Vysoké učení technické v Brně Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Doc. RNDr. Zdeněk Karpíšek, CSc.

RNDr. Pavel Popela, Ph.D.

Ing. Josef Bednář, Ph.D.

STATISTIKA A PRAVDĚPODOBNOST
-
PŘEHLED VZORCŮ A POZNATKŮ

učební a metodická pomůcka

© Zdeněk Karpíšek, Pavel Popela, Josef Bednář 2006

OBSAH

PŘEDMLUVA

Tento text je určen jako učební a metodická pomůcka pro předměty Matematika IV (4M) a Statistický software (0SS) v bakalářském studijním programu a předmět Matematika III-B (CM) v profesním bakalářském studijním programu ve druhém ročníku na Fakultě strojního inženýrství Vysokého učení technického v Brně. Využívá poznatky získané studenty v 1. ročníku studia a rozšiřuje je tak, aby studenti mohli v samostatném studiu používat stochastické přístupy pro modelování reálných jevů a procesů ve strojírenských oborech.

Předložený text je zúženou přehledovou elektronickou verzí původně tiskem vydané studijní opory pro kombinované bakalářské studium: Karpíšek, Z. – Popela, P. – Bednář, J.: *Statistika a pravděpodobnost. Učební pomůcka - studijní opora pro kombinované studium*. Brno : FSI VUT v CERM, Brno 2002. Doplňuje a metodicky rozšiřuje základní studijní materiál, kterým jsou skripta: Karpíšek, Z. *Matematika IV – Statistika a pravděpodobnost*. Učební text. FSI VUT v CERM Brno, Brno 2002 (první vydání), FSI VUT v CERM Brno, Brno 2003 (druhé doplněné vydání). V odkazech dále v textu je pro ně používána zkratka MIV-SP.

Kapitoly 1 až 9 obsahují přehledy základních pojmů, vzorců a vztahů, základních poznatků, seznamy kontrolních otázek a obsahy zadání typických úloh. Závěrečné oddíly mají jiný charakter: kapitola 10 doplňuje předcházející text podrobným výkladem programové podpory statistických metod pomocí nástrojů tabulkového procesoru MS Excel, pro manuální výpočetní využití textu jsou určeny kapitoly Dodatek – základní pojmy z kombinatoriky a Statistické tabulky. Další poznatky může uživatel čerpat z dostupné literatury uvedené v přehledu na závěr textu.

Autoři se snažili promítnout do textu své dlouholeté zkušenosti z výuky předmětů se stochastickým zaměřením a také zahrnout poznatky z aplikací a potřeb statistických metod jak ve výzkumu, tak i v praxi. V tomto smyslu souvisí text s řešením projektu MŠMT České republiky čís. 1M06047 Centrum pro jakost a spolehlivost výroby CQR.

Brno, duben 2006 Autoři

Upozornění: Užití a šíření této elektronické verze učebního textu podléhá v plném rozsahu zákonu České republiky (autorskému zákonu) 121/2000 Sb. ze dne 7. dubna 2000 a jeho šíření je možné pouze po souhlasu autorů.

1. POPISNÁ STATISTIKA

1.1 Přehled základních pojmů a vztahů

Neroztříděný statistický soubor: $(x_1, \ldots, x_n)$, ***rozsah*** n.

Uspořádaný statistický soubor: $\left(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}\right)$, kde $x_{(i)} \le x_{(i+1)}$ pro všechny indexy *i*.

Variační obor: $< x_{(1)}; x_{(n)} >$.

Roztříděný statistický soubor: $\left(x_j^*, f_j\right)$, x_j^* je ***střed*** j-té třídy ($x_j^* < x_{j+1}^*$),

f_j ***absolutní četnost*** j-té třídy, $j = 1, \ldots, m$, $\sum_{j=1}^{m} f_j = n$.

Relativní četnost: $\dfrac{f_j}{n}$, $j = 1, \ldots, m$ (uvádí se též v %).

Počet tříd: $m \approx 1 + 3{,}3 \log n$ pro symetrický soubor, $\sqrt{n}$ až $\sqrt{2n}$ pro nesymetrický soubor.

Délka třídy: $h \approx \dfrac{x_{(n)} - x_{(1)}}{m}$.

Kumulativní absolutní četnost: $F_j = \sum_{k=1}^{j} f_k$, $F_{j+1} = F_j + f_{j+1}$, $j = 1, \ldots, m-1$, $F_1 = f_1$, $F_m = n$.

Kumulativní relativní četnost:, $\dfrac{F_j}{n}$, $j = 1, \ldots, m$ (uvádí se též v %).

Četnostní tabulka pro absolutní četnosti:

x_j^*	x_1^*	...	x_m^*
f_j	f_1	...	f_m

Aritmetický průměr:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{pro neroztříděný soubor,}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} f_j x_j^* \qquad \text{pro roztříděný soubor.}$$

Vlastnosti aritmetického průměru:

a) $y = ax + b \Rightarrow \bar{y} = a\bar{x} + b$ pro reálné konstanty *a*, *b*,

b) $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$,

c) $x_{(1)} \le \bar{x} \le x_{(n)}$,

d) $\bar{x}$ má tentýž rozměr jako znak X.

Medián pro neroztříděný statistický soubor:

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & \text{pro lichá } n, \\ \dfrac{1}{2}\left[x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right] & \text{pro sudá } n. \end{cases}$$

Vlastnosti mediánu:

a) $y = ax + b \Rightarrow \tilde{y} = a\tilde{x} + b$ pro reálné konstanty a, b,

b) $x_{(1)} \le \tilde{x} \le x_{(n)}$,

c) $\tilde{x}$ má tentýž rozměr jako znak X.

Modus: číslo $\hat{x}$, v jehož okolí je nejvíce hodnot x_i, resp. střed x_j^* třídy s největší absolutní četností f_j.

Rozptyl (***disperze***, ***variance***):

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \bar{x}^2$$ pro neroztříděný soubor,

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} f_j\left(x_j^* - \bar{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} f_j x_j^{*2}\right) - \bar{x}^2$$ pro roztříděný soubor.

Vlastnosti rozptylu:

a) $s^2 \ge 0$,

b) $y = ax + b \Rightarrow s^2(y) = a^2 s^2(x)$ pro reálné konstanty a, b,

c) $s^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n$, resp. $x_1^* = \cdots = x_m^*$,

d) s^2 má rozměr rovný kvadrátu rozměru znaku X.

Směrodatná odchylka: $s = \sqrt{s^2}$.

Vlastnosti směrodatné odchylky:

a) $s \ge 0$,

b) $y = ax + b \Rightarrow s(y) = |a|\, s(x)$ pro reálné konstanty a, b,

c) $s = 0 \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n$, resp. $x_1^* = \cdots = x_m^*$

d) s má tentýž rozměr jako znak X.

Variační koeficient: $v = \dfrac{s}{\bar{x}}$.

Vlastnosti variačního koeficientu:

a) $v(ax) = \dfrac{a}{|a|} v(x)$ pro reálnou konstantu $a \ne 0$,

b) v je bezrozměrné číslo.

Rozpětí: $x_{(n)} - x_{(1)}$.

Koeficient šikmosti (***koeficient asymetrie***)

$$A = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^3}{s^3}$$ pro neroztříděný soubor,

$$A = \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} f_j\left(x_j^* - \bar{x}\right)^3}{s^3}$$ pro roztříděný soubor.

Vlastnosti koeficientu šikmosti:

a) $A > 0 \Leftrightarrow$ hodnoty x_i jsou koncentrovány pod $\overline{x}$,

b) $A = 0 \Leftrightarrow$ hodnoty x_i jsou rozloženy souměrně vzhledem k $\overline{x}$,

c) $A < 0 \Leftrightarrow$ hodnoty x_i jsou koncentrovány nad $\overline{x}$,

d) $y = ax + b \Rightarrow A(y) = \dfrac{a}{|a|} A(x)$ pro reálné konstanty a, b, $a \neq 0$,

e) A je bezrozměrné číslo.

Neroztříděný statistický soubor: $\big((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\big)$, ***rozsah*** n.

Roztříděný dvourozměrný statistický soubor: středy $\left(x_j^*, y_k^*\right)$, ***absolutní četnosti*** f_{jk},

relativní četnosti $\dfrac{f_{jk}}{n}$ (uvádí se též v %), ***kumulativní četnosti*** F_{jk}, $j = 1, \ldots, m_1$ a $k = 1, \ldots, m_2$ (uvádí se též v %).

Četnostní tabulka:

$x_j^* \backslash y_k^*$	y_1^*	. . .	$y_{m_2}^*$	f_{xj}
x_1^*	f_{11}	. . .	$f_{1\,m_2}$	$f_{x\,1}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$x_{m_1}^*$	$f_{m_1 1}$	. . .	$f_{m_1\,m_2}$	$f_{x\,m_1}$
f_{yk}	$f_{y\,1}$	. . .	$f_{y\,m_2}$	n

Marginální (***okrajové***) ***četnosti:***

$$f_{xj} = \sum_{k=1}^{m_2} f_{jk}\,,\; f_{yk} = \sum_{j=1}^{m_1} f_{jk} \quad \text{(příp. v relativním nebo procentuálním tvaru)},$$

$$\sum_{j=1}^{m_1} f_{xj} = \sum_{k=1}^{m_2} f_{yk} = \sum_{j=1}^{m_1}\sum_{k=1}^{m_2} f_{jk} = n\,.$$

Koeficient korelace (***korelační koeficient***)***:***

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{s(x)s(y)} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{xy}}{s(x)s(y)} \qquad \text{pro neroztříděný soubor,}$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{k=1}^{m_2} f_{jk}\left(x_j^* - \overline{x}\right)\left(y_k^* - \overline{y}\right)}{s(x)s(y)} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{k=1}^{m_2} f_{jk} x_j^* y_k^* - \overline{xy}}{s(x)s(y)} \qquad \text{pro roztříděný soubor,}$$

přičemž čitatelé ve všech zlomcích vyjadřují tzv. ***kovarianci*** *cov*.

Vlastnosti koeficientu korelace:

a) $u = ax + b, v = cy + d \Rightarrow r(u,v) = \dfrac{ac}{|ac|} r(x,y)$ pro reálné konstanty a, b, c, d, $a \neq 0, c \neq 0$,
b) $r(y,x) = r(x,y)$,
c) $-1 \leq r \leq 1$,
d) $r = \pm 1 \Leftrightarrow y = ax + b, a \neq 0$,
e) r je bezrozměrné číslo.

1.2 Základní poznatky

Seznam (zaveďte základní pojmy, uveďte požadované poznatky):
Zaveďte, případně objasněte, následující základní pojmy a poznatky popisné statistiky (Nápověda: Využijte skripta MIV-SP str. 8 – 15):

a) Základní soubor (populace) a jeho prvky (nositelé znaků): statistické jednotky.
b) Sledované statistické znaky a jejich hodnoty (úrovně znaku).
c) Jednorozměrné, dvourozměrné, vícerozměrné statistické znaky.
d) Kvantitativní (diskrétní a spojité) a kvalitativní (ordinální a nominální) statistické znaky.
e) Výběr, jeho rozsah (malý a velký), reprezentativnost a homogenita.
f) Výběr s opakováním a bez opakování.
g) Výběr záměrný (typické jednotky), oblastní, systematický a náhodný.
h) Statistický soubor (získaný výběrem), značení ($x_1,...,x_n$), rozsah souboru n.
i) Jednorozměrné, dvourozměrné a vícerozměrné statistické soubory. Tabulkový zápis vícerozměrného statistického souboru (řádky–statistické jednotky, sloupce– statistické znaky). Počet řádků (rozsah souboru) n a počet sloupců (rozměr souboru) k.
j) Uspořádaný statistický soubor ($x_{(1)},...,x_{(n)}$), variační obor $< x_{(1)}; x_{(n)} >$, rozpětí $x_{(n)} - x_{(1)}$.
k) Neroztříděný a roztříděný statistický soubor.
l) Třídy, délka třídy h a počet tříd m. Volba počtu tříd podle $m \approx 1 + 3{,}3 \log n$, případně $m \approx \sqrt{n}$ až $2\sqrt{n}$.
m) Středy tříd x_j^*, absolutní četnosti f_j, relativní četnosti $\dfrac{f_j}{n}$, $j = 1,...,m$, četnostní tabulka.
n) Kumulativní absolutní četnost F_j, kumulativní relativní četnost $\dfrac{F_j}{n}$.
o) Číselné charakteristiky polohy, proměnlivosti a souměrnosti. Zejména: aritmetický průměr, medián, modus, rozptyl, směrodatná odchylka a variační koeficient.
p) Grafická znázornění: krabicový graf pro jednorozměrný statistický soubor a rozptylový graf pro dvourozměrný statistický soubor. Histogramy.
q) Četnostní tabulka pro dvourozměrný statistický soubor. Marginální četnosti.
r) Kovariance cov. Korelační koeficient r pro neroztříděný a roztříděný dvourozměrný statistický soubor.

1.3 Kontrolní otázky

1. Popište typy statistických znaků a uveďte konkrétní příklady.
2. Co je výběr, jaké má vlastnosti a jak jej provádíme?
3. Definujte statistický soubor a uveďte, jak souvisí se základním souborem.
4. Popište roztřídění jednorozměrného statistického souboru s kvantitativním znakem.
5. Uveďte charakteristiky polohy jednorozměrného statistického souboru s kvantitativním znakem, jejich vlastnosti a význam.
6. Uveďte charakteristiky variability a souměrnosti jednorozměrného statistického souboru s kvantitativním znakem, jejich vlastnosti a význam.
7. Popište grafická znázornění jednorozměrného statistického souboru s kvantitativním znakem.
8. Popište roztřídění dvourozměrného statistického souboru s kvantitativními znaky a jeho grafická znázornění.
9. Uveďte číselné charakteristiky dvourozměrného statistického souboru s kvantitativními znaky.
10. Jaké vlastnosti a význam má koeficient korelace?
11. Popište zpracování a grafická znázornění statistických souborů s kvalitativními znaky.

1.4 Typické úlohy

Zadání (vysvětlete základní pojmy na příkladech):
Základní pojmy uvedené v odstavci z 1.2 vysvětlete na vlastních příkladech. Nápověda: Inspirujte se příklady z MIV-SP, použijte běžně dostupné údaje (výška studentů ve studijní skupině aj.).

Zadání (zpracujte neroztříděný jednorozměrný soubor):
Zpracujte zadaný neroztříděný jednorozměrný statistický soubor. Vypočtěte všechny číselné charakteristiky uvedené v odstavci 1.2 bod o).

Zadání (zpracujte roztříděný jednorozměrný soubor):
Zpracujte zadaný roztříděný jednorozměrný statistický soubor (případně neroztříděný soubor nejprve roztřídit). Vypočtěte všechny číselné charakteristiky uvedené v odstavci 1.2 bod o).

Zadání (zpracujte neroztříděný dvourozměrný soubor):
Zpracujte zadaný neroztříděný dvourozměrný statistický soubor. Vypočtěte všechny číselné charakteristiky uvedené v odstavci 1.2 body o) a r).

Zadání (zpracujte roztříděný dvourozměrný soubor):
Zpracujte zadaný roztříděný dvourozměrný statistický soubor. Vypočtěte všechny číselné charakteristiky uvedené v odstavci 1.2 body o) a r). Využijte četnostní tabulku podle odstavce 1.2 bod q).

2. PRAVDĚPODOBNOST A JEJÍ VLASTNOSTI

2.1 Přehled základních pojmů a vztahů

Relativní četnost (nastoupení náhodného jevu A)***:*** $\dfrac{N(A)}{N}$.

Pravděpodobnost $P(A)$, kde A je z jevového pole Σ na základním prostoru Ω***:***

1. $P(A) \geq 0$ pro všechny náhodné jevy $A \in \Sigma$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Pro každou posloupnost disjunktních náhodných jevů $A_i \in \Sigma$, $i = 1, 2, \dots$, je

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Základní vlastnosti pravděpodobnosti:

a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\emptyset) = 0$; $0 \leq P(A) \leq 1$;

b) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$; $P(B - A) = P(B) - P(A)$;

c) $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_n) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n), \quad n \geq 2;$$

speciálně pro $n = 2$ je $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

d) Pro konečný nebo spočetný základní prostor Ω

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}).$$

e) Pro konečný základní prostor Ω s n stejně pravděpodobnými elementárními jevy a náhodný jev A sestávající z m elementárních jevů

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Podmíněná pravděpodobnost: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ pro $P(B) \neq 0$.

Vlastnosti podmíněné pravděpodobnosti:

a) $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$,

speciálně pro $n = 2$ je $P(A \cap B) = P(A) P(B \mid A) = P(B) P(A \mid B)$.

b) Pro náhodný jev $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, resp. $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$, kde B_i jsou disjunktní náhodné jevy, $i = 1, \ldots, n$, je tzv. ***úplná pravděpodobnost***

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A \mid B_i)$$

a pro $P(A) \neq 0$ ***Bayesův vzorec***

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(B_j) P(A \mid B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A \mid B_i)}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Nezávislé náhodné jevy:

a) A, B jsou nezávislé, právě když $P(A \cap B) = P(A) P(B)$.

b) Jestliže $A_1, \ldots, A_n$ jsou vzájemně nezávislé, pak:
- $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n)$,
- $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - [1 - P(A_1)] \cdots [1 - P(A_n)]$, kde náhodné jevy $B_1, \ldots, B_n$ jsou vzájemně nezávislé pro libovolné varianty $B_i = A_i,\ \overline{A}_i,\ \Omega$.

2.2 Základní poznatky

Seznam (zaveďte základní pojmy, uveďte požadované poznatky):
Zaveďte, případně objasněte, následující základní pojmy a poznatky teorie pravděpodobnosti a podmíněné pravděpodobnosti (Nápověda: Využijte skripta MIV-SP str. 30-36):

a) Náhodný pokus. Hromadnost, stabilita, rozpoznatelnost.
b) Základní prostor: množina možných výsledků náhodného pokusu Ω.
c) Určování počtu všech výsledků náhodného pokusu pomocí kombinatorických vzorců.
d) Náhodný jev A jako podmnožina základního prostoru. Jev jistý a jev nemožný. Elementární náhodné jevy. Jev jako matematický model tvrzení o výsledcích náhodného pokusu.
e) Počet prvků (příznivých výsledků) náhodného jevu pomocí kombinatorických vzorců.
f) Vztahy mezi jevy. Následnost jevů pomocí množinové inkluze, rovnost náhodných jevů.
g) Operace s náhodnými jevy (opačný jev, průnik jevů, sjednocení jevů, rozdíl jevů) a jejich souvislost s logickými spojkami (negace, a, nebo).
h) Disjunktní (neslučitelné) jevy.
i) Opakování vlastnosti množinových operací a jejich využití pro operace s náhodnými jevy. Vennovy diagramy pro vysvětlení.
j) Množina uvažovaných jevů modelovaná pomocí jevového pole Σ.
k) Statistické zavedení pojmu pravděpodobnost. Souvislost s relativními četnostmi.
l) Axiomatické zavedení pojmu pravděpodobnost.
m) Formální model náhodného pokusu: pravděpodobnostní prostor (Ω, Σ, P).
n) Možnosti určení pravděpodobností elementárních jevů (úvahy o symetrii, statistické zjišťování, stanovisko expertů).
o) Klasická pravděpodobnost, výpočtový vzorec $P(A) = \dfrac{m}{n}$ a podmínka jeho použití (stejně pravděpodobné elementární jevy).
p) Využití základních vlastností pravděpodobnosti: výpočet pravděpodobnosti opačného jevu, výpočet pravděpodobnosti sjednocení disjunktních (neslučitelných) jevů, výpočet pravděpodobnosti obecného sjednocení jevů.
q) Výpočty pravděpodobnosti pro náhodné výběry: 1) s vracením a záleží na pořadí, 2) bez vracení a záleží na pořadí, 3) s vracením a nezáleží na pořadí, 4) bez vracení a nezáleží na pořadí. Využití potřebných kombinatorických vzorců.
r) Zavedení podmíněné pravděpodobnosti a vzorec $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
s) Výpočet pravděpodobnosti průniku dvou náhodných jevů $P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$ a zobecnění pro více náhodných jevů.
t) Vzorec úplné pravděpodobnosti a jeho použití.
u) Bayesův vzorec a jeho použití.
v) Stochastická nezávislost náhodných jevů $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ a $P(A \mid B) = P(A)$.

