jako funkci proměnných x a y.

Výsledek: $z = (x+y)^{xy} + (xy)^{2x}$.

4. Příklad Laskavě nakreslete definiční obor funkce $z = f(x, y)$.

a) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$;
b) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;
c) $f(x,y) = \frac{5x-7}{2x^2+3y^2-12}$;
d) $f(x,y) = \frac{x^2-2y}{y^2-2x}$;
e) $f(x,y) = \frac{2}{x^2-y^2-1}$;
f) $f(x,y) = \operatorname{cotg}(x+y)$;
g) $f(x,y) = \sqrt{3x-y}$;
h) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y-x}}$;
i) $f(x,y) = \ln(x+y)$;
j) $f(x,y) = \arcsin(x-y)$;
k) $f(x,y) = \arccos(1-x^2-y^2)$;
l) $f(x,y) = \frac{10x}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$;
m) $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y)^2}$;
n) $f(x,y) = \sqrt{\sin\pi(x^2+y^2)}$;
o) $f(x,y) = \sqrt{\sin(y-x)}$;
p) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{y^2-9}$;
q) $f(x,y) = \ln(x\ln(y-x))$;
r) $f(x,y) = \ln(y^2-4x+8)$;
s) $f(x,y) = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$;
t) $f(x,y) = \ln(xy)$;
u) $f(x,y) = \sqrt{x-\sqrt{y}}$;
v) $f(x,y) = \arcsin\frac{y-1}{x}$;
w) $f(x,y) = \ln x - \ln\sin y$.

5. Příklad Nakreslete graf funkce $z = f(x, y)$.

a) $f(x,y) = x$;
b) $f(x,y) = |x|$;
c) $f(x,y) = \sin x$;
d) $f(x,y) = 1 - x - y$;
e) $f(x,y) = x - y$;
f) $f(x,y) = x + y$;
g) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;
h) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+9}$;
i) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4}$;
j) $f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}$;
k) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$;
l) $f(x,y) = x^2+y^2$;
m) $f(x,y) = x^2-y^2$;
n) $f(x,y) = \sqrt{xy}$.

2 Parciální derivace, gradient a směrová derivace

6. Příklad Spočtěte rychle všechny první parciální derivace triviálních funkcí:
a) $f(x,y,z) = x^{(y^z)}$;
b) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} + x^y$;
c) $f(x,y,z) = \sqrt{xy}(3x+3z)^{\sqrt{yz}}$;
d) $f(x,y,z) = (3x+2z)^{\ln z}$;
e) $f(x,y,z) = z\mathrm{e}^{x^3 \ln \cos(x-y^2)}$.

7. Příklad Nalezněte bez váhání všechny první parciální derivace funkce f v bodě A:
a) $f = \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$, $A = [1,1]$; *Výsledek:* $f'_x = -\sqrt{2}$, $f'_y = \sqrt{2}$.
b) $f = \arcsin \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $A = [1,0]$; *Výsledek:* $f'_x = 0$, $f'_y = -\sqrt{2}$.
c) $f = (1 + \log_y x)^3$, $A = [\mathrm{e},\mathrm{e}]$; *Výsledek:* $f'_x = \frac{12}{\mathrm{e}}$, $f'_y = -\frac{12}{\mathrm{e}}$.
d) $f = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}$, $A = [1,1]$; *Výsledek:* $f'_x = \frac{1}{4}$, $f'_y = 0$.

8. Příklad Okamžitě spočtěte všechny parciální derivace druhého žádu funkce f v bodě A:
a) $f = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$, $A = [1,0]$; *Výsledek:* -1, $\frac{1}{4}$,0.
b) $f = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$, $A = [0,1]$; *Výsledek:* 0, $-\frac{1}{2}$, 0.
c) $f = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^y}$, $A = [0,0]$; *Výsledek:* 1, 0, 1.

9. Příklad Jsou dány funkce $z = \sqrt{x^2+y^2}$ a $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$. Nalezněte úhel gradientů těchto funkcí v bodě $[3,4]$. *Výsledek:* $\cos\alpha = -0.199$, $\alpha = 101°30'$.

10. Příklad Nalezněte bod, ve kterém gradient funkce $z = \ln(x + \frac{1}{y})$ je roven vektoru $(1, -\frac{16}{9})$.
Výsledek: $[-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}]$, $[\frac{7}{3}, -\frac{3}{4}]$.

11. Příklad Nalezněte body, ve kterých se velikost gradientu funkce $z = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ rovná 2.
Výsledek: Body ležící na kružnici $x^2 + y^2 = \frac{2}{3}$.

