Soustava lineárních rovnic

Jana Hoderová

© ÚM FSI VUT v Brně

25. července 2007

Řešte následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & & -3x_4 & = -1 \\ 7x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -10x_4 & = -2 \\ 2x_1 & & -2x_3 & -4x_4 & = -6 \\ 6x_1 & -x_2 & -2x_3 & -7x_4 & = -1 \end{array}$$

Řešení:

Koeficienty u proměnných $x_1, \ldots, x_4$ a absolutní členy z pravých stran rovnic zapíšeme pomocí rozšířené matice soustavy.

Řešte následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & & -3x_4 & = -1 \\ 7x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -10x_4 & = -2 \\ 2x_1 & & -2x_3 & -4x_4 & = -6 \\ 6x_1 & -x_2 & -2x_3 & -7x_4 & = -1 \end{array}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 7 & -2 & -2 & -10 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 6 & -1 & -2 & -7 & -1 \end{array}\right)$$

Vzhledem k tomu, že v prvním řádku je na první pozici číslo 1, s výhodou toho využijeme a ani nebudeme měnit pořadí řádků.

Řešte následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & & -3x_4 & = -1 \\ 7x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -10x_4 & = -2 \\ 2x_1 & & -2x_3 & -4x_4 & = -6 \\ 6x_1 & -x_2 & -2x_3 & -7x_4 & = -1 \end{array}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 7 & -2 & -2 & -10 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 6 & -1 & -2 & -7 & -1 \end{array}\right)$$

Snažíme se upravit matici do schodovitého tvaru, takže potřebujeme ve 2. řádku místo čísla 7 získat číslo 0.

Řešte následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -x_2 & & -3x_4 & = & -1 \\ 7x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -10x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & & -2x_3 & -4x_4 & = & -6 \\ 6x_1 & -x_2 & -2x_3 & -7x_4 & = & -1 \end{array}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 7 & -2 & -2 & -10 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 6 & -1 & -2 & -7 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

1. řádek jsme vynásobili číslem -7 a sečetli s 2. řádkem. Výsledek zapisujeme do 2. řádku.

Řešte následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & & -3x_4 & = -1 \\ 7x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -10x_4 & = -2 \\ 2x_1 & & -2x_3 & -4x_4 & = -6 \\ 6x_1 & -x_2 & -2x_3 & -7x_4 & = -1 \end{array}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 7 & -2 & -2 & -10 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 6 & -1 & -2 & -7 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

Dále se snažíme dostat číslo 0 ve 3. řádku místo čísla 2.

Řešte následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & & -3x_4 & = -1 \\ 7x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -10x_4 & = -2 \\ 2x_1 & & -2x_3 & -4x_4 & = -6 \\ 6x_1 & -x_2 & -2x_3 & -7x_4 & = -1 \end{array}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 7 & -2 & -2 & -10 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 6 & -1 & -2 & -7 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -4 \\ & & & & \end{array}\right)$$

Postupujeme podobně, tj. 1. řádek vynásobíme číslem -2 a sečteme s 3. řádkem. Výsledek zapisujeme do 3. řádku.

Řešte následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & & -3x_4 & = -1 \\ 7x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -10x_4 & = -2 \\ 2x_1 & & -2x_3 & -4x_4 & = -6 \\ 6x_1 & -x_2 & -2x_3 & -7x_4 & = -1 \end{array}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 7 & -2 & -2 & -10 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 6 & -1 & -2 & -7 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -4 \\ & & & & \end{array}\right)$$

Dále se snažíme dostat místo čísla 6 ve 4. řádku číslo 0.

Řešte následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & & -3x_4 & = -1 \\ 7x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -10x_4 & = -2 \\ 2x_1 & & -2x_3 & -4x_4 & = -6 \\ 6x_1 & -x_2 & -2x_3 & -7x_4 & = -1 \end{array}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 7 & -2 & -2 & -10 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 6 & -1 & -2 & -7 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \end{array}\right)$$

Postupujeme opět podobně, tj. 1. řádek vynásobíme číslem -6 a sečteme s 4. řádkem. Výsledek zapisujeme do 4. řádku.

Řešte následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}
x_1 \quad -x_2 \qquad\qquad -3x_4 &= -1\\
7x_1 -2x_2 -2x_3 -10x_4 &= -2\\
2x_1 \qquad\quad -2x_3 -4x_4 &= -6\\
6x_1 \quad -x_2 -2x_3 -7x_4 &= -1
\end{aligned}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1\\ 7 & -2 & -2 & -10 & -2\\ 2 & 0 & -2 & -4 & -6\\ 6 & -1 & -2 & -7 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1\\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5\\ 0 & 2 & -2 & 2 & -4\\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \end{array}\right)$$

V tuto chvíli je vidět, že 2. a 4. řádek jsou stejné (obecně jde o řádky lineárně závislé) a tudíž jeden z nich vynecháme. (Můžeme si to zdůvodnit tím, že nám stejně žádnou novou informaci neposkytuje.)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 7 & -2 & -2 & -10 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 6 & -1 & -2 & -7 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \\ 0 & \color{red}{2} & -2 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

Budeme pokračovat v úpravách na schodovitý tvar. To znamená, že se na místo čísla 2 ve 3. řádku snažíme dostat číslo 0.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 7 & -2 & -2 & -10 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 6 & -1 & -2 & -7 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \\ \color{red}{0} & 2 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

Už není možno použít nenulový násobek 1. řádku, protože po sečtení řádků by se nám na první pozici 3. řádku znehodnotila nula, kterou tam potřebujeme mít.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 7 & -2 & -2 & -10 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 6 & -1 & -2 & -7 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -12 & -30 \end{array}\right)$$

Vynásobíme 2. řádek číslem -2 a 3. řádek číslem 5. Následně je sečteme a výsledek zapíšeme do 3. řádku.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 7 & -2 & -2 & -10 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 6 & -1 & -2 & -7 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -12 & -30 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

V tuto chvíli již máme matici ve schodovitém tvaru a provedeme malou kosmetickou úpravu 3. řádku.

Po konečném počtu ekvivalentních úprav jsme získali matici ve schodovitém tvaru:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Z tohoto maticového zápisu dokážeme zrekonstruovat soustavu rovnic, která je ekvivalentní se zadanou soustavou.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 & -x_2 & & -3x_4 & = -1 \\ & 5x_2 & -2x_3 & +11x_4 & = 5 \\ & & x_3 & +2x_4 & = 5 \end{array}$$

Je evidentní, že řešení bude nekonečně mnoho a budou závislá na volbě jedné z proměnných. Zvolme například $x_4 = t$, kde $t \in \mathbb{R}$.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & & -3x_4 & = -1 \\ & 5x_2 & -2x_3 & +11x_4 & = 5 \\ & & x_3 & +2x_4 & = 5 \end{array}$$

Řešení je nekonečně mnoho ve tvaru:

$$\begin{array}{rcl} x_4 & = & t, \\ x_3 & = & 5 - 2x_4 = 5 - 2t, \\ 5x_2 & = & 5 - 11x_4 + 2x_3 = 5 - 11t + 2(5 - 2t) = 15 - 15t \Rightarrow \\ & \Rightarrow & x_2 = 3 - 3t, \\ x_1 & = & -1 + 3x_4 + x_2 = -1 + 3t + 2 - 3t = 1, t \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Každá proměnná je tedy vyjádřena v závislosti na parametru $t \in \mathbb{R}$.