2.3 Kontrolní otázky

1. V čem spočívá náhodnost náhodného jevu? Uveďte konkrétní příklad.
2. Co vyjadřuje $P(A)$ vzhledem k nastoupení jevu A při opakování pokusu?
3. Jaký je vztah mezi jevy A a Ø, jestliže $P(A) = 0$?
4. Uveďte příklad, kdy nelze použít tzv. klasickou pravděpodobnost.
5. Vypočtěte $P(A \cup B \cup C)$ pomocí pravděpodobností jevů A, B, C a jejich průniků.
6. Aplikujte úplnou pravděpodobnost a Bayesův vzorec na problém z Vašeho okolí.
7. Uveďte konkrétní příklad na nezávislé náhodné jevy.
8. Jaký je vztah mezi disjunktními jevy a nezávislými jevy?
9. Vyjádřete $P(A \cup B)$ pro (a) nezávislé (b) "závislé" náhodné jevy.

2.4 Typické úlohy

Zadání (využití základních vlastností pravděpodobnosti):
S využitím výpočtu pravděpodobnosti opačného jevu a pravděpodobnosti sjednocení jevů řešte slovní zadání zahrnující slova „alespoň“ a „nebo“.

Zadání (výběry s vracením a bez vracení):
V krabici je N výrobků, z nich je M vadných. Náhodně vybíráte postupně n výrobků. Vypočtěte pravděpodobnost toho, že:

a) mezi vybranými výrobky je právě x vadných, když vybrané výrobky nevracíte;
b) mezi vybranými výrobky je alespoň x vadných, když vybrané výrobky nevracíte;
c) mezi vybranými výrobky je právě x vadných, když vybrané výrobky vracíte;
d) mezi vybranými výrobky je alespoň x vadných, když vybrané výrobky vracíte.

(Nápověda: Lze též využít vztahy pro hypergeometrické a binomické rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny).

Zadání (přemísťování mezi krabicemi):
Uvažujeme dvě krabice s výrobky. V první krabici je a kvalitních výrobků a b nekvalitních. V druhé krabici je c kvalitních výrobků a d nekvalitních. Náhodně vybereme jeden výrobek z první krabice a vložíme jej do druhé krabice. Potom z druhé krabice vybereme opět jeden výrobek. Vypočtěte pravděpodobnost toho, že:

a) z první krabice byl vybrán kvalitní výrobek;
b) z první i druhé krabice byly vybrány jen kvalitní výrobky;
c) z druhé krabice byl vybrán kvalitní výrobek;
d) z první krabice byl vybrán kvalitní výrobek, když víme, že z druhé krabice byl vybrán kvalitní výrobek.

Zadání (testování kvality výrobku):
Máme skupinu N výrobků, z nich je M vadných, zbývající výrobky jsou kvalitní. Náhodně vybíráme jeden výrobek. Test jakosti výrobku označí vybraný vadný výrobek jako vadný s pravděpodobností p a vybraný kvalitní výrobek označí jako vadný s pravděpodobností q. Vypočtěte pravděpodobnost toho, že:

a) náhodně vybraný výrobek je kvalitní;
b) náhodně vybraný výrobek je kvalitní a je označen jako kvalitní;
c) náhodně vybraný výrobek je označen jako kvalitní;
d) náhodně vybraný výrobek, který byl označen jako kvalitní je skutečně kvalitní.

3. NÁHODNÁ VELIČINA A JEJÍ CHARAKTERISTIKY

3.1 Přehled základních vztahů

Distribuční funkce: $F(x) = P(X < x) = P\left(X \in (-\infty; x)\right)$ pro všechna $x \in (-\infty; +\infty)$.

Vlastnosti distribuční funkce:

a) $0 \le F(x) \le 1$ pro všechna $x \in (-\infty; +\infty)$,

b) $F(x)$ je neklesající, zleva spojitá a má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti na $(-\infty; +\infty)$,

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$,

d) $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$ pro libovolná reálná čísla $a < b$,
speciálně $P(a \le X) = 1 - F(a)$, $P(X < b) = F(b)$, $P(-\infty < X) = P(X < \infty) = 1$,

e) $P(X = c) = \lim\limits_{x \to c+} F(x) - F(c)$ pro libovolné reálné číslo c.

Základní druhy náhodných veličin: diskrétní, spojité.

Pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny: $p\left(x\right) = P\left(X = x\right) > 0$, $x = x_1, x_2, \dots$.

Vlastnosti pravděpodobnostní funkce:

a) $\sum\limits_{x} p(x) = 1$,

b) $F(x) = \sum\limits_{t<x} p(t)$ pro všechna $x \in (-\infty; +\infty)$,

c) $P\left(X \in M\right) = \sum\limits_{x \in M} p(x)$ pro libovolnou množinu reálných čísel M.

Hustota pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny: taková nezáporná funkce $f(x)$, že pro všechna $x \in (-\infty; +\infty)$ je

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t .$$

Vlastnosti hustoty pravděpodobnosti:

a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$,

b) $f(x) = F'(x)$, pokud derivace existuje,

c) $P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) =$

$$= \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \quad \text{pro libovolná reálná čísla } a \le b,$$

d) $P(X = c) = 0$ pro libovolné reálné číslo c.

Střední hodnota:

$E(X) = \sum\limits_{x} xp(x)$ pro diskrétní náhodnou veličinu X (pokud řada konverguje absolutně),

$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ pro spojitou náhodnou veličinu X (pokud integrál konverguje absolutně).

Vlastnosti střední hodnoty:

a) $E(aX + b) = aE(X) + b$ pro libovolná reálná čísla a, b,

b) $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right)$ pro náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$,

c) $E(X)$ má tentýž rozměr jako náhodná veličina X.

Rozptyl (***disperze***, ***variance***)***:***

$$D(X) = E\left([X - E(X)]^2\right).$$

Vlastnosti rozptylu:

a) $D(X) = \sum_x (x - E(X))^2 p(x) = \sum_x x^2 p(x) - (E(X))^2$ pro diskrétní náhodnou veličinu X (pokud řada konverguje),

b) $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x - (E(X))^2$ pro spojitou náhodnou veličinu X (pokud integrál konverguje),

c) $D(X) \geq 0$,

d) $D(aX + b) = a^2\, D(X)$ pro libovolná reálná čísla a, b,

e) $D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D\left(X_i\right)$ pro nezávislé náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$,

f) $D(X)$ má rozměr rovný kvadrátu rozměru náhodné veličiny X.

Směrodatná odchylka: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Vlastnosti směrodatné odchylky:

a) $\sigma(X) \geq 0$,

b) $\sigma(aX + b) = |a|\, \sigma(X)$ pro libovolná reálná čísla a, b,

c) $\sigma(X)$ má tentýž rozměr jako náhodná veličina X.

Koeficient šikmosti (***koeficient asymetrie***)***:*** $A(X) = \dfrac{E\left([X - E(X)]^3\right)}{[\sigma(X)]^3}$.

Vlastnosti koeficientu šikmosti:

a) Pro symetrické rozdělení je $A(X) = 0$, pro rozdělení protáhlejší směrem nalevo je $A(X) < 0$ a pro rozdělení protáhlejší směrem napravo je $A(X) > 0$.

b) $A(aX + b) = \dfrac{a}{|a|} A(X)$ pro reálné konstanty a, b, $a \neq 0$,

c) $A(X)$ je bezrozměrné číslo.

P-kvantil (**100*P* %-*kvantil***)***:***

1. $x_P = \inf\{x;\, F(x) \geq P\}$ pro $0 < P < 1$,
2. speciálně pro spojitou náhodnou veličinu X s rostoucí distribuční funkcí je $F(x_P) = P$,
3. $x_{0,5}$ je ***medián***.

Modus: hodnota $\hat{x}$, v níž nabývá pravděpodobnostní funkce nebo hustota pravděpodobnosti maximum, příp. suprémum.

3.2 Základní poznatky

Seznam (zaveďte základní pojmy, uveďte požadované poznatky):
Zaveďte, případně objasněte, následující základní pojmy a poznatky problematiky náhodných veličin a jejích rozdělení pravděpodobnosti (Nápověda: Využijte skripta MIV-SP str. 51-56):

a) Náhodná veličina a její rozdělení pravděpodobnosti.
b) Diskrétní a spojitá náhodná veličina.
c) Základní funkční charakteristika diskrétní náhodné veličiny: pravděpodobnostní funkce, její graf a vlastnosti.
d) Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny, její graf a vlastnosti. Vztahy mezi pravděpodobnostní a distribuční funkcí.
e) Základní funkční charakteristika spojité náhodné veličiny: hustota rozdělení pravděpodobnosti, její graf a vlastnosti.
f) Distribuční funkce spojité náhodné veličiny, její graf a vlastnosti. Vztahy mezi hustotou a distribuční funkcí.
g) Shrnutí obecných vlastností distribuční funkce náhodné veličiny.
h) Výpočty pravděpodobnosti náhodných jevů pomocí pravděpodobnostní funkce nebo hustoty.
i) Výpočty pravděpodobnosti náhodných jevů pomocí distribuční funkce.
j) Číselné charakteristiky náhodné veličiny, zejména: střední hodnota, modus, medián, rozptyl, směrodatná odchylka a kvantily. Geometrická interpretace některých charakteristik.
k) Výpočty uvedených číselných charakteristik, samostatné vztahy pro diskrétní a spojitá rozdělení pravděpodobnosti. Zjednodušení výpočtu pro rozptyl.

3.3 Kontrolní otázky

1. Uveďte 3 konkrétní příklady na diskrétní a spojité náhodné veličiny.
2. Načrtněte graf distribuční funkce a popište její vlastnosti.
3. Jakými funkčními charakteristikami se popisuje diskrétní náhodná veličina?
4. Jakými funkčními charakteristikami se popisuje spojitá náhodná veličina?
5. Které číselné charakteristiky vyjadřují polohu rozdělení pravděpodobnosti?
6. Které číselné charakteristiky vyjadřují variabilitu rozdělení pravděpodobnosti?
7. Jaké základní vlastnosti má střední hodnota náhodné veličiny? Interpretujte je!
8. Jaké základní vlastnosti má rozptyl náhodné veličiny? Interpretujte je!
9. Co znamená $D(X) = 0$?
10. Jaké základní vlastnosti má koeficient šikmosti náhodné veličiny? Interpretujte je!
11. Určete střední hodnotu a medián ceny výrobku v €, jestliže je známa jeho cena v Kč.
12. Určete rozptyl a směrodatnou odchylku ceny výrobku v US $, jestliže je známa jeho cena v Kč.
13. Co vyjadřuje medián náhodné veličiny?
14. Co vyjadřuje modus náhodné veličiny?

3.4 Typické úlohy

Zadání (školský příklad na diskrétní náhodnou veličinu):
Tabulkou je zadána reálná funkce reálné proměnné $p(x)$ (má nenulové funkční hodnoty v konečně mnoha bodech). Vyřešte následující problémy:

a) určete neznámou konstantu c tak, aby funkce $p(x)$ byla pravděpodobnostní funkcí, načrtněte její graf;

b) pro funkci $p(x)$ vypočtěte distribuční funkci $F(x)$. Řešení zapište formou tabulky a načrtněte graf distribuční funkce;
c) vypočtěte vybrané číselné charakteristiky (některé ze seznamu: střední hodnota, modus, medián, rozptyl, směrodatná odchylka);
d) vypočtěte pravděpodobnost zadaného složeného jevu (průniku, sjednocení jevů).

Zadání (školský příklad na spojitou náhodnou veličinu):
Je zadána reálná funkce reálné proměnné $f(x)$ (obvykle je definována po částech). Vyřešte následující problémy:

a) určete neznámou konstantu c tak, aby funkce $f(x)$ byla hustotou rozdělení pravděpodobnosti, načrtněte její graf;
b) pro funkci $f(x)$ vypočtěte distribuční funkci $F(x)$. Řešení přehledně zapište a načrtněte graf distribuční funkce;
c) vypočtěte vybrané číselné charakteristiky (některé ze seznamu: střední hodnota, modus, medián, rozptyl, směrodatná odchylka);
d) vypočtěte pravděpodobnost zadaného složeného jevu (průniku, sjednocení jevů).

4. NÁHODNÝ VEKTOR A JEHO CHARAKTERISTIKY

4.1 Přehled základních pojmů a vztahů

Simultánní (sdružená) distribuční funkce:

$F(x,y) = P(X < x, Y < y) = P\big((X,Y) \in (-\infty;\ x) \times (-\infty;\ y)\big)$ pro libovolné $(x, y) \in (-\infty;+\infty)^2$.

Vlastnosti simultánní distribuční funkce:

a) $0 \le F(x, y) \le 1$ pro všechny dvojice $(x,y) \in (-\infty;+\infty)^2$,

b) $F(x, y)$ je neklesající a zleva spojitá v každé proměnné x a y,

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x,y) = F(-\infty, y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x,y) = F(x,-\infty) = 0$,

$\lim\limits_{(x,y) \to (+\infty,+\infty)} F(x,y) = F(+\infty,+\infty) = 1$.

Simultánní pravděpodobnostní funkce:

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y) > 0 \text{ pro } (x, y) = (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots .$$

Vlastnosti simultánní pravděpodobnostní funkce:

a) $\sum\limits_x \sum\limits_y p(x,y) = 1$,

b) $F(x,y) = \sum\limits_{u<x} \sum\limits_{v<y} p(u,v)$ pro všechny dvojice $(x, y) \in (-\infty;+\infty)^2$,

c) $P\big((X,Y) \in M\big) = \sum\sum\limits_{(x,y) \in M} p(x,y)$ pro $M \subseteq (-\infty;+\infty)^2$.

Marginální pravděpodobnostní funkce:

$$p_X(x) = \sum_y p(x,y), \quad p_Y(y) = \sum_x p(x,y) .$$

Marginální distribuční funkce:

$$F_X(x) = \sum_{t<x} p_X(t) = \sum_{t<x} \sum_y p(t,y) = F(x,+\infty),$$

$$F_Y(y) = \sum_{t<y} p_Y(t) = \sum_x \sum_{t<y} p(x,t) = F(+\infty, y) .$$

Podmíněné pravděpodobnostní funkce:

$$p_X(x \mid y) = P(X = x \mid Y = y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)},$$

$$p_Y(y \mid x) = P(Y = y \mid X = x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} .$$

Nezávislé náhodné veličiny (X a Y)***:***

$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ a $p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$ pro všechny dvojice $(x, y) \in \in (-\infty;+\infty)^2$.

Střed (centrum):

$(E(X), E(Y))$, kde $E(X) = \sum\limits_x x p_X(x) = \sum\limits_x \sum\limits_y x p(x,y)$, $E(Y) = \sum\limits_y y p_Y(y) = \sum\limits_x \sum\limits_y y p(x,y)$.

Kovariance:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\big([x - E(X)][y - E(Y)]\big) = E(XY) - E(X)E(Y) .$$

Vlastnosti kovariance:

a) $\operatorname{cov}(X,Y)=\sum_x\sum_y[x-E(X)][y-E(Y)]p(x,y)=\sum_x\sum_y xyp(x,y)-E(X)E(Y)$,

pokud řady konvergují absolutně,

b) cov(X, Y) = cov(Y, X),

c) cov(X, X) = $D(X)$, cov(Y, Y) = $D(Y)$,

d) $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2\operatorname{cov}(X, Y)$,

e) X, Y nezávislé $\Rightarrow$ cov(X, Y) = 0 a $E(X, Y) = E(X)E(Y)$,

f) $\operatorname{cov}(aX + b, cY + d) = ac \operatorname{cov}(X,Y)$ pro libovolná reálná čísla a, b, c, d,

g) cov(X, Y) má rozměr rovný součinu rozměrů X a Y.

Kovariační matice: $\mathbf{cov}(X,Y)=\begin{pmatrix} D(X) & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(Y,X) & D(Y)\end{pmatrix}$.

Koeficient korelace (***korelační koeficient***)***:***

$$\rho(X,Y)=\operatorname{cov}\left(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)},\frac{Y-E(Y)}{\sigma(Y)}\right)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}.$$

Vlastnosti koeficientu korelace:

a) $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$,

b) $\rho(X, X) = \rho(Y, Y) = 1$,

c) $-1 \le \rho(X, Y) \le 1$,

d) $\rho(aX+b,cY+d)=\dfrac{ac}{|ac|}\rho(X,Y)$ pro libovolná reálná čísla a, b, c, d, kde $ac \neq 0$,

e) $Y = aX + b \Leftrightarrow |\rho(X, Y)| = 1$, kde a, b jsou reálná čísla, $a \neq 0$,

f) X, Y nezávislé $\Rightarrow$ $\rho(X, Y) = 0$,

g) $\rho(X, Y)$ je bezrozměrné číslo.

Korelační matice: $\boldsymbol{\rho}(X,Y)=\begin{pmatrix} 1 & \rho(X,Y) \\ \rho(Y,X) & 1\end{pmatrix}$.

Nekorelované náhodné veličiny (X a Y)***:***

a) $\rho(X, Y) = 0$, resp. cov(X, Y) = 0,

b) nezávislé náhodné veličiny jsou nekorelované, ale nekorelované náhodné veličiny nemusí být nezávislé.

4.2 Základní poznatky

Seznam (zaveďte základní pojmy, uveďte požadované poznatky):

Zaveďte, případně objasněte, následující základní pojmy a poznatky problematiky diskrétního náhodného vektoru (Nápověda: Využijte skripta MIV-SP str. 67-75):

a) Náhodný vektor. Složky a populace.

b) Dvourozměrný náhodný vektor. Diskrétní sdružené rozdělení pravděpodobnosti.

c) Sdružená pravděpodobnostní funkce $p(x,y)$, její graf a vlastnosti.

d) Sdružená distribuční funkce $F(x,y)$,její graf a vlastnosti.

e) Výpočet pravděpodobnosti náhodného jevu pomocí sdružené pravděpodobnostní funkce nebo sdružené distribuční funkce.

f) Marginální rozdělení pravděpodobnosti, marginální pravděpodobnostní funkce $p_X(x)$, $p_Y(y)$ a marginální distribuční funkce $F_X(x), F_Y(y)$.

g) Vztahy mezi sdruženými a marginálními funkčními charakteristikami (pravděpodobnostní a distribuční funkcí).
h) Podmíněné rozdělení pravděpodobnosti, podmíněná pravděpodobnostní funkce $p_X(x\,|\,y)$, $p_Y(y\,|\,x)$ a podmíněná distribuční funkce $F_X(x\,|\,y)$, $F_Y(y\,|\,x)$.
i) Nezávislost náhodných veličin.
j) Číselné charakteristiky diskrétního náhodného vektoru. Využití číselných charakteristik náhodných veličin (střední hodnota, rozptyl).
k) Kovariance, kovarianční matice, koeficient korelace, korelační matice. Nekorelovanost a nezávislost náhodných veličin.

4.3 Kontrolní otázky

1. Proč je nutno k popisu dvojice náhodných veličin použít náhodný vektor?
2. Uveďte aspoň 3 konkrétní příklady na diskrétní náhodný vektor.
3. Uveďte aspoň 3 konkrétní příklady na spojitý náhodný vektor.
4. Jaké simultánní funkční charakteristiky popisují náhodný vektor?
5. Jaké marginální a podmíněné funkční charakteristiky popisují náhodný vektor?
6. Kdy jsou složky náhodného vektoru nezávislé?
7. Uveďte základní číselné charakteristiky náhodného vektoru.
8. Jaké vlastnosti má koeficient korelace?
9. Jaký je vztah mezi nekorelovanými složkami a nezávislými složkami náhodného vektoru?
10. Jak se změní kovariance a koeficient korelace ceny v Kč a množství v kg, jestliže cenu vyjádříme v haléřích a množství v tunách?