12. Příklad Určete úhel mezi gradienty funkce $z = \ln \frac{y}{x}$ v bodech $A = [\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$, $B = [1,1]$.
Výsledek: $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

13. Příklad Určete úhel mezi gradienty funkce $u = x^2 + y^2 + z^2$ v bodech $A = [a,0,0]$, $B = [0,a,0]$.
Výsledek: $\frac{\pi}{2}$.

14. Příklad Určete směrovou derivaci funkce $f = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$ v bodě $[1,1]$ ve směru vektoru $(2,1)$.
Výsledek: $6\mathrm{e}^2$.

15. Příklad Určete směrovou derivaci funkce $f = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ v bodě $M = [1,2]$ ve směru vektoru, který jde z bodu M do bodu $N = [4,6]$. *Výsledek:* 5.

16. Příklad Určete derivaci funkce $f = 3x^4 + xy + y^3$ v bodě $M = [1,2]$ ve směru jednotkového vektoru, který svírá s kladným směrem osy x úhel $135°$. *Výsledek:* $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

17. Příklad Určete derivaci funkce $f = \ln(x+y)$ v bodě $[1,2]$ ležícím na parabole $y^2 = 4x$ ve směru jednotkového vektoru tečny k parabole v tomto bodě. *Výsledek:* $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

18. Příklad Určete derivaci funkce $f = \operatorname{arctg}(xy)$ v bodě $[1, 1]$ ve směru jednotkového vektoru osy prvního kvadrantu. *Výsledek:* $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

19. Příklad Určete derivaci funkce $f = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)$ v počátku soužadnicového systému ve směru jednotkového vektoru, který svíráá s kladným směrem osy x úhel α. *Výsledek:* $\frac{1}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)$.

20. Příklad Určete derivaci funkce $f = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ v bodě $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ ležícím na kružnici $x^2 + y^2 - 2x = 0$ ve směru jednotkového vektoru tečny ke kružnici v tomto bodě. *Výsledek:* $-\frac{1}{2}$.

3 Diferenciál

21. Příklad Určete diferenciál funkce f v bodě A:

a) $f = \mathrm{e}^x \cos y,\ A = [0,0]$; *Výsledek:* $\mathrm{d}x$.
b) $f = \frac{1}{x^2+y^2},\ A = [-1,2]$; *Výsledek:* $\frac{2}{25}\mathrm{d}x - \frac{4}{25}\mathrm{d}y$.
c) $f = x^2 - 2xy - 3y^2,\ A = [-1,1]$; *Výsledek:* $-4\mathrm{d}x - 4\mathrm{d}y$.
d) $f = \mathrm{e}^{xy},\ A = [0,0]$; *Výsledek:* 0.
e) $f = \cos x \sin y \cos z,\ A = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, 0]$; *Výsledek:* $-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}x$.
f) $f = y^x,\ A = [x,y]$; *Výsledek:* $y^{x-1}(y \ln y \mathrm{d}x + x \mathrm{d}y)$.
g) $f = x^{yz},\ A = [x,y,z]$; *Výsledek:* $x^{yz-1}(yz\mathrm{d}x + zx \ln x \mathrm{d}y + xy \ln x \mathrm{d}z)$.

22. Příklad Určete diferenciál funkce $f = \frac{x^2-y^2}{xy}$ v bodě $[2,2]$ při přírůstku $\mathrm{d}x = 0.03,\ \mathrm{d}y = 0.01$.
Výsledek: 0.02.

23. Příklad Naučte se odvodit vzorce pro první, druhý a třetí diferenciál funkce $f(x,y)$ a $f(x,y,z)$.

24. Příklad Určete první a druhý diferenciál funkce $f = \mathrm{e}^x \cos y$ v bodě $[0,0]$.
Výsledek: $\mathrm{d}f = \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}^2 f = \mathrm{d}x^2$.

25. Příklad Určete druhý diferenciál následujících funkcí:

a) $f = \frac{y}{x}$; *Výsledek:* $\frac{2y}{x^3}\mathrm{d}x^2 - \frac{2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
b) $f = \ln\sqrt{x^2+y^2}$; *Výsledek:* $\frac{1}{x^2+y^2}((y^2-x^2)\mathrm{d}x^2 - 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y - (y^2-x^2)\mathrm{d}y^2)$.
c) $f = \mathrm{e}^{x-y^2} + \cos x$; *Výsledek:* $(\mathrm{e}^{x-y^2} - \cos x)\mathrm{d}x^2 - 4y\mathrm{e}^{x-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (4y^2-2)\mathrm{e}^{x-y^2}\mathrm{d}y^2$.
d) $f = y\sin x + x\cos y$; *Výsledek:* $-y\sin x\mathrm{d}x^2 + 2(\cos x - \sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - x\cos y\mathrm{d}y^2$.

