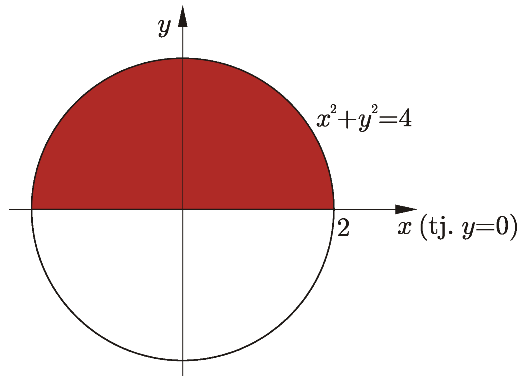
Oblast M je dána nerovnostmi uvedenými pod obrázkem, na kterém je také barevně vyznačena. Zapište dvojnásobný integrál, kterým byste pomocí transformace do polárních souřadnic

$$x = \varrho \cos \varphi,$$
$$y = \varrho \sin \varphi$$

spočítali plošný obsah oblasti M.

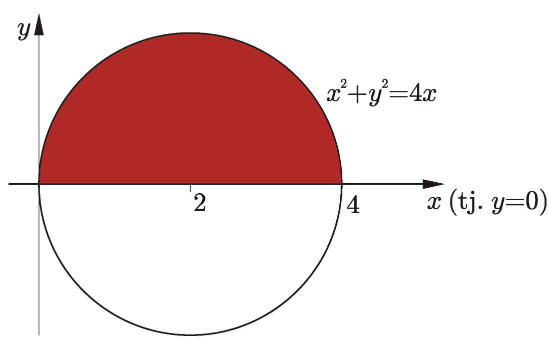
1. Příklad



Obrázek 1: M: $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$

Řešení $S(M) = \iint\limits_M 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\pi} \left(\int\limits_0^2 1 \cdot \varrho \, \mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi.$

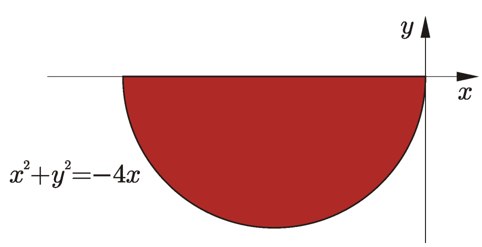
2. Příklad



Obrázek 2: M: $x^2 + y^2 \leq 4x$, $y \geq 0$

Řešení $S(M) = \iint\limits_M 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{4\cos\varphi} 1 \cdot \varrho \, \mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi.$

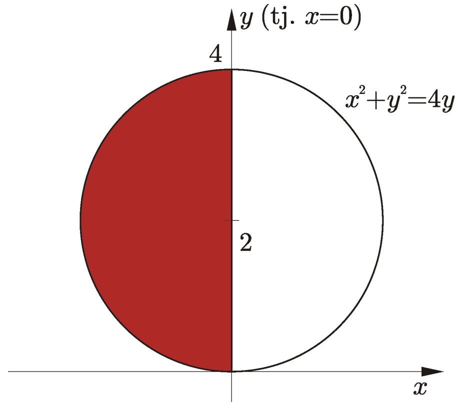
3. Příklad



Obrázek 3: M: $x^2 + y^2 \leq -4x$, $y \leq 0$

Řešení $S(M) = \iint\limits_M 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \left(\int\limits_0^{-4\cos\varphi} 1 \cdot \varrho \, \mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi.$

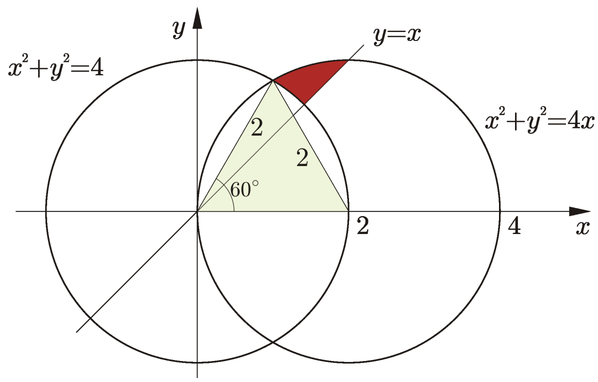
4. Příklad



Obrázek 4: M: $x^2 + y^2 \leq 4y$, $x \leq 0$

Řešení $S(M) = \iint\limits_M 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int\limits_0^{4\sin\varphi} 1 \cdot \varrho \, \mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi.$