4.4 Typické úlohy

Zadání (diskrétní náhodný vektor):
Tabulkou je zadána reálná funkce dvou reálných proměnných $p(x, y)$ (má nenulové funkční hodnoty v konečně mnoha bodech). Vyřešte následující problémy:

a) určete neznámou konstantu k tak, aby funkce $p(x, y)$ byla pravděpodobnostní funkcí;
b) pro funkci $p(x, y)$ vypočtěte distribuční funkci $F(x, y)$ a řešení zapište formou tabulky;
c) vypočtěte marginální pravděpodobnostní a distribuční funkce;
d) posuďte nezávislost složek náhodného vektoru;
e) vypočtěte některé zadané podmíněné pravděpodobnostní funkce;
f) vypočtěte koeficient korelace;
g) vypočtěte pravděpodobnost zadaného složeného jevu.

5. ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI PRO APLIKACE

5.1 Přehled základních pojmů a vztahů

Binomické rozdělení Bi(n, p), kde n je přirozené číslo, p je reálné číslo, $0 < p < 1$:

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n;$$

$$E(X) = np; \quad D(X) = np(1-p); \quad A(X) = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}; \quad (n+1)p - 1 \le \hat{x} \le (n+1)p.$$

Hypergeometrické rozdělení H(N, M, n), kde N, M a n jsou taková přirozená čísla, že $1 \le n \le N$, $1 \le M \le N$:

$$p(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = \max\{0, M-N+n\}, \dots, \min\{M, N\};$$

$$E(X) = n\frac{M}{N}; \quad D(X) = n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}; \quad a-1 \le \hat{x} \le a, \text{ kde } a = \frac{(M+1)(n+1)}{N+2}.$$

Poissonovo rozdělení Po(λ), kde λ je reálné číslo, $\lambda > 0$:

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, \dots;$$

$$E(X) = \lambda; \quad D(X) = \lambda; \quad A(X) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}; \quad \lambda - 1 \le \hat{x} \le \lambda.$$

Rovnoměrné rozdělení R(a, b), kde a, b jsou reálná čísla, $a < b$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{pro } x \in \langle a; b\rangle, \\ 0 & \text{pro } x \notin \langle a; b\rangle; \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty; a), \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{pro } x \in \langle a; b\rangle, \\ 1 & \text{pro } x \in (b; +\infty); \end{cases}$$

$$E(X) = x_{0,5} = \frac{a+b}{2}; \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad A(X) = 0.$$

Normální rozdělení N(μ, σ^2), kde μ, σ^2 jsou reálná čísla, $\sigma^2 > 0$:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$E(X) = x_{0,5} = \hat{x} = \mu; \quad D(X) = \sigma^2; \quad A(X) = 0.$$

Základní vlastnosti normálního rozdělení N(μ, σ^2) a N(0;1)***:***

a) náhodná veličina $U = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, kde X má normální rozdělení N(μ, σ^2), má ***normované*** (***základní***) ***normální rozdělení*** N(0;1) s distribuční funkcí $\Phi(u)$ - viz tabulku **T1**.

b) $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$,

c) $u_{1-P} = -u_P, \quad 0 < P < 1$,

d) $F(x) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$,

e) $x_P = \mu + \sigma x_P, \quad 0 < P < 1$.

Aproximace rozdělení:

a) Binomické rozdělení Bi(n, p), kde $p < 0{,}1$ a $n > 30$, aproximujeme Poissonovým rozdělením Po(λ), kde položíme $\lambda = np$. Jestliže $np(1-p) > 9$, můžeme binomické rozdělení náhodné veličiny X aproximovat normálním rozdělením N(μ, σ^2), kde klademe $\mu = np$ a $\sigma^2 = np(1-p)$. Pro celá nezáporná čísla a, b potom je

$$P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

b) Hypergeometrické rozdělení H(N, M, n) pro $n/N < 0{,}1$ aproximujeme binomickým rozdělením Bi(n, p), kde klademe $p = M/N$, anebo je pro $n/N < 0{,}1$, $M/N < 0{,}1$ a $n > 30$ aproximujeme Poissonovým rozdělením Po(λ), kde položíme $\lambda = nM/N$.

c) Poissonovo rozdělení Po(λ) náhodné veličiny X je kladně asymetrické, avšak pro $\lambda > 9$ je můžeme aproximovat normálním rozdělením N(μ, σ^2), kde klademe $\mu = \sigma^2 = \lambda$. Pro celá nezáporná čísla a, b potom je

$$P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

5.2 Základní poznatky

Seznam (zaveďte základní pojmy, uveďte požadované poznatky):
Zaveďte, případně objasněte, následující základní pojmy a poznatky problematiky náhodných veličin a jejich typických rozdělení pravděpodobnosti (Nápověda: Využijte skripta MIV-SP str. 85-95):

a) Funkční a číselné charakteristiky pro vybraná diskrétní rozdělení pravděpodobnosti: alternativní, binomické, hypergeometrické, Poissonovo.
b) Typická slovní zadání pro uvedená diskrétní rozdělení pravděpodobnosti.
c) Funkční a číselné charakteristiky pro vybraná spojitá rozdělení pravděpodobnosti: rovnoměrné, normální, exponenciální.
d) Typická slovní zadání pro uvedená spojitá rozdělení pravděpodobnosti.
e) Hledání ve statistických tabulkách a transformace výsledků pro normální rozdělení pravděpodobnosti.
f) Aproximace rozdělení pravděpodobnosti.

5.3 Kontrolní otázky

1. Uveďte aspoň 3 konkrétní příklady na binomické rozdělení pravděpodobnosti a popište význam jejich parametrů i číselných charakteristik.
2. Uveďte aspoň 3 konkrétní příklady na hypergeometrické rozdělení pravděpodobnosti a popište význam jejich parametrů i číselných charakteristik.
3. Uveďte aspoň 3 konkrétní příklady na Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti a popište význam jejich parametrů i číselných charakteristik.
4. Uveďte aspoň 3 konkrétní příklady na normální rozdělení pravděpodobnosti a popište význam jejich parametrů i číselných charakteristik.
5. Proč se používají aproximace rozdělení pravděpodobnosti.

5.4 Typické úlohy

Zadání (typické rozdělení pravděpodobnosti):
Na základě slovního zadání určete typ rozdělení pravděpodobnosti a vypočítejte:

a) hodnoty pravděpodobnostní funkce (případně hustoty rozdělení pravděpodobnosti);
b) hodnoty distribuční funkce $F(x)$ a načrtněte její graf;
c) vypočtěte vybrané číselné charakteristiky (např. střední hodnota, modus, medián, rozptyl, směrodatná odchylka);
d) vypočtěte pravděpodobnost zadaného náhodného jevu.

6. Náhodný výběr

6.1 Přehled základních vztahů

Základní úlohy matematické statistiky:
- ***odhady parametrů a rozdělení***,
- ***testování statistických hypotéz o parametrech a rozděleních***.

Náhodný výběr: náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1,...,X_n)$ s nezávislými složkami X_i, které mají stejné rozdělení jako pozorovaná náhodná veličina X s distribuční funkcí $F(x, \vartheta)$.

Simultánní distribuční funkce náhodného výběru: $F(\mathbf{x};\vartheta) = F(x_1,...,x_n;\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i;\vartheta)$.

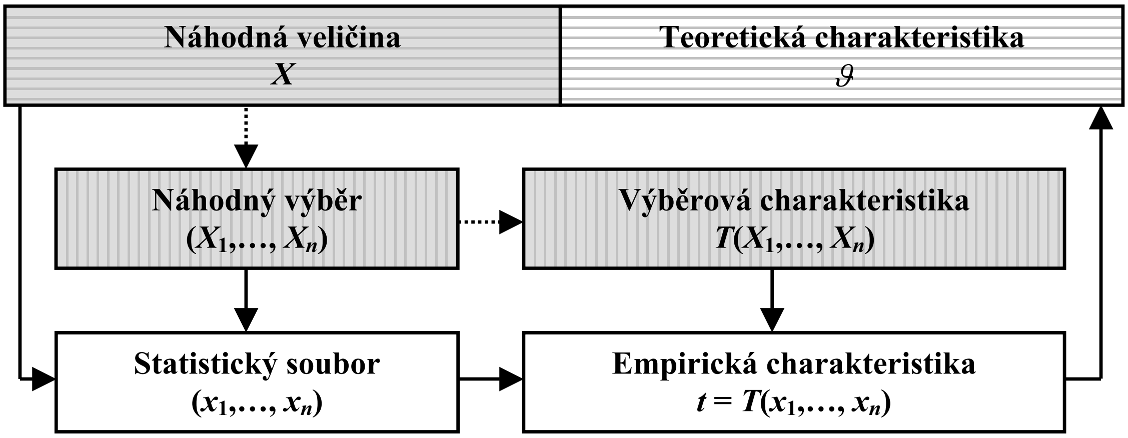
Statistický soubor $\mathbf{x} = (x_1,...,x_n)$***:*** pozorovaná hodnota náhodného výběru $\mathbf{X} = (X_1,...,X_n)$.

Výběrový prostor: množina všech statistických souborů.

Výběrová charakteristika (statistika): funkce náhodného výběru $T(X_1,...,X_n)$.

Empirická charakteristika (pozorovaná hodnota statistiky T): $t = T(x_1,...,x_n)$.

Základní princip matematické statistiky (statistické indukce):



Důležité výběrové charakteristiky:

1) ***výběrový průměr*** $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$,

2) ***výběrový rozptyl*** $S^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$,

3) ***výběrová směrodatná odchylka*** $S = \sqrt{S^2}$,

4) ***výběrový koeficient korelace*** $R = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{S(X)\,S(Y)}$.

Základní vlastnosti výběrového průměru $\overline{X}$ a výběrového rozptylu S^2:

a) $E\left(\overline{X}\right)=E\left(X\right)$,

b) $D\left(\overline{X}\right)=\dfrac{D\left(X\right)}{n}$, $\sigma\left(\overline{X}\right)=\dfrac{\sigma\left(X\right)}{\sqrt{n}}$, $E\left(S^2\right)=\dfrac{n-1}{n}D\left(X\right)$.

Nevychýlený výběrový rozptyl: $\hat{S}^2=\dfrac{n}{n-1}S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$.

Rozdělení pravděpodobnosti výběrových charakteristik (statistická rozdělení):

1. ***Normální rozdělení*** $\mathrm{N}(\mu;\sigma^2)$, kde μ, σ^2 jsou reálná čísla, $\sigma^2>0$ - viz tabulku **T1** pro $\mathrm{N}(0;1)$.
2. ***Pearsonovo rozdělení*** (***chí-kvadrát rozdělení***) $\chi^2(k)$ s k stupni volnosti, kde k je přirozené číslo - viz tabulku kvantilů **T3**.
3. ***Studentovo rozdělení*** (***t rozdělení***) $\mathrm{S}(k)$ s k stupni volnosti, kde k je přirozené číslo - viz tabulku kvantilů **T2**.
4. ***Fisherovo-Snedecorovo rozdělení*** (***F rozdělení***) $\mathrm{F}(k_1, k_2)$ s k_1, k_2 stupni volnosti, kde k_1, k_2 jsou přirozená čísla - viz tabulku kvantilů **T4**.

Základní vlastnosti pro X s rozdělením $\mathrm{N}(\mu;\sigma^2)$***:***

a) $\overline{X}$ má normální rozdělení $\mathrm{N}(\mu;\dfrac{\sigma^2}{n})$,

b) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$ má normální rozdělení $\mathrm{N}(0;1)$,

c) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n-1}$ má Studentovo rozdělení $\mathrm{S}(n-1)$,

d) $\dfrac{nS^2}{\sigma^2}$ má Pearsonovo rozdělení $\chi^2\left(n-1\right)$.

Asymptotická vlastnost výběrového průměru: posloupnost $\dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$, kde $X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé náhodné veličiny s libovolným stejným rozdělením pravděpodobnosti (se střední hodnotou μ_0 a směrodatnou odchylkou σ_0), konverguje pro $n\to\infty$ k náhodné veličině s rozdělením $\mathrm{N}(0;1)$.

6.2 Základní poznatky

Seznam (zaveďte základní pojmy, uveďte požadované poznatky):
Zaveďte, případně objasněte, následující základní pojmy a poznatky problematiky náhodného výběru (Nápověda: Využijte skripta MIV-SP str. 102-109):

a) Pozorovaná náhodná veličina (základní soubor), náhodný výběr a statistický soubor jako realizace náhodného výběru, výběrový prostor.
b) Výběrová charakteristika (statistika) a její pozorovaná hodnota (realizace statistiky).

c) Typické výběrové charakteristiky: výběrový průměr, výběrový rozptyl, výběrová směrodatná odchylka, výběrový koeficient korelace.
d) Základní vlastnosti výběrových charakteristik nezávislé na rozdělení pravděpodobnosti základního souboru.
e) Vybrané vlastnosti výběrových charakteristik závislé na rozdělení pravděpodobnosti základního souboru. Statistická rozdělení: Pearsonovo, Studentovo, Fisherovo−Snedecorovo.
f) Základní asymptotická vlastnost výběrového průměru.

6.3 Kontrolní otázky

1. Jaké dvě základní úlohy se řeší v matematické statistice? Uveďte konkrétní příklady.
2. Definujte náhodný výběr, jeho realizaci a popište jeho simultánní funkční charakteristiky.
3. Definujte výběrovou charakteristiku a empirickou charakteristiku.
4. Popište princip statistické indukce.
5. Popište základní vlastnosti výběrového průměru a výběrového rozptylu.
6. Jaká základní tzv. statistická rozdělení pravděpodobnosti používáme?
7. Jaké rozdělení pravděpodobnosti má výběrový průměr, jestliže pozorovaná náhodná veličina má normální rozdělení?
8. Jakým rozdělením pravděpodobnosti můžeme pro dostatečně velký rozsah náhodného výběru aproximovat rozdělení výběrového průměru, jestliže pozorovaná náhodná veličina má známou střední hodnotu i rozptyl?

7. ODHADY PARAMETRŮ

7.1 Přehled základních pojmů a vztahů

Odhad parametru ϑ : statistika $T(X_1,\dots, X_n)$, která nabývá hodnot blízkých parametru ϑ.

Nestranný (nevychýlený) odhad: $E(T) = \vartheta$.

Nejlepší nestranný odhad: nestranný odhad s nejmenším rozptylem.

Konzistentní odhad: $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|T-\vartheta\right| < \varepsilon\right) = 1$ pro libovolné reálné číslo $\varepsilon > 0$.

Vlastnosti:

a) $\overline{X}$ je nestranný konzistentní odhad střední hodnoty $E(X)$,

b) $\dfrac{n}{n-1}S^2$ je nestranný konzistentní odhad rozptylu $D(X)$.

Bodový odhad parametru ϑ: pozorovaná hodnota $t = T\left(x_1,\dots,x_n\right)$ na statistickém souboru $\left(x_1,\dots,x_n\right)$.

Bodové odhady základních číselných charakteristik:

$$E\left(X\right)=\overline{x},\ D\left(X\right)=\frac{n}{n-1}s^2,\ \sigma\left(X\right)=\sqrt{\frac{n}{n-1}}s,\ \rho\left(X,Y\right)=r\,.$$

Interval spolehlivosti (konfidenční interval) pro parametr ϑ se spolehlivostí $1-\alpha$: dvojice statistik $\left(T_1;T_2\right)$, přičemž $P\left(T_1\le\vartheta\le T_2\right)=1-\alpha$ pro $\alpha\in\langle 0;1\rangle$.

Intervalový odhad parametru ϑ se spolehlivostí $1-\alpha$: $\left\langle t_1;t_2\right\rangle$, kde t_1, t_2 jsou hodnoty statistik T_1, T_2 na statistickém souboru $\left(x_1,\dots,x_n\right)$.

Odhady parametrů normálního rozdělení:

a) ***Bodové odhady:*** $\mu=\overline{x},\ \sigma^2=\dfrac{n}{n-1}s^2,\ \sigma=\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}s,\ \rho=r$.

b) ***Intervalový odhad střední hodnoty μ při neznámém rozptylu σ^2 :***

$$\left\langle \overline{x}-t_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n-1}};\overline{x}+t_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right\rangle,$$

kde $t_{1-\alpha/2}$ je $\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$- kvantil Studentova rozdě-lení S(k) s $k = n-1$ stupni volnosti - viz tabulku **T2**.

c) ***Intervalový odhad rozptylu σ^2 :***

$$\left\langle \frac{ns^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}};\frac{ns^2}{\chi^2_{\alpha/2}}\right\rangle,$$

kde χ^2_P je P - kvantil Pearsonova rozdělení $\chi^2(k)$ s $k=n-1$ stupni volnosti - viz tabulku **T3**.

d) ***Intervalový odhad koeficientu korelace ρ pro $n\ge 10$:***

$$\left\langle \text{tgh } z_1;\text{tgh } z_2\right\rangle,$$

kde $z_1 = w - \dfrac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}$, $z_2 = w + \dfrac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}$, $w = \dfrac{1}{2}\left(\ln\dfrac{1+r}{1-r} + \dfrac{r}{n-1}\right)$,

$\operatorname{tgh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \dfrac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}$ a $u_{1-\alpha/2}$ je $\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$- kvantil normovaného normálního rozdělení N(0;1) - viz tabulku **T1**. Pro $1-\alpha = 0{,}95$ je $u_{0,975} = 1{,}960$ a pro $1-\alpha = 0{,}99$ je $u_{0,995} = 2{,}576$.

Odhady parametru binomického rozdělení:

a) ***Bodový odhad:*** $p = \dfrac{x}{n}$.

b) ***Intervalový odhad*** p pro $n > 30$:

$$\left\langle \frac{x}{n} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)}{n}};\ \frac{x}{n} + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)}{n}} \right\rangle,$$

kde $u_{1-\alpha/2}$ je $\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$- kvantil normovaného normálního rozdělení - viz tabulku **T1**.

7.2 Základní poznatky

Seznam (zaveďte základní pojmy, uveďte požadované poznatky):
Zaveďte, případně objasněte, následující základní pojmy a poznatky problematiky bodových a intervalových odhadů (Nápověda: Využijte skripta MIV-SP str. 111-118):

a) Pojem odhadu: neznámý parametr, statistika (výběrová charakteristika) jako odhad.
b) Vlastnosti odhadu: nestrannost a konzistence.
c) Bodový odhad jako pozorovaná hodnota odhadu.
d) Interval spolehlivosti pro parametr rozdělení. Spolehlivost $1-\alpha$. Intervalový odhad jako pozorovaná hodnota intervalu spolehlivosti.
e) Jednostranné a oboustranné intervalové odhady.
f) Souvislost přesnosti a spolehlivosti intervalového odhadu.
g) Odhady parametrů normálního rozdělení (jednorozměrný případ): bodové odhady střední hodnoty, rozptylu a směrodatné odchylky, intervalové odhady střední hodnoty, rozptylu a směrodatné odchylky.
h) Bodový a intervalový odhad koeficientu korelace (dvourozměrné normální rozdělení).
i) Bodový a intervalový odhad parametru *p* binomického rozdělení.

7.3 Kontrolní otázky

1. Definujte pojem odhadu parametru a jeho druhy.
2. Definujte bodový odhad a uveďte bodové odhady základních číselných charakteristik.
3. Popište interval spolehlivosti a intervalový odhad parametrů.
4. Jaký význam má spolehlivost intervalového odhadu?
5. Jaké druhy intervalových odhadů používáme?
6. Jaký vliv má změna spolehlivosti na velikost intervalového odhadu při zachování rozsahu náhodného výběru?