26. Příklad Určete druhý diferenciál funkce f v bodě A:

a) $f = \mathrm{e}^{xy},\ A = [0,0]$; *Výsledek:* $2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
b) $f = \frac{z}{x^2+y^2},\ A = [1,1,0]$.
c) $f = x^2y^2,\ A = [1,1]$; *Výsledek:* $2\mathrm{d}x^2 + 8\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\mathrm{d}y^2$.

27. Příklad Určete třetí diferenciál funkce $\mathrm{e}^x \cos y$.
Výsledek: $\mathrm{e}^x(\cos y\mathrm{d}x^3 - 3\sin y\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y - 3\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + \sin y\mathrm{d}y^3)$.

28. Příklad Určete první i druhý diferenciál funkce $z = 2x^2 - 3xy - 2y^2$.
Výsledek: $\mathrm{d}z = (4x-3y)\mathrm{d}x - (3x+2y)\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}^2 z = 4\mathrm{d}x^2 - 6\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\mathrm{d}y^2$.

4 Tečná rovina a Taylorův polynom

Tečná rovina:

29. Příklad Určete rovnici tečné roviny k funkcím:
a) $z = 2x^2 + y^2$, v bodě $A = [1, 1, ?]$; *Výsledek:* $4x + 2y - z - 3 = 0$.
b) $z = x^4 + 2x^2y - xy + x$, v bodě $A = [1, ?, 2]$; *Výsledek:* $5x + y - z + 3 = 0$.
c) $z = xy$, v bodě $A = [?, 2, 2]$; *Výsledek:* $2x + y - z - 2 = 0$.

30. Příklad K elipsoidu $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ určete tečnou rovinu, která je rovnoběžná s rovinou $4x + 2y + z = 1$. *Výsledek:* $4x + 2y + z \pm \sqrt{19} = 0$.

31. Příklad Určete rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce:
a) $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ v bodě $A = [2, -1, 1]$; *Výsledek:* $2x + 2y - z - 1 = 0$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$.
b) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ v bodě $A = [3, 4, -7]$; *Výsledek:* $17x + 11y + 5z - 60 = 0$, $x = 3 + 17t, y = 4 + 11t, z = -7 + 5t, t \in \mathbb{R}$.

32. Příklad Určete délku úseku přímky $x + 1 = 0$, $y - 4 = 0$ mezi grafem funkce $z = x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2$ a tečnou rovinou ke grafu této funkce v bodě $A = [0, 2, 2]$. *Výsledek:* 5.

Taylorův polynom:

33. Příklad Vyjádřete funkci $f(x, y) = \cos x \cos y$ v bodě $[0, 0]$ Taylorovým polynomem druhého stupně.
Výsledek: $T_2(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + R_2$.

34. Příklad Nalezněte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}$ v bodě $[0, 0]$.
Výsledek: $T_2 f = 1 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + R_2$.

35. Příklad Nalezněte Taylorův rozvoj funkce $u = x^3 - 3yz^2 + 2xy - z^2 + x - 3y + 2$ v bodě $[1, 2, 1]$.
Výsledek: $f = -5 + 8(x-1) - 4(y-2) - 14(z-1) + \frac{1}{2!}\big[6(x-1)^2 - 14(z-1)^2 + {}$ $+4(x-1)(y-2) - 12(y-2)(z-1)\big] + \frac{1}{3!}\big[6(x-1)^3 - 18(y-2)(z-1)^2\big]$.

36. Příklad Napište Taylorův polynom funkce $f(x, y) = \frac{x}{y}$ v bodě $[1, 1]$ pro $m = 3$.
Výsledek: $T_3 f = 1 + (x-1) - (y-1) + \frac{1}{2!}[-2(x-1) + 2(y-1)^2] + {}$ $+\frac{1}{3!}[6(x-1)(y-1)^2 - 6(y-1)^3] + R_3$.