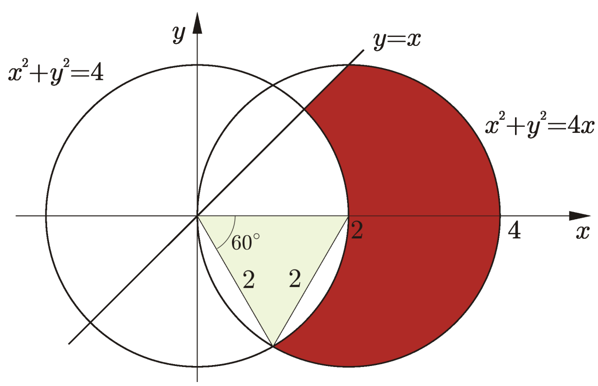
5. Příklad



Obrázek 5: M: $x^2 + y^2 \geq 4$, $x^2 + y^2 \leq 4x$, $y \geq x$

Řešení Na obrázku je zakreslen i rovnostranný trojúhelník, který usnadní určení horní meze pro φ.
$S(M) = \iint\limits_M 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int\limits_2^{4\cos\varphi} 1 \cdot \varrho \, \mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi.$

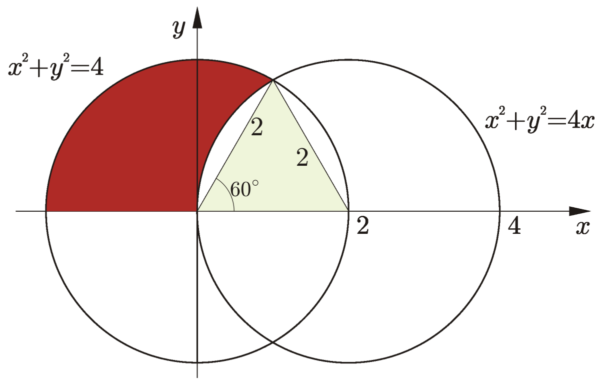
6. Příklad



Obrázek 6: M: $x^2 + y^2 \geq 4$, $x^2 + y^2 \leq 4x$, $y \leq x$

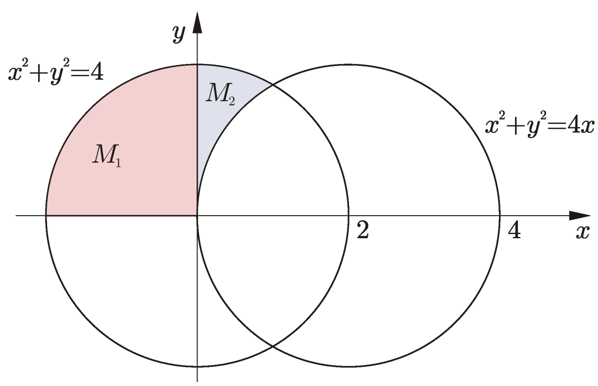
Řešení Na obrázku je zakreslen i rovnostranný trojúhelník, který usnadní určení dolní meze pro φ.
$S(M) = \iint\limits_M 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int\limits_2^{4\cos\varphi} 1 \cdot \varrho \, \mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi.$

7. Příklad



Obrázek 7: M: $x^2 + y^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 \geq 4x$, $y \geq 0$

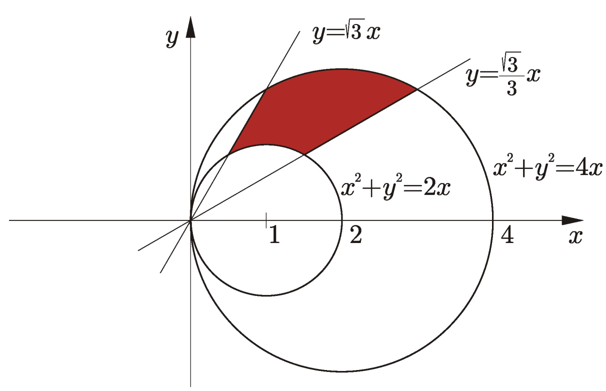
Řešení Oblast musíme rozdělit na dvě části M_1 a M_2 ($M = M_1 \cup M_2$), jak je vidět na Obrázku 8.



Obrázek 8: M: $x^2 + y^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 \geq 4x$, $y \geq 0$

Obsah oblasti M_1 spočteme běžným vzorcem jako obsah čtvrtiny kruhu, tj. $S(M_1) = \frac{\pi 2^2}{4}$. Obsah oblasti M_2 spočítáme takto: $S(M_2) = \iint\limits_{M_2} 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{4\cos\varphi}^{2} 1 \cdot \varrho \,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi$. $S(M) = S(M_1) + S(M_2)$.

8. Příklad



Obrázek 9: M: $x^2 + y^2 \geq 2x$, $x^2 + y^2 \leq 4x$, $\frac{\sqrt{3}}{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x$

Řešení $S(M) = \iint\limits_{M} 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} 1 \cdot \varrho \,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi.$