7. Jaký obecný vliv má změna rozsahu náhodného výběru na velikost intervalového odhadu při zachování jeho spolehlivosti?
8. Jakou spolehlivost má bodový odhad?
9. Co rozumíme standardní chybou intervalového odhadu?

7.4 Typické úlohy

Zadání (jednorozměrný soubor, odhady parametrů):
Zpracováním zadaného jednorozměrného statistického souboru získaného výběrem z normálního rozdělení určete:

a) bodové odhady střední hodnoty, rozptylu a směrodatné odchylky;
b) pro zadanou spolehlivost $1-\alpha$ vypočtěte intervalové odhady střední hodnoty, rozptylu a směrodatné odchylky.

Zadání (jednorozměrný soubor, odhady parametrů):
Zpracováním zadaného jednorozměrného statistického souboru získaného výběrem z binomického rozdělení Bi(1,p) určete:

a) bodový odhad parametru p;
b) pro zadanou spolehlivost $1-\alpha$ vypočtěte intervalový odhad parametru p.

Zadání (dvourozměrný soubor, odhady parametrů):
Zpracováním zadaného dvourozměrného statistického souboru (nesetříděného) získaného výběrem z dvourozměrného normálního rozdělení určete:

a) bodové odhady středních hodnot, rozptylů, směrodatných odchylek a koeficientu korelace;
b) pro zadanou spolehlivost $1-\alpha$ vypočtěte intervalové odhady středních hodnot, rozptylů, směrodatných odchylek a koeficientu korelace.

8. TESTOVÁNÍ STATISTICKÝCH HYPOTÉZ

8.1 Přehled základních pojmů a vztahů

Statistická hypotéza H: tvrzení o vlastnostech rozdělení pravděpodobnosti pozorované náhodné veličiny X s distribuční funkcí $F(x, \vartheta)$.

Test statistické hypotézy: postup, jímž ověřujeme danou hypotézu.
Princip testování: proti testované ***nulové hypotéze*** H stavíme ***alternativní hypotézu*** $\overline{H}$.

Druhy hypotéz: dvoustranné, ***jednostranné***, ***složené***, ***parametrické***, ***neparametrické***.

Testování hypotézy: testové kritérium $T(X_1, ..., X_n)$, ***kritický obor*** W_α a jeho doplněk $\overline{W}_\alpha$, ***hladina významnosti*** $\alpha > 0$.
Rozhodnutí o hypotéze H pomocí pozorované hodnoty testového kritéria $t = T(x_1, ..., x_n)$***:***

- $t \in W_\alpha \Rightarrow$ ***zamítáme*** hypotézu H a ***nezamítáme*** hypotézu $\overline{H}$ na hladině významnosti α,
- $t \in \overline{W}_\alpha \Rightarrow$ ***nezamítáme*** hypotézu H a ***zamítáme*** hypotézu $\overline{H}$ na hladině významnosti α.

Chyba prvního druhu: H platí, avšak $t \in W_\alpha$, takže hypotézu H zamítáme; pravděpodobnost chyby je $\alpha = P(T \in W_\alpha / H)$.
Chyba druhého druhu: H neplatí, avšak $t \notin W_\alpha$, takže hypotézu H nezamítáme; pravděpodobnost chyby je $\beta = P(T \notin W_\alpha / \overline{H})$.

H	PLATÍ	NEPLATÍ
ZAMÍTÁME	CHYBA 1. DRUHU	-------
NEZAMÍTÁME	-------	CHYBA 2. DRUHU

Testy hypotéz o parametrech normálního rozdělení:

a) ***Test hypotézy*** $H: \mu = \mu_0$ ***při neznámém rozptylu*** σ^2***:***

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n-1}$$

a $\overline{W}_\alpha = \left\langle -t_{1-\alpha/2}; t_{1-\alpha/2} \right\rangle$, kde $t_{1-\alpha/2}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$-kvantil Studentova rozdělení S(k) s $k = n - 1$ stupni volnosti - viz tabulku **T2**.

b) ***Test hypotézy*** $H: \sigma^2 = \sigma_0^2$***:***

$$t = \frac{ns^2}{\sigma_0^2}$$

a $\overline{W}_\alpha = \left\langle \chi^2_{\alpha/2}; \chi^2_{1-\alpha/2} \right\rangle$, kde χ^2_P je P-kvantil Pearsonova rozdělení $\chi^2(k)$ s $k = n - 1$ stupni volnosti - viz tabulku **T3**.

c) ***Test hypotézy*** $H: \rho = \rho_0$ ***pro*** $n \geq 10,\ |r| \neq 1,\ |\rho_0| \neq 1$***:***

$$t = \left(\ln\frac{1+r}{1-r} - \ln\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} - \frac{\rho_0}{n-1} \right) \frac{\sqrt{n-3}}{2}$$

a $\overline{W}_\alpha = \left\langle -u_{1-\alpha/2};\, u_{1-\alpha/2} \right\rangle$, kde $u_{1-\alpha/2}$ je $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-kvantil normálního rozdělení N(0; 1) - viz tabulku **T1**.

d) ***Test hypotézy*** $H: \mu(X) = \mu(Y)$ ***pro dvojice (t - test pro párové hodnoty):***

$$t = \frac{\overline{d}}{s(d)}\sqrt{n-1},$$

kde $\overline{d}$ a $s^2(d)$ jsou empirické charakteristiky rozdílů $d_i = x_i - y_i$ pro dvojice (x_i, y_i), $i = 1,\ldots, n$, a $\overline{W}_\alpha = \left\langle -t_{1-\alpha/2};\, t_{1-\alpha/2} \right\rangle$, kde $t_{1-\alpha/2}$ je $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-kvantil Studentova rozdělení S(k) s $k = n - 1$ stupni volnosti - viz tabulku **T2**.

e) ***Test hypotézy*** $H: \mu(X) - \mu(Y) = \mu_0$ ***při neznámých rozptylech*** $\sigma^2(X) = \sigma^2(Y)$***:***

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y} - \mu_0}{\sqrt{n_1\, s^2(x) + n_2\, s^2(y)}} \sqrt{\frac{n_1\, n_2\, (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

a $\overline{W}_\alpha = \left\langle -t_{1-\alpha/2};\, t_{1-\alpha/2} \right\rangle$, kde $t_{1-\alpha/2}$ je $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-kvantil Studentova rozdělení S(k) s $k =$ $= n_1 + n_2 - 2$ stupni volnosti - viz tabulku **T2**.

f) ***Test hypotézy*** $H: \mu(X) - \mu(Y) = \mu_0$ ***při neznámých rozptylech*** $\sigma^2(X) \neq \sigma^2(Y)$***:***

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2(x)}{n_1 - 1} + \frac{s^2(y)}{n_2 - 1}}}$$

a $\overline{W}_\alpha = \left\langle -\overline{t}_{1-\alpha/2};\, \overline{t}_{1-\alpha/2} \right\rangle$, kde $\overline{t}_{1-\alpha/2} = \dfrac{\frac{s^2(x)}{n_1-1}t(x) + \frac{s^2(y)}{n_2-1}t(y)}{\frac{s^2(x)}{n_1-1} + \frac{s^2(y)}{n_2-1}}$, $t(x)$, resp. $t(y)$, je $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-kvantil Studentova rozdělení S(k) s $k = n_1 - 1$, resp. $n_2 - 1$, stupni volnosti - viz tabulku **T2**.

g) ***Test hypotézy*** $H: \sigma^2(X) = \sigma^2(Y)$***:***

$$t = \frac{\max\left(\frac{n_1 s^2(x)}{n_1 - 1}; \frac{n_2 s^2(y)}{n_2 - 1} \right)}{\min\left(\frac{n_1 s^2(x)}{n_1 - 1}; \frac{n_2 s^2(y)}{n_2 - 1} \right)},$$

kde $\overline{W}_\alpha = \langle 1\,; F_{1-\alpha/2} \rangle$ a $F_{1-\alpha/2}$ je $\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$-kvantil Fishe-rova - Snedecorova rozdělení F(k_1, k_2) se stupni volnosti $k_1 = n_1 - 1$ a $k_2 = n_2 - 1$ pro $\dfrac{n_1 s^2(x)}{n_1 - 1} \geq \dfrac{n_2 s^2(y)}{n_2 - 1}$ anebo $k_1 = n_2 - 1$ a $k_2 = n_1 - 1$ pro $\dfrac{n_1 s^2(x)}{n_1 - 1} \leq \dfrac{n_2 s^2(y)}{n_2 - 1}$ - viz tabulku **T4**.

Testy hypotéz o parametru binomického rozdělení:

a) ***Test hypotézy*** $H: p = p_0$ ***pro*** $n > 30$***:***

$$t = \frac{\dfrac{x}{n} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

a $\overline{W}_\alpha = \langle -u_{1-\alpha/2}\,; u_{1-\alpha/2} \rangle$, kde $u_{1-\alpha/2}$ je $\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$-kvantil normálního rozdělení N(0; 1) - viz tabulku **T1**.

b) ***Test hypotézy*** $H: p_1 = p_2$ ***pro*** $n_1 > 50$ ***a*** $n_2 > 50$***:***

$$t = \frac{\dfrac{x}{n_1} - \dfrac{y}{n_2}}{\sqrt{\overline{f}(1-\overline{f})}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

pro $\overline{f} = \dfrac{x+y}{n_1 + n_2}$ a $\overline{W}_\alpha = \langle -u_{1-\alpha/2}\,; u_{1-\alpha/2} \rangle$, kde $u_{1-\alpha/2}$ je $\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$-kvantil normálního rozdělení N(0; 1) viz tabulku **T1**.

Testy hypotéz o rozdělení (testy dobré shody):

a) ***Grafická metoda:*** vynesením bodů $\left[x_{(i)}; (i-0{,}5)/n\right]$ anebo $\left[x_{(i)}; i/(n+1)\right]$, $i = 1, \ldots, n$, do kartézské souřadné soustavy, kde grafem uvažované distribuční funkce $F(x, \vartheta)$ je pro libovolnou hodnotu ϑ přímka.

b) ***Test chí-kvadrát (Pearsonův test):***

$$t = \sum_{j=1}^{m} \frac{(f_j - \tilde{f}_j)^2}{\tilde{f}_j} = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{f_j^2}{\tilde{f}_j} \right) - n\,,$$

kde f_j jsou pozorované absolutní četnosti, $\tilde{f}_j = n\left(F(x_j^+) - F(x_{j-1}^+)\right) > 5$ jsou teoretické absolutní čet-nosti, x_j^+ je pravý koncový bod j-té třídy pro $j = 1, \ldots, m$, $x_0^+ = -\infty$, $x_m^+ = +\infty$, a $\overline{W}_\alpha = \langle 0\,; \chi^2_{1-\alpha} \rangle$, kde $\chi^2_{1-\alpha}$ je (1 – α)-kvantil Pearsonova rozdělení $\chi^2(k)$ s $k = m - q - 1$ stupni volnosti - viz tabulku **T3**; q je počet odhadnutých parametrů.

8.2 Základní poznatky

Osnova (zaveďte základní pojmy, uveďte požadované poznatky):
Zaveďte, případně objasněte, následující základní pojmy a poznatky testování statistických hypotéz (Nápověda: Využijte skripta MIV-SP str. 123-137):

a) Statistická hypotéza jako tvrzení o vlastnostech rozdělení pozorované náhodné veličiny.
b) Nulová hypotéza, alternativní hypotéza. Jednostranná a oboustranná alternativní hypotéza. Jednoduchá a složená hypotéza. Parametrické a neparametrické hypotézy.
c) Testové kritérium, kritický obor, hladina významnosti .
d) Pozorovaná hodnota testového kritéria, zamítnutí a nezamítnutí hypotézy.
e) Chyby 1. a 2. druhu, jejich pravděpodobnosti.
f) Obvyklý výpočtový postup při testování: zadaná hladina významnosti, zpracování statistického souboru, výpočet pozorované hodnoty testového kritéria, použití oboru nezamítnutí, závěr.
g) *P*-hodnota (pravděpodobnost překročení) a její použití ve statistickém software.
h) Souvislost intervalových odhadů a testů hypotéz o parametrech.
i) Testy hypotéz o parametrech normálního rozdělení (jednorozměrný případ): test hypotézy $\mu = \mu_0$ (při neznámém rozptylu), test hypotézy $\sigma^2 = \sigma_0^2$.
j) Testy hypotéz o parametrech normálního rozdělení (obecný dvourozměrný případ): test hypotézy $\rho = \rho_0$, *t*-test pro párové hodnoty.
k) Testy hypotéz o parametrech normálního rozdělení (dvourozměrný případ, nezávislost *X* a *Y*): testy rozdílu středních hodnot a podílu rozptylů.
l) Testy hypotéz o rozdělení: chí-kvadrát test.

8.3 Kontrolní otázky

1. Definujte statistickou hypotézu a popište její druhy.
2. Co je testové kritérium a kritický obor?
3. Jakou konvenci používáme při testování statistické hypotézy?
4. Popište chybu 1. a 2. druhu při testování statistické hypotézy. Jaký je jejich praktický význam?
5. Jaký je vztah mezi pravděpodobnostmi chyb 1. a 2. druhu a rozsahem náhodného výběru?
6. Jak souvisejí intervalové odhady s testy parametrických hypotéz?
7. Jakým způsobem používáme tzv. *P*-hodnotu při testování parametrické hypotézy s dvoustrannou alternativní hypotézou na PC?
8. Jak testujeme hypotézu o rozdělení pravděpodobnosti pozorované náhodné veličiny?

8.4 Typické úlohy

Zadání (jednorozměrný soubor, hypotézy o parametrech normálního rozdělení):
Zpracováním zadaného jednorozměrného statistického souboru získaného výběrem z normálního rozdělení určete:

a) bodové odhady střední hodnoty, rozptylu a směrodatné odchylky;
b) pro zadanou spolehlivost $1-\alpha$ vypočtěte intervalové odhady střední hodnoty, rozptylu a směrodatné odchylky;
c) na hladině významnosti α otestujte statistické hypotézy o střední hodnotě a rozptylu.

Zadání (jednorozměrný soubor, hypotéza o parametru binomického rozdělení):
Zpracováním zadaného jednorozměrného statistického souboru získaného výběrem z bino-

mického rozdělení Bi(1,p) určete:

a) bodový odhad parametru p;
b) pro zadanou spolehlivost $1-\alpha$ vypočtěte intervalový odhad parametru p;
c) na hladině významnosti α otestujte hypotézu o parametru p.

Zadání (jednorozměrný soubor, hypotéza o typu rozdělení):
Pomocí zpracování zadaného jednorozměrného statistického souboru na hladině významnosti α otestujte hypotézu, že soubor byl získán výběrem ze zadaného rozdělení (klasického, normálního).

Zadání (dvourozměrný soubor, koeficient korelace):
Zpracováním zadaného dvourozměrného statistického souboru získaného výběrem z dvourozměrného normálního rozdělení určete:

a) bodový odhad koeficientu korelace;
b) pro zadanou spolehlivost $1-\alpha$ vypočtěte intervalový odhad koeficientu korelace;
c) na hladině významnosti α otestujte hypotézu, že náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé.

Zadání (dvourozměrný soubor, párové hodnoty):
Zpracováním zadaného dvourozměrného statistického souboru získaného výběrem z dvourozměrného normálního rozdělení určete:

a) bodové odhady střední hodnoty a rozptylu;
b) pro zadanou spolehlivost $1-\alpha$ vypočtěte intervalové odhady střední hodnoty a rozptylu;
c) na hladině významnosti α otestujte hypotézu, že rozdíl mezi sobě párovými hodnotami je statisticky nevýznamný.

Zadání (dvourozměrný soubor, srovnání výrobních postupů):
Zpracováním dvou statistických souborů získaných výběrem z normálního rozdělení určete:

a) bodové odhady střední hodnoty a rozptylu;
b) na hladině významnosti α testujte rovnost středních hodnot a rozptylů.

9. REGRESNÍ ANALÝZA

9.1 Přehled základních pojmů a vztahů

Regresní funkce: $y = \varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = E(Y \mid \mathbf{X} = \mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k)$ vektor nezávisle proměnných, y závisle proměnná, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_m)$ vektor ***regresních koeficientů*** β_j .

Realizace n experimentů: $(k + 1)$-rozměrný statistický soubor $((\mathbf{x}_1, y_1), ..., (\mathbf{x}_n, y_n))$.

Reziduální součet čtverců: $S^* = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \varphi(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}) \right]^2$.

Metoda nejmenších čtverců: určení $\boldsymbol{\beta}$ minimalizací reziduálního součtu čtverců.

Lineární regresní funkce: $y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j f_j(\mathbf{x})$, $f_j(\mathbf{x})$ známé funkce neobsahující $\beta_1, ..., \beta_m$.

Lineární regresní model:

1. Vektor $\mathbf{x}$ je nenáhodný, takže funkce $f_j(\mathbf{x})$ nabývají nenáhodných hodnot $f_{ji} = f_j(\mathbf{x}_i)$ pro $j = 1, ..., m$ a $i = 1, ..., n$.
2. Matice $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix}$ typu (m, n) s prvky f_{ji} má hodnost $m < n$.
3. Náhodná veličina Y_i , kde $E(Y_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j f_{ji}$ a $D(Y_i) = \sigma^2 > 0$ pro $i = 1, ..., n$.
4. Náhodné veličiny Y_i jsou nekorelované a mají normální rozdělení pravděpodobnosti pro $i = 1, ..., n$.

Ekvivalentní model: $Y_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j f_j(\mathbf{x}_i) + E_i$, $i = 1, ..., n$, kde E_i jsou nekorelované náhodné veličiny s normálním rozdělením pravděpodobnosti $N(0, \sigma^2)$.

Matice pro výpočty:

$$\mathbf{H} = \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} f_{1i} f_{1i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} f_{1i} f_{mi} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} f_{mi} f_{1i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} f_{mi} f_{mi} \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{g} = \mathbf{F}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} f_{1i} y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} f_{mi} y_i \end{pmatrix}.$$

Bodový odhad regresního koeficientu β_j***:*** b_j , $j = 1, ..., m$,
kde matice $\mathbf{b}$ je řešení ***soustavy normálních rovnic*** $\mathbf{Hb} = \mathbf{g}$.

Bodový odhad lineární regresní funkce: $y = \sum_{j=1}^{m} b_j f_j(\mathbf{x})$.

Bodový odhad rozptylu σ^2 **:**

$$s^2 = \frac{S^*_{\min}}{n-m},$$

kde $S^*_{\min} = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \sum_{j=1}^{m} b_j f_{ji}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \sum_{j=1}^{m} b_j g_j$ a g_j je prvek matice $\mathbf{g}$.

Intervalový odhad regresního koeficientu β_j ***se spolehlivostí*** $1-\alpha$ **:**

$$\left\langle b_j - s\sqrt{h^{jj}}\, t_{1-\alpha/2} ; b_j + s\sqrt{h^{jj}}\, t_{1-\alpha/2} \right\rangle,$$

kde h^{jj} je j-tý diagonální prvek matice $\mathbf{H}^{-1}$ pro $j = 1,\ldots,m$, $t_{1-\alpha/2}$ je $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-kvantil Studentova rozdělení S(k) s $k = n - m$ stupni volnosti - viz tabulku **T2**.

Intervalový odhad střední funkční hodnoty y ***se spolehlivostí 1*** $-\alpha$ **:**

$$\left\langle \sum_{j=1}^{m} b_j f_j(\mathbf{x}) - t_{1-\alpha/2}\, s\sqrt{h^*} ;\ \sum_{j=1}^{m} b_j f_j(\mathbf{x}) + t_{1-\alpha/2}\, s\sqrt{h^*} \right\rangle,$$

kde $h^* = \mathbf{f}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x})$, přičemž $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$, a $t_{1-\alpha/2}$ je $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-kvantil Studentova rozdělení S(k) s $k = n - m$ stupni volnosti - viz tabulku **T2**.