37. Příklad Funkci $z = x^y$ rozložte v mocniny $(x-1)(y-1)$ do 3. řádu včetně.
Výsledek: $z = 1 + (x-1) + \frac{1}{2!}[2(x-1)(y-1)] + \frac{1}{3!}[(x-1)^2(y-1)] + R_3$

38. Příklad Nalezněte Taylorův polynom T stupně m funkce f v bodě X_0:
a) $f = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $X_0 = [0, 0]$, $m = 2$; *Výsledek:* $T = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
b) $f = \cos(x + y + z) - \cos x \cos y \cos z$, $X_0 = [0, 0, 0]$, $m = 2$; *Výsledek:* $T = -xy - xz - yz$.
c) $f = e^x \sin y$, $X_0 = [0, 0]$, $m = 3$; *Výsledek:* $T = y + xy + \frac{3x^2y - y^3}{3!}$.
d) $f = \cos x \cos y$, $X_0 = [0, 0]$, $m = 4$; *Výsledek:* $T = 1 - \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x^4 + 6x^2y^2 + y^4}{4!}$.
e) $f = e^{x+y}$, $X_0 = [1, -1]$, $m = 3$; *Výsledek:* $T = 1 + (x-1) + (y+1) + {}$ $+\frac{[(x-1)+(y+1)]^2}{2!} + \frac{[(x-1)+(y+1)]^3}{3!}$.
f) $f = \operatorname{arctg} \frac{1+x+y}{1-x-y}$, $X_0 = [0, 0]$, $m = 1$; *Výsledek:* $T = \frac{\pi}{4} + x - xy$.

5 Extrémy funkcí více proměnných

39. Příklad Nalezněte lokální extrémy funkce:

a) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;
Výsledek: Stacionární body $A = [0, 0]$ - nenastává extrém, $B = [1, 1]$ - ostré lokální minimum.

b) $u = x^3 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 3xz - 2y + 2z$;
Výsledek: Stacionární body $A = [1, 1, 1]$- nenastává extrém, $B = [2, 1, 4]$ - minimum.

c) $z = \mathrm{e}^{x-y}(x^2 - 2y^2)$;
Výsledek: Stacionární bod $A = [-4, -2]$ - nastává maximum, $B = [-4, 2]$, $C = [0, 0]$ - nenastává extrém.

d) $z = xy\ln(x^2 + y^2)$;
Výsledek: Stacionární body $A = [1, 0]$, $B = [-1, 0]$, $C = [0, 1]$, $D = [0, -1]$- nenastává extrém,
$E = [\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}, \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}]$, $F = [-\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}, -\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}]$ - minimum,
$G = [-\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}, \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}]$, $H = [\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}, -\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}]$ - maximum.

e) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$;
Výsledek: Stacionární body $A = [0, 0]$ - ostré lokální maximum,
$B = [0, 1]$, $C = [0, -1]$, $D = [\frac{1}{2}, 0]$, $E = [-\frac{1}{2}, 0]$ - nenastává extrém,
$F = [\frac{1}{2}, 1]$, $G = [\frac{1}{2}, -1]$, $K = [-\frac{1}{2}, 1]$, $L = [-\frac{1}{2}, -1]$ - nastává minimum.

f) $f = x^2 + \frac{2y^2}{x} + 4y$;
Výsledek: Minimum v bodě $[1, -1]$.

40. Příklad Pečlivě určete extrémy následujících funkcí:

a) $f(x, y) = x^2 + y^4$; *Výsledek:* Ostré lokální minimum v bodě $[0, 0]$.
b) $f(x, y) = x^2 + x^2y^2$; *Výsledek:* Stacionární body $[0, c]$, kde $c \in \mathbb{R}$. Neostré lokální minimum v bodě $[0, 0]$.
c) $f(x, y) = x^2 + y^3$; *Výsledek:* Stacionárním bodem je $[0, 0]$, ale extrém tam nenastane.
d) $f(x, y) = x^2 \cdot y^2$; *Výsledek:* Neostré lokální minimum v bodě $[0, 0]$.
e) $f(x, y) = x^2 - y^2$; *Výsledek:* Jde o sedlo; stac. bodem je $[0, 0]$, extrém zde nenastane.
f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; *Výsledek:* Jde o kužel, stac. body neexistují, v bodě $[0, 0]$ je globální minimum.