Intervalový odhad individuální funkční hodnoty y ***se spolehlivostí 1*** $-\alpha$ **:** v intervalovém odhadu střední funkční hodnoty místo h^* vezmeme $1 + h^*$.

Test hypotézy $H : \beta_j = \beta_{j0}$ ***proti alternativní hypotéze*** $\overline{H} : \beta_j \neq \beta_{j0}$ **:**

$$t = \frac{b_j - \beta_{j0}}{s\sqrt{h^{jj}}},$$

kde j je jeden pevně zvolený index, $j = 1,\ldots,m$, $\overline{W}_\alpha = \left\langle -t_{1-\alpha/2} ; t_{1-\alpha/2} \right\rangle$ a $t_{1-\alpha/2}$ je $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-kvantil Studentova rozdělení S(k) s $k = n - m$ stupni volnosti - viz tabulku **T2**.

Koeficient vícenásobné korelace: $r = \sqrt{1 - \frac{S^*_{\min}}{\sum y_i^2 - n\left(\overline{y}\right)^2}}$,

Index (***koeficient***) ***determinace:*** r^2, resp. $r^2 100\,\%$.

Regresní přímka: $y = \beta_1 + \beta_2 x$; $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Explicitní vztahy pro regresní přímku:

a) $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \sum 1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$, $\sum 1 = n$,

b) $\det \mathbf{H} = n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2$, $b_2 = \dfrac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\det \mathbf{H}}$, $b_1 = \overline{y} - b_2 \overline{x}$,

c) $S_{\min}^* = \sum \left(y_i - b_1 - b_2 x_i\right)^2 = \sum y_i^2 - b_1 \sum y_i - b_2 \sum x_i y_i$, $s^2 = \dfrac{S_{\min}^*}{n-2}$,

d) $h^{11} = \dfrac{\sum x_i^2}{\det \mathbf{H}}$, $h^{22} = \dfrac{n}{\det \mathbf{H}}$,

e) $h^* = \dfrac{1}{n} + \dfrac{\left(x - \overline{x}\right)^2}{\sum x_i^2 - n\left(\overline{x}\right)^2} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{n\left(x - \overline{x}\right)^2}{\det \mathbf{H}}$,

f) $r = \left| \, r(x, y) \, \right|$, kde $r(x, y)$ je koeficient korelace z kapitoly 1.

9.2 Základní poznatky

Osnova (zaveďte základní pojmy, uveďte požadované poznatky):
Zaveďte, případně objasněte, následující základní pojmy a poznatky regresní analýzy (Nápověda: Využijte skripta MIV-SP str. 143-151):

a) Regresní analýza, regresní funkce, regresní koeficienty. Lineární a nelineární regresní funkce.
b) Metoda nejmenších čtverců.
c) Předpoklady: linearita regresní funkce, nenáhodnost nezávisle proměnné veličiny, plná hodnost matice **F**, nulová střední hodnota aditivní náhodné chyby, konstantní rozptyl, nekorelovanost náhodných chyb a normalita jejich rozdělení pravděpodobnosti.
d) Soustava normálních rovnic pro lineární regresní model, bodový odhad regresních koeficientů získaný jejím vyřešením.
e) Bodový odhad rozptylu.
f) Intervalový odhad regresního koeficientu.
g) Intervalový odhad střední funkční hodnoty a odpovídající pás spolehlivosti.
h) Intervalový odhad individuální funkční hodnoty a odpovídající pás spolehlivosti.
i) Test hypotézy o regresním koeficientu.
j) Koeficient vícenásobné korelace, index determinace a jeho interpretace.
k) Explicitní vzorce pro regresní přímku a jejich souvislost se vztahy pro obecný lineární model.

9.3 Kontrolní otázky

1. Co se rozumí regresní analýzou, jak je definována regresní funkce a regresní koeficienty?
2. Jaký je statistický princip regresní analýzy?
3. Na jakých předpokladech je založen lineární regresní model?
4. Jaké odhady a testy statistických hypotéz používáme v regresní analýze?
5. Jaký je rozdíl mezi odhady střední a individuální funkční hodnoty regresní funkce?
6. Jak posuzujeme vhodnost vypočtené regresní funkce?
7. Uveďte konkrétní příklady lineární a nelineární regresní funkce.

9.4 Typické úlohy

Zadání (regresní přímka):
Pro dvourozměrný statistický soubor, zadaný tabulkou dvojic měření veličin x a y, vyšetřete regresní model $y = \beta_1 + \beta_2 x$ v následujících krocích:

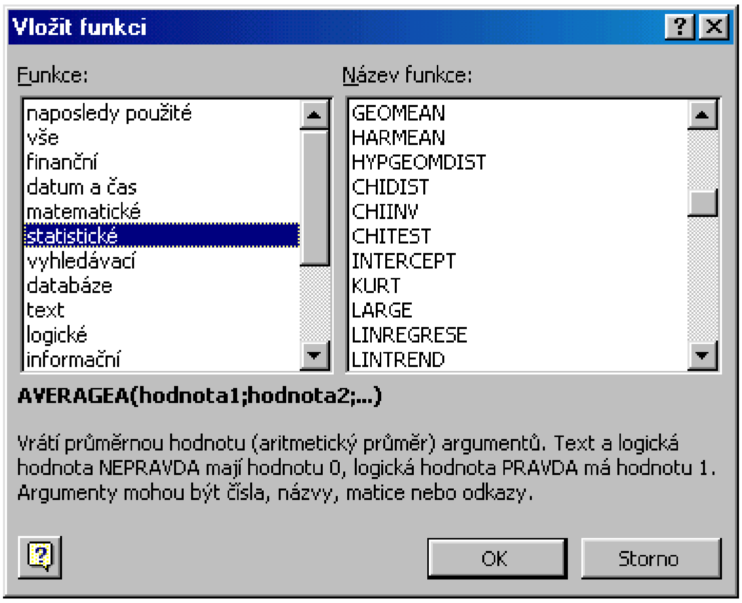
a) spočítejte bodové odhady b_1 a b_2 neznámých parametrů β_1 a β_2;
b) načrtněte graf zahrnující měření a proloženou regresní přímku, spočítejte bodový odhad rozptylu σ^2;
c) pro zadanou spolehlivost $1-\alpha$ určete intervalové odhady regresních koeficientů β_1 a β_2;
d) pro zadanou hladinu významnosti α testujte statistickou významnost regresních koeficientů β_1 a β_2;
e) pro zadanou spolehlivost $1-\alpha$ a hodnotu proměnné x určete intervalové odhady střední funkční hodnoty a individuální funkční hodnoty;
f) vypočtěte koeficient korelace a s využitím grafu regresní přímky posuďte její vhodnost.

10. STATISTIKA V MS EXCELU

MS Excel je nyní nejpoužívanější tabulkový procesor. Ačkoliv se nejedná specializovaný statistický software, jako např. ADSTAT, STATGRAPHICS, STATISTICA, S–PLUS, QC–EXPERT nebo MINITAB, obsahuje přibližně 80 statistických funkcí a 19 statistických procedur. Tyto procedury jsou v MS Excelu 97 souhrnně nazývány ***Analytické nástroje***.

10.1 Statistické funkce

Statistické funkce slouží ke statistickým analýzám oblastí dat. Základní seznam funkcí získáme pomocí ikony f_x, která se nachází ve standardním panelu nástrojů nebo v roletkovém menu, příkazem ***Vložit/funkce…***. Aktivací tohoto příkazu se objeví dialogové okno ***Vložit funkci***, v jeho levé části v položce ***Funkce:*** pak zvolíme ***statistické*** (obr. 10.1). V pravé části dialogového okna se objeví seznam statistických funkcí. V dolní části dialogového okna se zobrazí stručný popis aktivní funkce, chceme-li podrobnější popis klávesou F1, vyvoláme nápovědu.



Obr. 10.1 Vkládání statistických funkcí

Poznámka 1: Upozorňujeme, že na rozdíl od kapitoly 3 a učebního textu MIV–SP je v Excelu definována distribuční funkce náhodné veličiny X ve tvaru $F(x) = P(X \le x)$.

Poznámka 2: Excel umožňuje používat maticové vzorce, které po provedení několika výpočtů a vrátí jeden nebo několik výsledků. Maticové vzorce počítají na základě dvou nebo více množin hodnot, tzv. maticových argumentů. Každý maticový argument musí obsahovat stejný počet řádků a sloupců. Maticové vzorce vytvoříme stejně jako základní vzorce s jednou hodnotou. Vybereme buňku nebo buňky, které budou obsahovat vzorec, vytvoříme vzorec a potom stisknutím kláves CTRL+SHIFT+ENTER vzorec zadáme.

Poznámka 3: Některé statistické pojmy jsou v Excelu použity nešetrně až chybně, proto je vhodné před použitím zjistit, jaké výstupy nám funkce nebo procedura vrátí. Např. funkce TDIST nevrací hodnotu distribuční funkce Studentova t-rozdělení, ale hodnotu $1 - F(x)$ případně $(1 - F(x))\cdot 2$, procedura ***Histogram*** zobrazuje sloupcový graf i polygon a místo pojmu součtová hustota by měl být použit pojem distribuční funkce.

2.2 Seznam statistických funkcí

AVERAGEA(data)	aritmetický průměr hodnot v seznamu argumentů (do výpočtu je zahrnut i text a logické hodnoty PRAVDA a NEPRAVDA)
BETADIST(x;α;β;a;b)	hodnota distribuční funkce beta rozdělení $F(x)$, kde $X \sim$ Beta (α, β, a, b)
BETAINV(p;α;β;a;b)	P-kvantil beta rozdělení $x_P = F^{-1}(P)$, kde $X \sim$ Beta(α, β, a, b)
BINOMDIST(x;n;p;PRAVDA)	hodnota distribuční funkce binomického rozdělení $F(x)$, kde $X \sim$ Bi(n, p)
BINOMDIST(x;n;p; NEPRAVDA)	hodnota pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení $p(x)$, kde $X \sim$ Bi(n, p)
CONFIDENCE(α;σ;n)	polovina délky intervalového odhadu μ při známém σ^2 se spolehlivostí 1-α, kde $X \sim$ N(μ, σ^2)
CORREL(pole1;pole2)	korelační koeficient dvou proměnných
COVAR(pole1;pole2)	kovariance dvou proměnných
CRITBINOM(n;p;α)	(1-α)-kvantil binomického rozdělení Bi(n, p)
ČETNOSTI(cisla;hodnoty)	absolutní četnosti, hranice tříd určují prvky pole hodnoty
DEVSQ(cisla)	součet čtverců odchylek hodnot od jejich aritmetického průměru $R = s^2 n$
EXPONDIST(x;λ;PRAVDA)	hodnota distribuční funkce exponenciálního rozdělení F(x), kde $X \sim$ Exp(λ)
EXPONDIST(x;λ; NEPRAVDA)	hodnota hustoty pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení $f(x)$, kde $X \sim$ Exp(λ)
FDIST(x;k_1;k_2)	hodnota distribuční funkce F-rozdělení $F(x)$, kde $X \sim$ F(k_1, k_2)
FINV(p;k_1;k_2)	P-kvantil F-rozdělení $x_P = F^{-1}(P)$, kde $X \sim$ F(k_1, k_2)
FISHER(x)	hodnota Fisherovy transformace v hodnotě x
FISHERINV(x)	hodnota inverzní funkce k Fisherově transformaci v hodnotě x
FORECAST (x;pole_y;pole_x)	odhad hodnoty y v bodě x pomocí regresní přímky
FTEST(pole1;pole2)	P-hodnota pro dvouvýběrový F-test
GAMMADIST(x;α;β; PRAVDA)	hodnota distribuční funkce gama rozdělení $F(x)$, kde $X \sim$ Gama(α, β)
GAMMADIST(x;α;β; NEPRAVDA)	hodnota hustoty pravděpodobnosti gama rozdělení $f(x)$, kde $X \sim$ Gama(α, β)
GAMMAINV(p;α;β)	P-kvantil gama rozdělení Gama(α, β)
GAMMALN(x)	přirozený logaritmus gama funkce
GEOMEAN(cisla)	geometrický průměr

HARMEAN(cisla)	harmonický průměr
HYPGEOMDIST(x;n;M;N)	hodnota distribuční funkce hypergeometrického rozdělení $F(x)$, kde $X \sim \mathrm{H}(N;\ M;\ n)$
CHIDIST(x;k)	hodnota $P(X>\mathrm{x})$, kde $X \sim \chi^2(k)$
CHIINV(p;k)	$(1-p)$-kvantil chí-kvadrát rozdělení $\chi^2(k)$
CHITEST(aktuální;očekávané)	P-hodnota pro test nezávislosti
INTERCEPT (pole_y;pole_x)	FORECAST (0; pole_y; pole_x)
KURT(cisla)	koeficient špičatosti
LARGE(pole;k)	k-tá největší hodnota ze zadané množiny dat
LINREGRESE (pole_y;pole_x;b;stat)	odhady regresních koeficientů a další číselné charakteristiky obecné lineární regresní funkce (viz Nápověda)
LINTREND(pole_y;pole_x; nová_x;b)	odhad hodnot y_i v bodech nová_x pomocí regresní přímky
LOGINV(p;μ;σ)	P-kvantil logaritmicko-normálního rozdělení $x_P = F^{-1}(P)$, kde $X \sim \mathrm{LogNorm}(\mu,\ \sigma^2)$
LOGLINREGRESE(pole_y; pole_x;b;stat)	parametry exponenciálního trendu (viz Nápověda)
LOGLINTREND(pole_y; pole_x,nová_x;b)	odhady exponenciálního trendu (viz Nápověda)
LOGNORMDIST(x;μ;σ)	hodnota distribuční funkce logaritmicko-normálního rozdělení $F(x)$, kde $X \sim \mathrm{LogNorm}(\mu,\ \sigma^2)$
MAX(cisla)	maximální hodnota
MAXA(data)	maximální hodnota (text a logické hodnoty PRAVDA a NEPRAVDA jsou srovnávány stejně jako čísla)
MEDIAN(cisla)	medián
MIN(cisla)	minimální hodnota
MINA(data)	minimální hodnota (text a logické hodnoty PRAVDA a NEPRAVDA jsou srovnávány stejně jako čísla)
MODE(cisla)	modus
NEGBINOMDIST(x;s;p)	hodnota distribuční funkce negativně binomického rozdělení $F(x)$, kde $X \sim \mathrm{NegBi}(s,\ p)$
NORMDIST(x;μ;σ;PRAVDA)	hodnota distribuční funkce normálního rozdělení $F(x)$, kde $X \sim \mathrm{N}(\mu;\ \sigma^2)$
NORMDIST(x;μ;σ; NEPRAVDA)	hodnota hustoty pravděpodobnosti normálního rozdělení $f(\mathrm{x})$, kde $X \sim \mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$
NORMINV(p;μ;σ)	P-kvantil normálního rozdělení $x_P = F^{-1}(P)$, kde $X \sim \mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$
NORMSDIST(z)	hodnota distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $F(x)$, kde $X \sim \mathrm{N}(0;\ 1)$

NORMSINV(p)	P-kvantil normovaného normálního rozdělení $x_P = F^{-1}(P)$, kde $X \sim \mathrm{N}(0; 1)$
PEARSON(pole1;pole2)	Pearsonův korelační koeficient dvou proměnných
PERCENTIL(pole;k)	hodnota, která odpovídá k-tému percentilu v poli hodnot
PERCENTRANK(pole;x; desetiny)	percentuální pořadí čísla x v poli hodnot
PERMUTACE(n;k)	počet variací k-té třídy z n prvků (bez opakování)
POČET(data)	počet buněk, které obsahují čísla, a počet čísel v seznamu argumentů
POČET2(data)	počet neprázdných buněk a počet hodnot v seznamu argumentů
POISSON(x;λ;PRAVDA)	hodnota distribuční funkce Poissonova rozdělení ($F(x)$, kde $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$)
POISSON(x;λ;NEPRAVDA)	hodnota pravděpodobnostní funkce Poissonova rozdělení $p(x)$, kde $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$
PROB(pole_x;pole_pst;a;b)	$\mathrm{P}(a \le X \le b)$, kde X je diskrétní náhodná veličina
PRŮMĚR(cisla)	aritmetický průměr
PRŮMODCHYLKA(cisla)	průměrná absolutní odchylka pozorování od jejich aritmetického průměru
QUARTIL(pole;kvartil)	hodnota kvartilu zadaného pole (včetně minima, mediánu a maxima)
RANK(x;pole)	pořadí argumentu (podle velikosti) v číselném poli
RKQ(pole_y;pole_x)	druhá mocnina Pearsonova korelačního koeficientu
SKEW(cisla)	koeficient šikmosti
SLOPE(pole_y;pole_x)	směrnice regresní přímky proložené zadanými body
SMALL(pole;k)	k-tá nejmenší hodnota v číselném poli
SMODCH(cisla)	směrodatná odchylka $s(x)$
SMODCH.VÝBĚR(cisla)	směrodatná odchylka $\hat{s}(x)$
STANDARDIZE(x_p;μ;σ)	převede kvantil x_P normálního rozdělení $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ na kvantil u_P normovaného normálního rozdělení N(0, 1)
STDEVA(cisla)	směrodatná odchylka $\hat{s}(x)$, do výpočtu je zahrnut i text a logické hodnoty PRAVDA a NEPRAVDA
STDEVPA(cisla)	směrodatná odchylka $s(x)$, do výpočtu je zahrnut i text a logické hodnoty PRAVDA a NEPRAVDA
STEYX (pole_y;pole_x)	standardní chyba při výpočtu lineární regrese
TDIST(x;k;strany)	hodnota $P(X > x)$*strany , kde $X \sim \mathrm{S}(k)$ a strany = 1 anebo 2

TINV(p;k)	$(1-p/2)$-kvantil studentova rozdělení S(k), tedy funkce inverzní k funkci TDIST(x;k;2)
TRIMMEAN(pole;procenta)	aritmetický průměr z ořezaného statistického souboru
TTEST (pole1;pole2;s;typ)	P-hodnoty pro různé tipy t-testu
VAR(cisla)	rozptyl $s^2(x)$
VAR.VÝBĚR(cisla)	rozptyl $\hat{s}^2(x)$
VARA(cisla)	rozptyl $s^2(x)$; do výpočtu je zahrnut i text a logické hodnoty PRAVDA a NEPRAVDA
VARPA(cisla)	rozptyl $\hat{s}^2(x)$; do výpočtu je zahrnut i text a logické hodnoty PRAVDA a NEPRAVDA
WEIBULL (x;α;β;typ)	hodnota distribuční funkce Weibullova rozdělení
ZTEST (pole;x;σ)	P-hodnota dvouvýběrového z-testu

Rovněž v kategorii matematických funkcí je celá řada dalších, pro statistiku užitečných, funkcí, jejichž společným znakem je to, že něco sčítají. Jedná se např. o funkce SUMA, SUMIF, SUBTOTAL, SUMX2MY2 atd. Jejich spuštění je obdobné jako u statistických funkcí. Dále ve standardním panelu nástrojů je ještě jedna hodně používaná funkce, kterou nenalezneme v seznamu funkcí. Jedná se o funkci AutoSum, kterou vyvoláme kliknutím na ikonu Σ. Tato funkce sečítá nasvícenou (vybranou) oblast čísel.

V Excelu je ještě jedna možnost, jak rychle získat základní informace o nasvícené oblasti. Ve spodní části okna je tlačítko, které je možno nastavit na průměr, počet hodnot, počet čísel, minimum, maximum, součet. To znamená, že uživatel může pouhým nasvícením určité oblasti rychle zjistit právě uvedené funkce.

10.3 Statistické procedury

V aplikaci Microsoft Excel tedy existuje sada nástrojů pro analýzu dat nazvaná ***Analytické nástroje***, která umožňuje efektivněji provádět základní statistické a inženýrské analýzy. Při použití těchto nástrojů zadáváme data, která chceme analyzovat, a příslušné parametry. Daný nástroj pak použije makro odpovídající statistické funkce a následně zobrazí výsledky ve výstupní tabulce. Některé nástroje vytvářejí kromě výstupních tabulek také grafy.

Seznam dostupných analytických nástrojů zobrazíte klepnutím na příkaz ***Analýza dat*** v nabídce ***Nástroje***. Pokud příkaz ***Analýza dat*** v nabídce ***Nástroje*** chybí, je třeba pomocí instalačního programu nainstalovat doplněk ***Analytické nástroje***. Jakmile doplněk ***Analytické nástroje*** nainstalujete, musíte ho vybrat ve správci doplňků (***Nástroje/Doplňky…***).

Příkazem ***Nástroje/Analýza dat*** vyvoláme vstupní panel, ve kterém můžeme zvolit následující ***Analytické nástroje***:

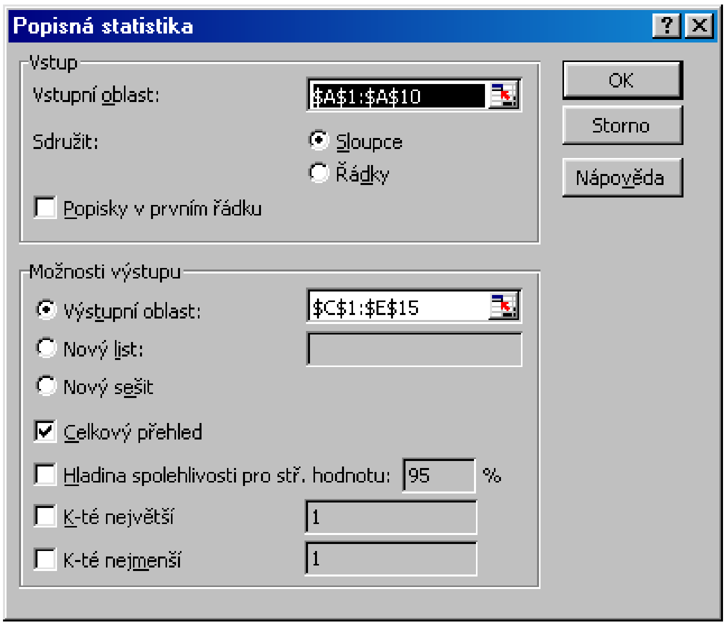
- ***ANOVA: jeden faktor***
- ***ANOVA: dva faktory s opakováním***
- ***ANOVA: dva faktory bez opakování***
- ***Korelace***
- ***Kovariance***
- ***Popisná statistika***
- ***Exponenciální vyrovnání***
- ***Dvouvýběrový F-test pro rozptyl***
- ***Fourierova analýza***
- ***Histogram***
- ***Klouzavý průměr***
- ***Generátor pseudonáhodných čísel***

- ***Pořadová statistika a percentily***
- ***Regrese***
- ***Vzorkování***
- ***Dvouvýběrový párový t-test***
- ***Dvouvýběrový t-test s rovností rozptylů***
- ***Dvouvýběrový t-test s nerovností rozptylů***
- ***Dvouvýběrový z-test***

Podrobnější popis vybraných procedur bude součástí následujících příkladů, řešených pomocí Excelu 97.

10.4 Řešené příklady

Řešený příklad 10.1 (viz řešený příklad 1.1 na str. 8)
Nástroje/Analýza dat/Popisná statistika
Zaškrtnutím okénka ***Celkový přehled*** ve vstupním panelu (obr. 10.2) získáme číselné charakteristiky statistického souboru (tab. 10.1).



Obr. 10.2 Vstupní panel procedury ***Popisná statistika***

Řešený příklad 1.1	
Střední hodnota	5,37
Chyba střední hodnoty	0,014529663
Medián	5,37
Modus	#N/A
Směrodatná odchylka $\hat{s}(x)$	0,045946829
Rozptyl výběru $\hat{s}^2(x)$	0,002111111
Špičatost	-0,873110408
Šikmost	-0,343646645
Rozpětí	0,14

Minimum	5,29
Maximum	5,43
Součet	53,7
Rozsah souboru	10

Tab. 10.1 Výstup procedury ***Popisná statistika***

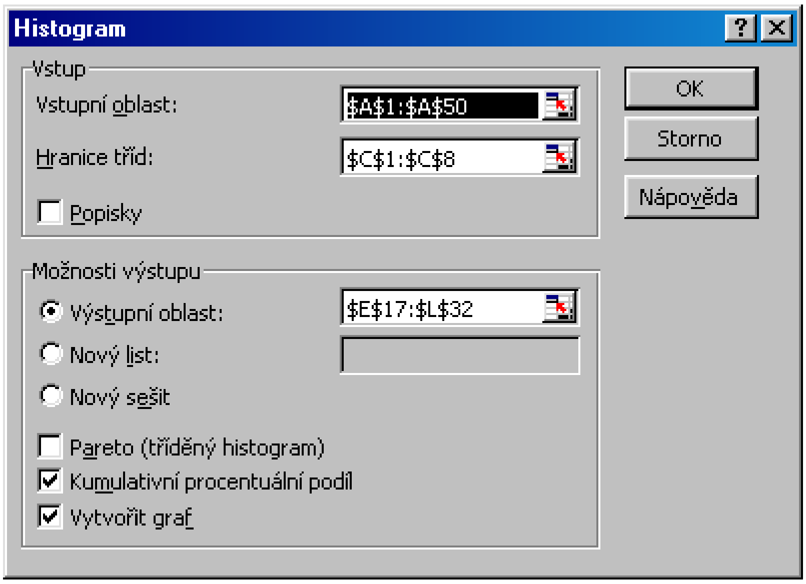
$$s^2(x) = \frac{\hat{s}^2(x)(n-1)}{n} = 0{,}0019,\ s(x) = \sqrt{s^2(x)} = 0{,}044\,.$$

Řešený příklad 10.2 (viz řešený příklad 1.2 na str. 9)

Nástroje/Analýza dat/Histogram

Program vypočte absolutní četnosti a relativní kumulativní četnosti dat a vytvoří četnostní tabulku (tab. 10.3). Pokud chceme dodržet třídění, které jsme zvolili při předchozím výpočtu, je třeba zadat hranice tříd (obr. 10.3). Hranice tříd jsou zadány ve formě sloupcového vektoru (tab. 10.2). Intervaly reprezentující třídy jsou zleva otevřené a zprava uzavřené.

Zaškrtnutím okénka ***Vytvořit graf*** získáme sloupcový graf absolutních četností a polygon relativních kumulativních četností, které jsou mylně nazývány histogramy (obr. 10.4). Tyto grafy lze v ***Editoru grafů*** převést na histogramy (obr. 10.5) tak, že oběma grafům přiradíme typ sloupcový graf, v možnostech zadáme šířku mezery 0 a změníme popis x-ové osy.



Hranice tříd
-2,5
-1,5
-0,5
0,5
1,5
2,5
3,5
4,5

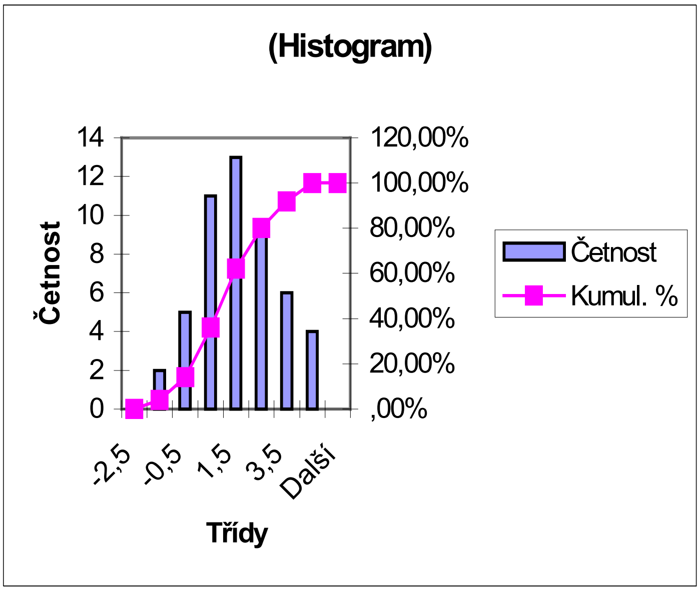
Tab. 10.2

Obr. 10.3 Vstupní panel procedury ***Histogram***

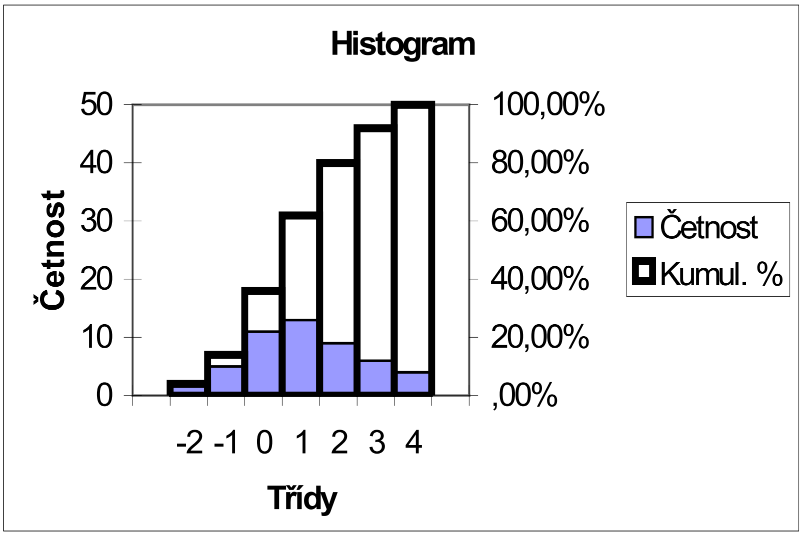
V Excelu nelze standardně vypočítat číselné charakteristiky roztříděného statistického souboru, soubor lze zpracovat pouze neroztříděný nebo je třeba naprogramovat vlastní makro.

Třídy	*Četnost*	*Kumul. %*
-2,5	0	,00%
-1,5	2	4,00%
-0,5	5	14,00%
0,5	11	36,00%
1,5	13	62,00%
2,5	9	80,00%
3,5	6	92,00%
4,5	4	100,00%
Další	0	100,00%

Tab. 10.3



Obr. 10.4



Obr. 10.5

Řešený příklad 10.3 (viz řešený příklad 1.3 na str. 10)

Nástroje/Analýza dat/Popisná statistika

Sloupec1		*Sloupec2*	
Střední hodnota	30,248	Střední hodnota	50,296

Nástroje/Analýza dat/Kovariance

$\hat{c}(x,y)$	*Sloupec 1*	*Sloupec 2*
Sloupec 1	0,002328889	
Sloupec 2	0,002546667	0,004093333

$cov(x,y) = \frac{n-1}{n}\hat{c}(x,y)$	*Sloupec 1*	*Sloupec 2*
Sloupec 1	0,002096	
Sloupec 2	0,002292	0,003684

Nástroje/Analýza dat/Korelace

$r(x, y)$	*Sloupec 1*	*Sloupec 2*
Sloupec 1	1	
Sloupec 2	0,824819963	1

Řešený příklad 10.4 (viz řešený příklad 7.1 na str. 48)
Z intervalových odhadů parametrů normálního rozdělení počítá Excel přímo pouze intervalový odhad střední hodnoty při známém rozptylu (CONFIDENCE(α;σ;n)). Další intervalové odhady je třeba zadat ve formě vzorců a Excel použít pouze jako statistickou kalkulačku:

$\mu \in \langle$5,37 – TINV(0,05;9) * ODMOCNINA(0,0019) / ODMOCNINA(9);

5,37 + TINV(0,05;9) * ODMOCNINA(0,0019) / ODMOCNINA(9)$\rangle$ = $\langle$5,337; 5,403$\rangle$

$\sigma^2 \in \langle$10 * 0,0019 / CHIINV(0,025;9); 10 * 0,0019 / CHIINV(0,975;9)$\rangle$ =$\langle$0,00100; 0,00704$\rangle$

$\sigma \in \langle$ODMOCNINA(0,00100); ODMOCNINA(0,00704)$\rangle$ = $\langle$0,316; 0,0839$\rangle$

Řešený příklad 10.5 (viz řešené příklady 8.1 a 8.2 na str. 55)
Studentův a Pearsonův test pro jeden výběr je taktéž třeba zadat ve formě vzorců a obor nezamítnutí vypočítáme pomocí funkcí TINV a CHIINV.

H: $\boldsymbol{\mu = \mu_0}$ ***při neznámém*** $\boldsymbol{\sigma^2}$***:*** $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n-1}$; $\bar{W}_\alpha = \langle -t_{1-\alpha/2}(k),\ t_{1-\alpha/2}(k)\rangle$, kde $k = n-1$:

t = (5,37 – 5,4) / ODMOCNINA(0,0019) * 3 = -2,06474

$\bar{W}_{0,05}$ =$\langle$- TINV(0,05;9); TINV(0,05;9)$\rangle$ = $\langle$-2,262159; 2,262159$\rangle$

$t \in \bar{W}_{0,05} \Rightarrow$ hypotézu H nezamítáme na hladině významnosti 0,05

H**:** $\boldsymbol{\sigma^2 = \sigma^2_0}$, $t = \frac{ns^2}{\sigma_0^2}$; $\bar{W}_\alpha = \left\langle \chi^2_{\alpha/2}(k),\ \chi^2_{1-\alpha/2}(k)\right\rangle$, kde $k = n-1$:

t = (10*0,0019)/0,0025 = 7,6

$\bar{W}_{0,05}$ = $\langle$CHIINV(0,975;9); CHIINV(0,025;9)$\rangle$ = $\langle$2,70039; 19,02278$\rangle$

$t \in \bar{W}_{0,05} \Rightarrow$ hypotézu H nezamítáme na hladině významnosti 0,05

Poznámka 4: Dvouvýběrové testy hypotéz o parametrech normálního rozdělení jsou součástí analytických nástrojů Excelu. Vstupy těchto procedur jsou bohužel pouze pole reprezentující statistické soubory a ne i jejich číselné charakteristiky. Proto je nutné testy, ve kterých jsou zadané pouze tyto číselné charakteristiky, počítat ve formě vzorců, stejně jako v předchozích příkladech. Příklad, který je vhodný řešit v ***analytických nástrojích***, následuje.

Příklad 10.6
Testujte na hladině významnosti 0,05, zda seřízení dávkovacího stroje ovlivnilo odchylku od hodnot na etiketě,víme-li, že po naměření prvních 30-ti hodnot bylo provedeno nové seřízení stroje a pak bylo naměřeno zbývajících 20 hodnot (data jsou převzata z řešeného příkladu 1.2). Předpokládejme, že oba dílčí statistické soubory byly získány náhodným výběrem ze dvou normálních rozdělení.

Nástroje/Analýza dat/Dvouvýběrový F-test pro rozptyl

Dvouvýběrový F-test pro rozptyl (jednostranný)			
	Soubor 1	*Soubor 2*	
Střední hodnota	0,966666667	1,395	... odhad střední hodnoty μ
Rozptyl	2,722298851	2,149973684	... odhad rozptylu σ^2
Pozorování	30	20	... počet pozorování n
Rozdíl	29	19	... počet stupňů volnosti k
F	1,26620101		... hodnota testového kriteria
P(F<=f) (1)	0,299725339		... P-hodnota pro jednostranný F-test
F krit (1)	2,077214845		... kvantil $F_{0,95}(29, 19)$

Protože je P-hodnota ≥ 0,05, hypotézu $H{:}\,\sigma^2(X) = \sigma^2(Y)$ nezamítáme na hladině významnosti 0,05 oproti jednostranné alternativní hypotéze $\overline{H} : \sigma^2(X) > \sigma^2(Y)$. Tedy pro testování rovnosti středních hodnot můžeme použít dvouvýběrový t-test s rovností rozptylů.

Nástroje/Analýza dat/Dvouvýběrový t-test s rovností rozptylů

Dvouvýběrový t-test s rovností rozptylů			
	Soubor 1	*Soubor 2*	
Stř. hodnota	0,966666667	1,395	... odhad střední hodnoty μ
Rozptyl	2,722298851	2,149973684	... odhad rozptylu σ^2
Pozorování	30	20	... počet pozorování n
Společný rozptyl	2,495753472		... odhad společného rozptylu
Hyp. rozdíl stř. hodnot	0		
Rozdíl	48		... počet stupňů volnosti k
t stat	-0,939229347		... hodnota testového kriteria
P(T<=t) (1)	0,176157759		... P-hodnota pro jednostranný t-test
t krit (1)	1,677224191		... kvantil $t_{0,95}(48)$
P(T<=t) (2)	0,352315518		... P-hodnota pro oboustranný t-test
t krit (2)	2,01063358		... kvantil $t_{0,975}(48)$

Protože P-hodnoty jsou 0,176157759; 0,352315518 ≥ 0,05, hypotézu $H{:}\ \mu(X) = \mu(Y)$ nezamítáme na hladině významnosti 0,05, jak oproti oboustranné alternativní hypotéze $\overline{H} : \mu(X) \neq \mu(Y)$, tak oproti jednostranné alternativní hypotéze $\overline{H} : \mu(X) < \mu(Y)$.

Příklad 10.7 (viz příklad 8.9 na str. 60)

x_j^*	1	2	3	4	5	6	$\sum$
f_j	13	17	22	13	13	42	120
$\tilde{f}_j$	20	20	20	20	20	20	120
$\frac{\left(f_j - \tilde{f}_j\right)^2}{\tilde{f}_j}$	2,45	0,45	0,2	2,45	2,45	24,2	32,2

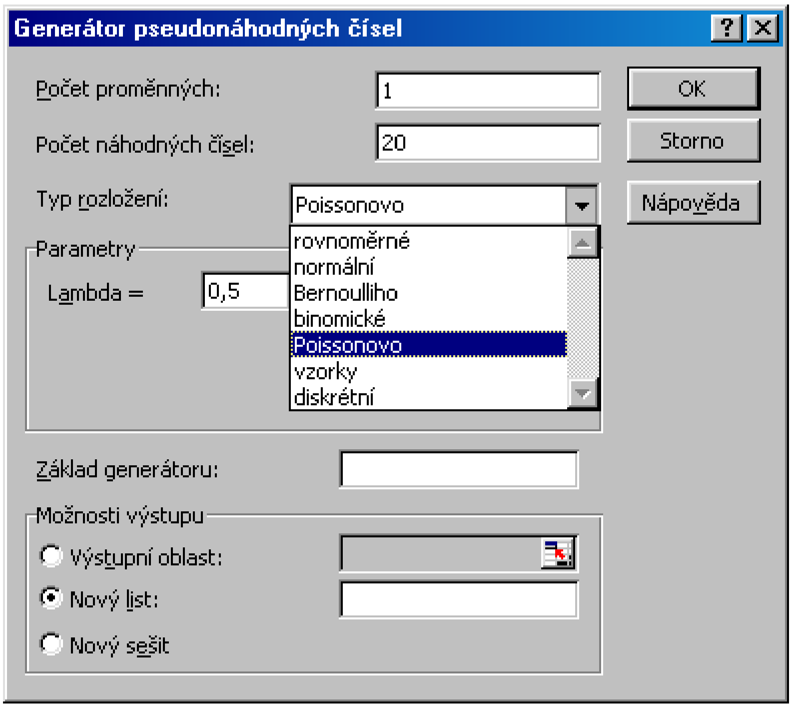
$t = 32{,}2$; $k = 6 - 0 - 1 = 5$; $\chi^2_{0{,}99}(5) = \mathrm{CHIINV}(0{,}01;5) = 15{,}08632$

$\overline{W}_{0{,}01} = \langle 0;\ 15{,}08632 \rangle$

$t \notin \overline{W}_{0{,}01} \Rightarrow$ hypotézu H: p(x) = 1/6 zamítáme na hladině významnosti 0,01

Nástroje/Analýza dat/ Generátor pseudonáhodných čísel

Při simulaci náhodných procesů v praxi se často setkáváme s problémem jak získat vektor $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, který je realizací náhodného výběru $\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ z náhodné veličiny X (viz kap. 6). Za tímto účelem je Excel vybaven ***generátorem pseudonáhodných čísel***. V horní části vstupního panelu (obr. 10.6) zadáme počet realizací, rozsah náhodného výběru a typ rozdělení pravděpodobnosti. V prostřední části zadáme parametry zvoleného rozdělení pravděpodobnosti a startovací hodnotu (základ generátoru), která je nepovinná.