41. Příklad Určete vázané extrémy následujících funkcí:

a) $z = 6 - 4x - 3y$ za podmínky $x^2 + y^2 = 1$;
Výsledek: $A = [\frac{4}{5}, \frac{3}{5}]$, $\lambda = \frac{5}{2}$ - minimum, $B = [-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}]$, $\lambda = -\frac{5}{2}$ - maximum.

b) $f(x, y) = xy - x + y - 1$ za podmínky $x + y = 1$;
Výsledek: Stacionární bod $A = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ - Lagrangeovou metodou nelze o vázaném extrému rozhodnout, avšak pokud z vazební podmínky vyjádříme y a dosadíme je do funkce $f(x, y)$ zjistíme, že v bodě A nastává vázané lokální maximum.

c) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ za podmínky $g(x, y) = x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$;
Výsledek: Stacionární body $A = [2, -2]$, pro $\lambda = -2$ - lokální maximum,
$B = [0, 0]$, pro $\lambda = 0$ - lokální minimum.

d) $f(x, y, z) = z^2 + x^2 + y^2$ za podmínek $x + y - 3z + 7 = 0$, $x - y + z - 3 = 0$;
Výsledek: Stacionární bod $A = [0, -1, 2]$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ - vázané lokální minimum.

e) $f(x, y) = x + y$ za podmínky $g(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1 = 0$;
Výsledek: Stacionární body $A = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, pro $\lambda = \sqrt{2}$ - minimum,
$B = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$, pro $\lambda = -\sqrt{2}$ - maximum.

42. Příklad Určete globální extrémy funkce $f(x, y)$ na množině M zadané nerovnostmi.

a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, $M : |x| + |y| \leq 1$;
Výsledek: Minimum v bodě $[0, 0]$, maximum v bodech $[\pm 1, 0]$ a $[0, \pm 1]$.

b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, $M : x^2 + y^2 \leq 25$;
Výsledek: Minimum v bodě $[3, -4]$, maximum v bodě $[-3, 4]$.

c) $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y$, $M : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$;
Výsledek: Maximum v bodech $[0, 0]$ a $[2, 2]$, minimum v bodech $[2, 0]$ a $[0, 2]$.

d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$, M je trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[0,-3]$, $[-3,0]$;
Výsledek: Minimum v bodě $[-1,-1]$, maximum v bodech $[0,-3]$ a $[-3,0]$.

e) $f(x,y) = y^2 - 2y + \mathrm{e}^{-x^2}$, M je čtverec o vrcholech $[-1,0]$, $[1,0]$, $[1,2]$, $[-1,2]$;
Výsledek: Maximum v bodech $[0,0]$ a $[0,2]$, minimum v bodech $[1,1]$ a $[-1,1]$.

43. Příklad (Slovní úlohy na extrémy)

a) Na parabole $y^2 = 4x$ nalezněte bod, který je nejblíže přímce $x - y + 4 = 0$.
Výsledek: Bod na parabole je $[1,2]$, bod na přímce je $[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}]$.

b) Nalezněte kvádr největšího objemu, jestliže délka jeho úhlopříčky je rovna $2\sqrt{3}$.
Výsledek: Je to krychle o straně 2.

c) Nalezněte poloměr r a výšku h kužele s největším objemem, aby jeho plášť byl roven S.
Výsledek: $r = \frac{\sqrt{S}}{3^{1/4}\sqrt{\pi}}$, $h = \frac{\sqrt{2S}}{3^{1/4}\sqrt{\pi}}$.

d) Určete kvádr, který má při daném povrchu K maximální objem.
Výsledek: Je to krychle o straně $x = \sqrt{\frac{K}{6}}$.

e) Najděte taková čtyři reálná nezáporná čísla se součtem h, aby jejich součin byl největší.
Výsledek: $x = y = z = u = \frac{h}{4}$.

f) Určete poloměr r a výšku h válce, který má při daném povrchu K maximální objem.
Výsledek: $h = 2r = 2\sqrt{\frac{K}{6\pi}}$.

g) Mezi všemi trojúhelníky o daném obvodu $2p$ nalezněte trojúhelník s maximálním obsahem.
Výsledek: $x = y = z = \frac{2}{3}p$.

6 Funkce zadané implicitně

44. Příklad Určete první derivaci funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí:

a) $xy - \ln y = a$; *Výsledek:* $y' = \frac{y^2}{1-xy}$.

b) $y^x = x^y$; *Výsledek:* $y' = \frac{y^2 \ln x - 1}{x^2 \ln y - 1}$.