Obr. 10.6 Vstupní panel procedury ***Generátor pseudonáhodných čísel***

DODATEK - Základní pojmy z kombinatoriky

V dalším předpokládáme, že n a k jsou celá nezáporná čísla.

Číslo ***n*-faktoriál** značíme symbolem $n!$ a klademe

$$n! = \begin{cases} n(n-1)\cdots 2\cdot 1 & \text{pro } n = 1, 2, \ldots, \\ 1 & \text{pro } n = 0. \end{cases}$$

Kombinační číslo (říkáme také ***n nad k***), kde $n \geq k$, značíme symbolem $\binom{n}{k}$ a klademe

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Variace k-té třídy z n různých prvků (***bez opakování***), kde $n \geq k$, je uspořádaná k–tice různých prvků, vybraných z daných n prvků. Všech těchto variací je

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Permutace n různých prvků je variace n-té třídy z daných n prvků. Všech těchto permutací je $n!$.

Variace k-té třídy z n různých prvků s opakováním, kde $n \geq 1$, je uspořádaná k-tice prvků, kde se každý prvek až k-krát opakuje, vybraných z daných n prvků. Všech těchto variací s opakováním je

$$V_k'^{\,n} = n^k.$$

Kombinace k-té třídy z n různých prvků (***bez opakování***), kde $n \geq k$, je k-tice různých prvků (bez zřetele na jejich uspořádání), vybraných z daných n prvků. Všech těchto kombinací je

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{V_k^n}{k!}.$$

Kombinace k-té třídy z n různých prvků s opakováním, kde $n \geq 1$, je k-tice prvků (bez zřetele na jejich uspořádání), kde se každý prvek až k-krát opakuje, vybraných z daných n prvků. Všech těchto kombinací s opakováním je

$$C_k'^{\,n} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Příklad: Je dána množina $\{a, b, c\}$ různých prvků, takže $n = 3$. Položme $k = 2$.

Všechny variace druhé třídy (bez opakování) z daných prvků jsou uspořádané dvojice

(a, b) (b, a)
(a, c) (c, a)
(b, c) (c, b)

a těchto variací je $V_2^3 = \dfrac{3!}{(3-2)!} = \dfrac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6$.

Všechny permutace daných prvků jsou uspořádané trojice

$$\begin{array}{cc} (a, b, c) & (a, c, b) \\ (b, a, c) & (b, c, a) \\ (c, a, b) & (c, b, a) \end{array}$$

a těchto permutací je 3! = 6.

Všechny variace druhé třídy s opakováním z daných prvků jsou uspořádané dvojice

$$\begin{array}{ccc} (a, b) & (b, a) & (a, a) \\ (a, c) & (c, a) & (b, b) \\ (b, c) & (c, b) & (c, c) \end{array}$$

a těchto variací s opakováním je $V_2'^{\,3} = 3^2 = 9$.

Všechny kombinace druhé třídy (bez opakování) z daných prvků jsou dvojice

$$\begin{array}{c} a, b \\ a, c \\ b, c \end{array}$$

a těchto kombinací je $C_2^3 = \dbinom{3}{2} = \dfrac{3!}{2!(3-2)!} = \dfrac{3 \cdot 2!}{2! \cdot 1} = 3$.

Všechny kombinace druhé třídy s opakováním z daných prvků jsou dvojice

$$\begin{array}{cc} a, b & a, a \\ a, c & b, b \\ b, c & c, c \end{array}$$

a těchto kombinací s opakováním je

$$C_2'^{\,3} = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 1 \cdot 2!} = 6 .$$

STATISTICKÉ TABULKY

T1 Hodnoty distribuční funkce $\Phi(u)$ normovaného normálního rozdělení N(0;1)

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,50000	50399	50798	51197	51596	51994	52392	52791	53188	53586
0,1	53983	54380	54776	55172	55567	55962	56356	56750	57143	57535
0,2	57926	58317	58707	59096	59484	59871	60257	60642	61026	61409
0,3	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0,4	65542	65910	66276	66640	67003	67365	67724	68082	68439	68793
0,5	69146	69498	69847	70195	70540	70884	71226	71566	71904	72241
0,6	72575	72907	73237	73565	73892	74216	74537	74857	75175	75490
0,7	75804	76115	76424	76731	77035	77337	77637	77935	78231	78524
0,8	78815	79103	79389	79673	79955	80234	80511	80785	81057	81327
0,9	81594	81859	82121	82382	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1,0	84135	84375	84614	84850	85083	85314	85543	85769	85993	86214
1,1	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1,2	88493	88686	88877	89065	89251	89435	89617	89796	89973	90147
1,3	90320	90490	90658	90824	90988	91149	91309	91466	91621	91774
1,4	91924	92073	92220	92364	92507	92647	92786	92922	93056	93189
1,5	93319	93448	93574	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1,6	94520	94630	94738	94845	94950	95053	95154	95254	95352	95449
1,7	95543	95637	95728	95819	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1,8	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062
1,9	97128	97193	97257	97320	97381	97441	97500	97558	97615	97670
2,0	97725	97778	97831	97882	97932	97982	98030	98077	98124	98169
2,1	98214	98257	98300	98341	98382	98422	98461	98500	98537	98574
2,2	98610	98645	98679	98713	98745	98778	98809	98840	98870	98899
2,3	98928	98956	98983	99010	99036	99061	99086	99111	99134	99158
2,4	99180	99202	99224	99245	99266	99286	99305	99324	99343	99361
2,5	99379	99396	99413	99430	99446	99461	99477	99492	99506	99520
2,6	99534	99547	99560	99573	99585	99598	99609	99621	99632	99643
2,7	99653	99664	99674	99683	99693	99702	99711	99720	99728	99736
2,8	99744	99752	99760	99767	99774	99781	99788	99795	99801	99807
2,9	99813	99819	99825	99831	99836	99841	99846	99851	99856	99861
3,0	99865	99869	99874	99878	99882	99886	99889	99893	99896	99900
3,1	99903	99906	99910	99913	99916	99918	99921	99924	99926	99929
3,2	99931	99934	99936	99938	99940	99942	99944	99946	99948	99950
3,3	99952	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99962	99964	99965
3,4	99966	99968	99969	99970	99971	99972	99973	99974	99975	99976
3,5	99977	99978	99978	99979	99980	99981	99981	99982	99983	99983
3,6	99984	99985	99985	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989
3,7	99989	99990	99990	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992
3,8	99993	99993	99993	99994	99994	99994	99994	99995	99995	99995
3,9	99995	99995	99996	99996	99996	99996	99996	99996	99997	99997

4,00	99997	4,10	99998	4,20	99999	4,30	99999	4,40	99999	4,50	99999

Poznámka: $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$; $u_{0,95} \approx 1,645$; $u_{0,975} \approx 1,960$; $u_{0,99} \approx 2,326$; $u_{0,995} \approx 2,576$.

T2 Kvantily t_P Studentova rozdělení S(k)

k \ P	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
1	6,314	12,706	31,821	63,656	318,289	636,578
2	2,920	4,303	6,965	9,925	22,328	31,600
3	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,924
4	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	5,894	6,869
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768
24	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,689
28	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,660
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
35	1,690	2,030	2,438	2,724	3,340	3,591
40	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
45	1,679	2,014	2,412	2,690	3,281	3,520
50	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
60	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
70	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435
80	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416
90	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183	3,402
100	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390
120	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
140	1,656	1,977	2,353	2,611	3,149	3,361
160	1,654	1,975	2,350	2,607	3,142	3,352
180	1,653	1,973	2,347	2,603	3,136	3,345
200	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340
300	1,650	1,968	2,339	2,592	3,118	3,323
500	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310
1000	1,646	1,962	2,330	2,581	3,098	3,300
∞	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,290

Poznámka: Pro $0 \le P \le 0{,}5$ použijeme vztah $t_P = -t_{1-P}$.

T3 Kvantily χ^2_P Pearsonova rozdělení $\chi^2(k)$

k \ P	0,005	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99	0,995
1	0,000	0,000	0,001	0,004	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	11,070	12,832	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,647	2,180	2,733	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	36,415	39,364	42,980	45,558
25	10,520	11,524	13,120	14,611	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,878	14,573	16,151	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	41,337	44,461	48,278	50,994
29	13,121	14,256	16,047	17,708	42,557	45,722	49,588	52,335
30	13,787	14,953	16,791	18,493	43,773	46,979	50,892	53,672
31	14,458	15,655	17,539	19,281	44,985	48,232	52,191	55,002
32	15,134	16,362	18,291	20,072	46,194	49,480	53,486	56,328
33	15,815	17,073	19,047	20,867	47,400	50,725	54,775	57,648
34	16,501	17,789	19,806	21,664	48,602	51,966	56,061	58,964
35	17,192	18,509	20,569	22,465	49,802	53,203	57,342	60,275
36	17,887	19,233	21,336	23,269	50,998	54,437	58,619	61,581
37	18,586	19,960	22,106	24,075	52,192	55,668	59,893	62,883
38	19,289	20,691	22,878	24,884	53,384	56,895	61,162	64,181
39	19,996	21,426	23,654	25,695	54,572	58,120	62,428	65,475
40	20,707	22,164	24,433	26,509	55,758	59,342	63,691	66,766
41	21,421	22,906	25,215	27,326	56,942	60,561	64,950	68,053
42	22,138	23,650	25,999	28,144	58,124	61,777	66,206	69,336
43	22,860	24,398	26,785	28,965	59,304	62,990	67,459	70,616
44	23,584	25,148	27,575	29,787	60,481	64,201	68,710	71,892
45	24,311	25,901	28,366	30,612	61,656	65,410	69,957	73,166

T3 Kvantily χ_P^2 Pearsonova rozdělení $\chi^2(k)$ (pokračování)

k \ P	0,005	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99	0,995
46	25,041	26,657	29,160	31,439	62,830	66,616	71,201	74,437
47	25,775	27,416	29,956	32,268	64,001	67,821	72,443	75,704
48	26,511	28,177	30,754	33,098	65,171	69,023	73,683	76,969
49	27,249	28,941	31,555	33,930	66,339	70,222	74,919	78,231
50	27,991	29,707	32,357	34,764	67,505	71,420	76,154	79,490
51	28,735	30,475	33,162	35,600	68,669	72,616	77,386	80,746
52	29,481	31,246	33,968	36,437	69,832	73,810	78,616	82,001
53	30,230	32,019	34,776	37,276	70,993	75,002	79,843	83,253
54	30,981	32,793	35,586	38,116	72,153	76,192	81,069	84,502
55	31,735	33,571	36,398	38,958	73,311	77,380	82,292	85,749
56	32,491	34,350	37,212	39,801	74,468	78,567	83,514	86,994
57	33,248	35,131	38,027	40,646	75,624	79,752	84,733	88,237
58	34,008	35,914	38,844	41,492	76,778	80,936	85,950	89,477
59	34,770	36,698	39,662	42,339	77,930	82,117	87,166	90,715
60	35,534	37,485	40,482	43,188	79,082	83,298	88,379	91,952
61	36,300	38,273	41,303	44,038	80,232	84,476	89,591	93,186
62	37,068	39,063	42,126	44,889	81,381	85,654	90,802	94,419
63	37,838	39,855	42,950	45,741	82,529	86,830	92,010	95,649
64	38,610	40,649	43,776	46,595	83,675	88,004	93,217	96,878
65	39,383	41,444	44,603	47,450	84,821	89,177	94,422	98,105
66	40,158	42,240	45,431	48,305	85,965	90,349	95,626	99,330
67	40,935	43,038	46,261	49,162	87,108	91,519	96,828	100,554
68	41,714	43,838	47,092	50,020	88,250	92,688	98,028	101,776
69	42,493	44,639	47,924	50,879	89,391	93,856	99,227	102,996
70	43,275	45,442	48,758	51,739	90,531	95,023	100,425	104,215
71	44,058	46,246	49,592	52,600	91,670	96,189	101,621	105,432
72	44,843	47,051	50,428	53,462	92,808	97,353	102,816	106,647
73	45,629	47,858	51,265	54,325	93,945	98,516	104,010	107,862
74	46,417	48,666	52,103	55,189	95,081	99,678	105,202	109,074
75	47,206	49,475	52,942	56,054	96,217	100,839	106,393	110,285
80	51,172	53,540	57,153	60,391	101,879	106,629	112,329	116,321
85	55,170	57,634	61,389	64,749	107,522	112,393	118,236	122,324
90	59,196	61,754	65,647	69,126	113,145	118,136	124,116	128,299
95	63,250	65,898	69,925	73,520	118,752	123,858	129,973	134,247
100	67,328	70,065	74,222	77,929	124,342	129,561	135,807	140,170
110	75,550	78,458	82,867	86,792	135,480	140,916	147,414	151,948
120	83,852	86,923	91,573	95,705	146,567	152,211	158,950	163,648
130	92,223	95,451	100,331	104,662	157,610	163,453	170,423	175,278
150	109,142	112,668	117,985	122,692	179,581	185,800	193,207	198,360
200	152,241	156,432	162,728	168,279	233,994	241,058	249,445	255,264
500	422,303	429,387	439,936	449,147	553,127	563,851	576,493	585,206
1000	888,563	898,912	914,257	927,594	1074,68	1089,53	1106,97	1118,95

T4 Kvantily F_P Fisherova – Snedecorova rozdělení $F(k_1,k_2)$ pro $P = 0,975$

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	647,793	799,482	864,151	899,599	921,835	937,114	948,203	956,643	963,279	968,634
2	38,506	39,000	39,166	39,248	39,298	39,331	39,356	39,373	39,387	39,398
3	17,443	16,044	15,439	15,101	14,885	14,735	14,624	14,540	14,473	14,419
4	12,218	10,649	9,979	9,604	9,364	9,197	9,074	8,980	8,905	8,844
5	10,007	8,434	7,764	7,388	7,146	6,978	6,853	6,757	6,681	6,619
6	8,813	7,260	6,599	6,227	5,988	5,820	5,695	5,600	5,523	5,461
7	8,073	6,542	5,890	5,523	5,285	5,119	4,995	4,899	4,823	4,761
8	7,571	6,059	5,416	5,053	4,817	4,652	4,529	4,433	4,357	4,295
9	7,209	5,715	5,078	4,718	4,484	4,320	4,197	4,102	4,026	3,964
10	6,937	5,456	4,826	4,468	4,236	4,072	3,950	3,855	3,779	3,717
11	6,724	5,256	4,630	4,275	4,044	3,881	3,759	3,664	3,588	3,526
12	6,554	5,096	4,474	4,121	3,891	3,728	3,607	3,512	3,436	3,374
13	6,414	4,965	4,347	3,996	3,767	3,604	3,483	3,388	3,312	3,250
14	6,298	4,857	4,242	3,892	3,663	3,501	3,380	3,285	3,209	3,147
15	6,200	4,765	4,153	3,804	3,576	3,415	3,293	3,199	3,123	3,060
16	6,115	4,687	4,077	3,729	3,502	3,341	3,219	3,125	3,049	2,986
17	6,042	4,619	4,011	3,665	3,438	3,277	3,156	3,061	2,985	2,922
18	5,978	4,560	3,954	3,608	3,382	3,221	3,100	3,005	2,929	2,866
19	5,922	4,508	3,903	3,559	3,333	3,172	3,051	2,956	2,880	2,817
20	5,871	4,461	3,859	3,515	3,289	3,128	3,007	2,913	2,837	2,774
21	5,827	4,420	3,819	3,475	3,250	3,090	2,969	2,874	2,798	2,735
22	5,786	4,383	3,783	3,440	3,215	3,055	2,934	2,839	2,763	2,700
23	5,750	4,349	3,750	3,408	3,183	3,023	2,902	2,808	2,731	2,668
24	5,717	4,319	3,721	3,379	3,155	2,995	2,874	2,779	2,703	2,640
25	5,686	4,291	3,694	3,353	3,129	2,969	2,848	2,753	2,677	2,613
26	5,659	4,265	3,670	3,329	3,105	2,945	2,824	2,729	2,653	2,590
27	5,633	4,242	3,647	3,307	3,083	2,923	2,802	2,707	2,631	2,568
28	5,610	4,221	3,626	3,286	3,063	2,903	2,782	2,687	2,611	2,547
29	5,588	4,201	3,607	3,267	3,044	2,884	2,763	2,669	2,592	2,529
30	5,568	4,182	3,589	3,250	3,026	2,867	2,746	2,651	2,575	2,511
35	5,485	4,106	3,517	3,179	2,956	2,796	2,676	2,581	2,504	2,440
40	5,424	4,051	3,463	3,126	2,904	2,744	2,624	2,529	2,452	2,388
45	5,377	4,009	3,422	3,086	2,864	2,705	2,584	2,489	2,412	2,348
50	5,340	3,975	3,390	3,054	2,833	2,674	2,553	2,458	2,381	2,317
55	5,310	3,948	3,364	3,029	2,807	2,648	2,528	2,433	2,355	2,291
60	5,286	3,925	3,343	3,008	2,786	2,627	2,507	2,412	2,334	2,270
70	5,247	3,890	3,309	2,975	2,754	2,595	2,474	2,379	2,302	2,237
80	5,218	3,864	3,284	2,950	2,730	2,571	2,450	2,355	2,277	2,213
90	5,196	3,844	3,265	2,932	2,711	2,552	2,432	2,336	2,259	2,194
100	5,179	3,828	3,250	2,917	2,696	2,537	2,417	2,321	2,244	2,179
120	5,152	3,805	3,227	2,894	2,674	2,515	2,395	2,299	2,222	2,157
150	5,126	3,781	3,204	2,872	2,652	2,494	2,373	2,278	2,200	2,135
250	5,085	3,744	3,169	2,837	2,618	2,459	2,338	2,243	2,165	2,100
500	5,054	3,716	3,142	2,811	2,592	2,434	2,313	2,217	2,139	2,074
∞	5,024	3,689	3,116	2,786	2,566	2,408	2,288	2,192	2,114	2,048

T4 Kvantily F_P Fisherova – Snedecorova rozdělení $F(k_1,k_2)$ pro $P = 0,975$ (pokračování)

k_2 \ k_1	12	15	20	24	30	40	60	100	250	∞
1	976,725	984,874	993,081	997,272	1001,40	1005,60	1009,79	1013,16	1016,22	1018,26
2	39,415	39,431	39,448	39,457	39,465	39,473	39,481	39,488	39,494	39,498
3	14,337	14,253	14,167	14,124	14,081	14,036	13,992	13,956	13,924	13,902
4	8,751	8,657	8,560	8,511	8,461	8,411	8,360	8,319	8,282	8,257
5	6,525	6,428	6,329	6,278	6,227	6,175	6,123	6,080	6,041	6,015
6	5,366	5,269	5,168	5,117	5,065	5,012	4,959	4,915	4,876	4,849
7	4,666	4,568	4,467	4,415	4,362	4,309	4,254	4,210	4,170	4,142
8	4,200	4,101	3,999	3,947	3,894	3,840	3,784	3,739	3,698	3,670
9	3,868	3,769	3,667	3,614	3,560	3,505	3,449	3,403	3,361	3,333
10	3,621	3,522	3,419	3,365	3,311	3,255	3,198	3,152	3,109	3,080
11	3,430	3,330	3,226	3,173	3,118	3,061	3,004	2,956	2,912	2,883
12	3,277	3,177	3,073	3,019	2,963	2,906	2,848	2,800	2,755	2,725
13	3,153	3,053	2,948	2,893	2,837	2,780	2,720	2,671	2,626	2,595
14	3,050	2,949	2,844	2,789	2,732	2,674	2,614	2,565	2,519	2,487
15	2,963	2,862	2,756	2,701	2,644	2,585	2,524	2,474	2,427	2,395
16	2,889	2,788	2,681	2,625	2,568	2,509	2,447	2,396	2,349	2,316
17	2,825	2,723	2,616	2,560	2,502	2,442	2,380	2,329	2,280	2,247
18	2,769	2,667	2,559	2,503	2,445	2,384	2,321	2,269	2,220	2,187
19	2,720	2,617	2,509	2,452	2,394	2,333	2,270	2,217	2,167	2,133
20	2,676	2,573	2,464	2,408	2,349	2,287	2,223	2,170	2,120	2,085
21	2,637	2,534	2,425	2,368	2,308	2,246	2,182	2,128	2,077	2,042
22	2,602	2,498	2,389	2,332	2,272	2,210	2,145	2,090	2,039	2,003
23	2,570	2,466	2,357	2,299	2,239	2,176	2,111	2,056	2,004	1,968
24	2,541	2,437	2,327	2,269	2,209	2,146	2,080	2,024	1,972	1,935
25	2,515	2,411	2,300	2,242	2,182	2,118	2,052	1,996	1,942	1,906
26	2,491	2,387	2,276	2,217	2,157	2,093	2,026	1,969	1,915	1,878
27	2,469	2,364	2,253	2,195	2,133	2,069	2,002	1,945	1,891	1,853
28	2,448	2,344	2,232	2,174	2,112	2,048	1,980	1,922	1,867	1,829
29	2,430	2,325	2,213	2,154	2,092	2,028	1,959	1,901	1,846	1,807
30	2,412	2,307	2,195	2,136	2,074	2,009	1,940	1,882	1,826	1,787
35	2,341	2,235	2,122	2,062	1,999	1,932	1,861	1,801	1,743	1,702
40	2,288	2,182	2,068	2,007	1,943	1,875	1,803	1,741	1,680	1,637
45	2,248	2,141	2,026	1,965	1,900	1,831	1,757	1,694	1,631	1,586
50	2,216	2,109	1,993	1,931	1,866	1,796	1,721	1,656	1,592	1,545
55	2,190	2,083	1,967	1,904	1,838	1,768	1,692	1,625	1,559	1,511
60	2,169	2,061	1,944	1,882	1,815	1,744	1,667	1,599	1,532	1,482
70	2,136	2,028	1,910	1,847	1,779	1,707	1,628	1,558	1,488	1,436
80	2,111	2,003	1,884	1,820	1,752	1,679	1,599	1,527	1,455	1,400
90	2,092	1,983	1,864	1,800	1,731	1,657	1,576	1,503	1,428	1,371
100	2,077	1,968	1,849	1,784	1,715	1,640	1,558	1,483	1,407	1,347
120	2,055	1,945	1,825	1,760	1,690	1,614	1,530	1,454	1,374	1,310
150	2,032	1,922	1,801	1,736	1,665	1,588	1,502	1,423	1,340	1,271
250	1,997	1,886	1,764	1,697	1,625	1,546	1,457	1,374	1,282	1,201
500	1,971	1,859	1,736	1,669	1,596	1,515	1,423	1,336	1,235	1,137
∞	1,945	1,833	1,708	1,640	1,566	1,484	1,388	1,296	1,183	1,000

T4 Kvantily F_P Fisherova – Snedecorova rozdělení $F(k_1,k_2)$ pro $P = 0{,}995$

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	16212,5	19997,4	21614,1	22500,8	23055,8	23439,5	23715,2	23923,8	24091,5	24221,8
2	198,503	199,012	199,158	199,245	199,303	199,332	199,361	199,376	199,390	199,390
3	55,552	49,800	47,468	46,195	45,391	44,838	44,434	44,125	43,881	43,685
4	31,332	26,284	24,260	23,154	22,456	21,975	21,622	21,352	21,138	20,967
5	22,785	18,314	16,530	15,556	14,939	14,513	14,200	13,961	13,772	13,618
6	18,635	14,544	12,917	12,028	11,464	11,073	10,786	10,566	10,391	10,250
7	16,235	12,404	10,883	10,050	9,522	9,155	8,885	8,678	8,514	8,380
8	14,688	11,043	9,597	8,805	8,302	7,952	7,694	7,496	7,339	7,211
9	13,614	10,107	8,717	7,956	7,471	7,134	6,885	6,693	6,541	6,417
10	12,827	9,427	8,081	7,343	6,872	6,545	6,303	6,116	5,968	5,847
11	12,226	8,912	7,600	6,881	6,422	6,102	5,865	5,682	5,537	5,418
12	11,754	8,510	7,226	6,521	6,071	5,757	5,524	5,345	5,202	5,085
13	11,374	8,186	6,926	6,233	5,791	5,482	5,253	5,076	4,935	4,820
14	11,060	7,922	6,680	5,998	5,562	5,257	5,031	4,857	4,717	4,603
15	10,798	7,701	6,476	5,803	5,372	5,071	4,847	4,674	4,536	4,424
16	10,576	7,514	6,303	5,638	5,212	4,913	4,692	4,521	4,384	4,272
17	10,384	7,354	6,156	5,497	5,075	4,779	4,559	4,389	4,254	4,142
18	10,218	7,215	6,028	5,375	4,956	4,663	4,445	4,276	4,141	4,030
19	10,073	7,093	5,916	5,268	4,853	4,561	4,345	4,177	4,043	3,933
20	9,944	6,987	5,818	5,174	4,762	4,472	4,257	4,090	3,956	3,847
21	9,829	6,891	5,730	5,091	4,681	4,393	4,179	4,013	3,880	3,771
22	9,727	6,806	5,652	5,017	4,609	4,322	4,109	3,944	3,812	3,703
23	9,635	6,730	5,582	4,950	4,544	4,259	4,047	3,882	3,750	3,642
24	9,551	6,661	5,519	4,890	4,486	4,202	3,991	3,826	3,695	3,587
25	9,475	6,598	5,462	4,835	4,433	4,150	3,939	3,776	3,645	3,537
26	9,406	6,541	5,409	4,785	4,384	4,103	3,893	3,730	3,599	3,492
27	9,342	6,489	5,361	4,740	4,340	4,059	3,850	3,687	3,557	3,450
28	9,284	6,440	5,317	4,698	4,300	4,020	3,811	3,649	3,519	3,412
29	9,230	6,396	5,276	4,659	4,262	3,983	3,775	3,613	3,483	3,376
30	9,180	6,355	5,239	4,623	4,228	3,949	3,742	3,580	3,451	3,344
35	8,976	6,188	5,086	4,479	4,088	3,812	3,607	3,447	3,318	3,212
40	8,828	6,066	4,976	4,374	3,986	3,713	3,509	3,350	3,222	3,117
45	8,715	5,974	4,892	4,294	3,909	3,638	3,435	3,276	3,149	3,044
50	8,626	5,902	4,826	4,232	3,849	3,579	3,376	3,219	3,092	2,988
55	8,554	5,843	4,773	4,181	3,800	3,531	3,330	3,173	3,046	2,942
60	8,495	5,795	4,729	4,140	3,760	3,492	3,291	3,134	3,008	2,904
70	8,403	5,720	4,661	4,076	3,698	3,431	3,232	3,076	2,950	2,846
80	8,335	5,665	4,611	4,028	3,652	3,387	3,188	3,032	2,907	2,803
90	8,282	5,623	4,573	3,992	3,617	3,352	3,154	2,999	2,873	2,770
100	8,241	5,589	4,542	3,963	3,589	3,325	3,127	2,972	2,847	2,744
120	8,179	5,539	4,497	3,921	3,548	3,285	3,087	2,933	2,808	2,705
150	8,118	5,490	4,453	3,878	3,508	3,245	3,048	2,894	2,770	2,667
250	8,021	5,412	4,382	3,812	3,444	3,183	2,987	2,833	2,709	2,607
500	7,950	5,355	4,330	3,763	3,396	3,137	2,941	2,789	2,665	2,562
∞	7,879	5,298	4,279	3,715	3,350	3,091	2,897	2,744	2,621	2,519

T4 Kvantily F_P Fisherova – Snedecorova rozdělení $F(k_1,k_2)$ pro $P = 0{,}995$ (pokračování)

k_2 \ k_1	12	15	20	24	30	40	60	100	250	∞
1	24426,7	24631,6	24836,5	24937,1	25041,4	25145,7	25253,7	25339,4	25413,9	25466,1
2	199,419	199,434	199,449	199,449	199,478	199,478	199,478	199,478	199,507	199,507
3	43,387	43,085	42,779	42,623	42,466	42,310	42,150	42,022	41,906	41,829
4	20,705	20,438	20,167	20,030	19,892	19,751	19,611	19,497	19,394	19,325
5	13,385	13,146	12,903	12,780	12,656	12,530	12,402	12,300	12,206	12,144
6	10,034	9,814	9,589	9,474	9,358	9,241	9,122	9,026	8,938	8,879
7	8,176	7,968	7,754	7,645	7,534	7,422	7,309	7,217	7,132	7,076
8	7,015	6,814	6,608	6,503	6,396	6,288	6,177	6,087	6,006	5,951
9	6,227	6,032	5,832	5,729	5,625	5,519	5,410	5,322	5,242	5,188
10	5,661	5,471	5,274	5,173	5,071	4,966	4,859	4,772	4,692	4,639
11	5,236	5,049	4,855	4,756	4,654	4,551	4,445	4,359	4,279	4,226
12	4,906	4,721	4,530	4,431	4,331	4,228	4,123	4,037	3,958	3,904
13	4,643	4,460	4,270	4,173	4,073	3,970	3,866	3,780	3,700	3,647
14	4,428	4,247	4,059	3,961	3,862	3,760	3,655	3,569	3,490	3,436
15	4,250	4,070	3,883	3,786	3,687	3,585	3,480	3,394	3,314	3,260
16	4,099	3,920	3,734	3,638	3,539	3,437	3,332	3,246	3,166	3,111
17	3,971	3,793	3,607	3,511	3,412	3,311	3,206	3,119	3,039	2,984
18	3,860	3,683	3,498	3,402	3,303	3,201	3,096	3,009	2,929	2,873
19	3,763	3,587	3,402	3,306	3,208	3,106	3,000	2,913	2,832	2,776
20	3,678	3,502	3,318	3,222	3,123	3,022	2,916	2,828	2,747	2,690
21	3,602	3,427	3,243	3,147	3,049	2,947	2,841	2,753	2,671	2,614
22	3,535	3,360	3,176	3,081	2,982	2,880	2,774	2,685	2,602	2,546
23	3,474	3,300	3,116	3,021	2,922	2,820	2,713	2,624	2,541	2,484
24	3,420	3,246	3,062	2,967	2,868	2,765	2,658	2,569	2,486	2,428
25	3,370	3,196	3,013	2,918	2,819	2,716	2,609	2,519	2,435	2,377
26	3,325	3,151	2,968	2,873	2,774	2,671	2,563	2,473	2,389	2,330
27	3,284	3,110	2,927	2,832	2,733	2,630	2,522	2,431	2,346	2,287
28	3,246	3,073	2,890	2,794	2,695	2,592	2,483	2,392	2,307	2,247
29	3,211	3,038	2,855	2,759	2,660	2,557	2,448	2,357	2,270	2,210
30	3,179	3,006	2,823	2,727	2,628	2,524	2,415	2,323	2,237	2,176
35	3,048	2,876	2,693	2,597	2,497	2,392	2,282	2,188	2,099	2,036
40	2,953	2,781	2,598	2,502	2,401	2,296	2,184	2,088	1,997	1,932
45	2,881	2,709	2,527	2,430	2,329	2,222	2,109	2,012	1,918	1,851
50	2,825	2,653	2,470	2,373	2,272	2,164	2,050	1,951	1,855	1,786
55	2,779	2,608	2,425	2,327	2,226	2,118	2,002	1,902	1,804	1,733
60	2,742	2,570	2,387	2,290	2,187	2,079	1,962	1,861	1,761	1,689
70	2,684	2,513	2,329	2,231	2,128	2,019	1,900	1,797	1,694	1,618
80	2,641	2,470	2,286	2,188	2,084	1,974	1,854	1,748	1,643	1,563
90	2,608	2,437	2,253	2,155	2,051	1,939	1,818	1,711	1,602	1,520
100	2,583	2,411	2,227	2,128	2,024	1,912	1,790	1,681	1,570	1,485
120	2,544	2,373	2,188	2,089	1,984	1,871	1,747	1,636	1,521	1,431
150	2,506	2,335	2,150	2,050	1,944	1,830	1,704	1,590	1,471	1,374
250	2,446	2,275	2,089	1,989	1,882	1,765	1,636	1,516	1,387	1,274
500	2,402	2,230	2,044	1,943	1,835	1,717	1,584	1,460	1,319	1,184
∞	2,358	2,187	2,000	1,898	1,789	1,669	1,533	1,402	1,245	1,000

LITERATURA

Učebnice a monografie

1. Aczel, A. D. *Complete Business Statistics*. Chicago : IRWIN, 1989.
2. Anděl, J. *Matematická statistika*. 1. vyd. Praha : SNTL/ALFA, 1978.
3. Anděl, J. *Statistické metody.* 1. vyd. Praha : MATFYZPRESS, 1993.
4. Bowerman, B. L. - O´Connell, R. T. *Applied Statistics - Improving Business Processes*. Chicago : IRWIN, 1997.
5. Cyhelský, L. - Kahounová, J. - Hindls, R. *Elementární statistická analýza.* 1. vyd. Praha : Management Press, 1996.
6. Dowdy, S. - Wearden, S. *Statistics for Research.* New York : John Wiley & Sons, Inc., 1983.
7. Hahn, G. J. - Shapiro, S. S. *Statistical Models in Engineering*. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1994.
8. Hátle, J. - Likeš, J. *Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky*. 1. vyd. Praha : SNTL/ALFA, 1974.
9. Hebák, P. - Hustopecký, J. *Vícerozměrné statistické metody.* 1. vyd. Praha : SNTL/ALFA, 1987.
10. Hebák, P. - Hustopecký, J. *Průvodce moderními statistickými metodami*. 1. vyd. Praha : SNTL, 1990.
11. Chatterjee, S. - Price, B. *Regression Analysis by Example*. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1991.
12. Kupka, K. *Statistické řízení jakosti*. 1. vyd. Pardubice : TriloByte, 1997.
13. Lamoš, F. - Potocký, R. *Pravdepodobnosť a matematická štatistika*. 1. vyd. Bratislava : ALFA, 1989.
14. Likeš, J. - Machek, J. *Počet pravděpodobnosti*. 1. vyd. Praha : SNTL, 1981.
15. Likeš, J. - Machek, J. *Matematická statistika*. 1. vyd. Praha : SNTL, 1983.
16. Meloun, M. - Militký, J. *Statistické zpracování experimentálních dat*. 1. vyd. Praha : PLUS, 1994.
17. Montgomery, D. C. - Renger, G. *Probability and Statistics*. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1996.
18. Potocký, R. et. al. *Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky.* 1. vyd. Bratislava : ALFA/SNTL, 1986.
19. Rao, C. R. *Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace.* Praha : Academia, 1978.
20. Rényi, A. *Teorie pravděpodobnosti.* 1. vyd. Praha : Academia, 1972.
21. Ryan, T. P.: *Modern Regression Methods*. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1997.
22. Seger, J. - Hindls, R. *Statistické metody v tržním hospodářství*. 1. vyd. Praha : Victoria Publishing, 1995.
23. Swoboda, H. *Moderní statistika*. 1. vyd. Praha : Svoboda, 1977.
24. Štěpán, J. *Teorie pravděpodobnosti*. 1. vyd. Praha : Academia, 1987.
25. Šťastný, Z. *Matematické a statistické výpočty v Excelu.* 1. vyd. Brno : Computer Press, 1999.
26. Sprinthall, R. C. *Basic Statistical Analysis*. 5th ed. Boston : Allyn and Bacon, 1997.
27. Triola, M. F. *Elementary Statistics*. Redwood City : B/C Publishing Comp., 1989.
28. Wonnacot, T. H. - Wonnacot, R. J. *Statistika pro obchod a hospodářství*. 1. vyd. Praha : Victoria Publishing, 1993.
29. Zvára, K. *Regresní analýza*. 1. vyd. Praha : Academia, 1989.
30. Zvára, K. - Štěpán, J. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. 1. vyd. Praha : MATFYZPRESS, 1997.

Učební texty

31. Budíková, M. - Mikoláš, Š. - Osecký, P. *Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika - Sbírka příkladů.* 1. vyd. Brno : MU, 1996.
32. Budíková, M. - Mikoláš, Š. - Osecký, P. *Popisná statistika.* 1. vyd. Brno : MU, 1996.
33. Jarošová, E. *Statistika B - Řešené příklady*. 1. vyd. Praha : VŠE, 1994.
34. Karpíšek, Z. *Pravděpodobnostní metody*. 6. vyd. Brno : FP VUT u vydavatele Ing. Zdeněk Novotný, CSc., 2003.
35. Karpíšek, Z. - Drdla, M. *Statistické metody*. 7. vyd. Brno : FP VUT u vydavatele Ing. Zdeněk Novotný, CSc., 2003.
36. Karpíšek, Z. - Drdla, M. *Applied Statistics*. 1. vyd. Brno : FP VUT v PC - DIR, 1999.
37. Karpíšek, Z. - Drdla, M. *Aplikovaná statistika*. 2. vyd. Brno : BIBS, 2003.
38. Karpíšek, Z. – Popela, P. – Bednář, J. *Statistika a pravděpodobnost. Učební pomůcka - studijní opora pro kombinované studium.* FSI VUT v CERM Brno, Brno 2002.
39. Koutková, H. - Moll, I. *Úvod do pravděpodobnosti a matematické statistiky.* 1. vyd. Brno : ES VUT, 1990.
40. Kropáč, J. *Úvod do počtu pravděpodobnost a matematické statistiky.* 1. vyd. Brno : VA, 2000.
41. Likeš, J. - Cyhelský, L. - Hindls, R. *Úvod do statistiky a pravděpodobnosti - Statistika A*. 1. vyd. Praha : VŠE, 1995.
42. Meloun, M. - Militký, J. *Statistické zpracování experimentálních dat - Sbírka úloh*. 1. vyd. Pardubice : Univerzita Pardubice, 1994.
43. Michálek, J. *Matematická statistika pro informatiky.* 1. vyd. Praha : SPN, 1987.
44. Reif, J. *Metody matematické statistiky*. 1. vyd. Plzeň : Západočeská univerzita, 2000.
45. Seberová, H. *Statistika I, II*. 1. vyd. Vyškov : VVŠ PV, 1995.
46. Šikulová, M. - Karpíšek, Z. *Matematika IV - Pravděpodobnost a matematická statistika.* 6. vyd. Brno : ES VUT, 1996.
47. Zapletal, J. *Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky*. 1. vyd. Brno : ES VUT, 1995.

WWW odkazy

48. http://badame.vse.cz/
49. http://davidmlane.com/hyperstat/
50. http://home.zcu.cz/~friesl/Vyuka/Odkazy.html
51. http://math.uc.edu/~brycw/classes/147/blue/tools.htm#texts
52. http://www.graphpad.com/welcome.htm
53. http://www.math.csusb.edu/faculty/stanton/m262/index.html
54. http://www.md-stat.com/
55. http://www.psychstat.smsu.edu/sbk00.htm
56. http://www.ruf.rice.edu/~lane/rvls.html
57. http://www.stat.sc.edu/rsrch/gasp/
58. http://www.statsoft.com/textbook/stathome.html
59. http://www.statsoft.cz/
60. http://www.trilobyte.cz/