45. Příklad Určete první a druhou derivaci funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí:

a) $x = y - 4\sin y$; *Výsledek:* $\frac{1}{1-4\cos y}$, $-\frac{4\sin y}{(1-4\cos y)^3}$.

b) $x - \ln y - y^2 = 0$; *Výsledek:* $\frac{y}{1+2y^2}$, $\frac{y+2y^3-4y^2}{(1+2y^2)^3}$.

c) $\ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0$; *Výsledek:* $\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.

d) $(x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2) + 1 = 0$; *Výsledek:* $-\frac{x}{y}$, $-\frac{x^2+y^2}{y^3}$.

e) $1 + xy - \ln(\mathrm{e}^{xy} + \mathrm{e}^{-xy}) = 0$; *Výsledek:* $-\frac{y}{x}$, $\frac{2y}{x^2}$.

f) $y^3 - 2xy + x^2 = 0$; *Výsledek:* $\frac{2y-2x}{3y^2-2x}$, $\frac{4y'-2-6yy'^2}{3y^2-2x}$.

46. Příklad Rozhodněte, zda funkce $y = f(x)$ zadaná implicitně rovnicí $x^4 - xy + y^4 = 1$ je pro $x = 0$ a $y = 1$ rostoucí nebo klesající a konvexní nebo konkávní. Výsledek tohoto vašeho rozhodnutí sdělte neprodleně vedoucímu cvičení.

Výsledek: Je rostoucí a konkávní.

47. Příklad Vypočtěte parciální derivace funkce $z = g(x, y)$ zadané implicitně rovnicí:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz - 4 = 0$; *Výsledek:* $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz-x}{z-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz-y}{z-xy}$.

b) $4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4 = 0$; *Výsledek:* $\frac{8x+y+1}{6z+y}$, $\frac{x+4y-z}{y+6z}$.

c) $x\cos y + y\cos z + z\cos x = a$; *Výsledek:* $\frac{z\sin x - \cos y}{\cos x - y\sin z}$, $\frac{x\sin y - \cos z}{\cos x - y\sin z}$.

d) $\mathrm{e}^z + x^2y + z + 5 = 0$; *Výsledek:* $-\frac{2xy}{\mathrm{e}^z+1}$, $-\frac{x^2}{\mathrm{e}^z+1}$.

48. Příklad Určete tečnou rovinu v bodě A ke grafu funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně následující rovnicí:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0,\ A = [2, -6, -3]$; *Výsledek:* $2x - 6y - 3z - 49 = 0$.

b) $x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 2x - 12y + 8z - 7 = 0,\ A = [1, -2, 4]$; *Výsledek:* $x - 6y - 6z + 11 = 0$.

c) $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8,\ A = [2, 2, 1]$; *Výsledek:* $x + y - 4z = 0$.

49. Příklad Funkce $y = f(x)$ je implicitně určena rovnicí $x^3 + y^3 - 6xy = 0$. Nalezněte takové x, aby $f'(x) = 0$. *Výsledek:* $2 \cdot 2^{1/3}$.

50. Příklad Určete lokální extrémy funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí:

a) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$; *Výsledek:* maximum pro $x = 4^{1/3}$.

b) $x^4 + y^3 + 2x^2y + 2 = 0$: ; *Výsledek:* maximum pro $x = 1$, $x = -1$.

51. Příklad Rozhodněte, zda funkce $y = f(x)$ zadaná implicitně rovnicí $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$ je pro $x = y = 1$ konvexní nebo konkávní. *Výsledek:* je konkávní.

52. Příklad Určete rovnici tečny a normály v bodě A ke grafu funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí:

a) $xy + \ln y - 1 = 0,\ A = [1, 1]$; *Výsledek:* $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 1 = 0$.

b) $y^4 - 4x^4 - 6xy = 0,\ A = [1, 2]$; *Výsledek:* $14x - 13y + 12 = 0$, $13x + 14y - 41 = 0$.

53. Příklad Určete první a druhý diferenciál funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; *Výsledek:* $\mathrm{d}z = -\frac{x}{z}\mathrm{d}x - \frac{y}{z}\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}^2 z = \frac{y^2-a^2}{z^3}\mathrm{d}x^2 - 2\frac{xy}{z^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{x^2-a^2}{z^3}\mathrm{d}y^2$.

b) $\ln z = x + y + z - 1$; *Výsledek:* $\mathrm{d}z = \frac{z}{1-z}(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$, $\mathrm{d}^2 z = \frac{z}{(1-z)^3}(\mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2)$.

54. Příklad Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí $z^3 - 2xz + y = 0$ v bodě $[1, 1]$. Přitom funkční hodnota v tomto bodě je $z = 1$.

Výsledek: $T = 1 + 2(x-1) - (y-1) - 8(x-1)^2 + 10(x-1)(y-1) - 3(y-1)^2$.