L'Hospitalovo pravidlo

20. srpna 2007

- 1. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-2x-4}{x^2-x-2}$
- 2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{x^3}$
- 3. $\lim\limits_{x\to 1+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$
- 4. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sqrt{x}\ln x)$

Příklad 1. Určete limitu

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - x - 2}$$

Řešení: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-2x-4}{x^2-x-2} = \left[\frac{0}{0}\right]$

Dosazením $x = 2$ zjistíme typ limity, jsou splněny předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla

Řešení: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-2x-4}{x^2-x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x^3-2x-4)'}{(x^2-x-2)'} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2-2}{2x-1}$$

Použití l'Hospitalova pravidla, derivace čitatele zvlášť a jmenovatele zvlášť.

Řešení: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-2x-4}{x^2-x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^3-2x-4)'}{(x^2-x-2)'} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2-2}{2x-1} =$
$= \frac{10}{3}$

Dosadili jsme $x = 2$.

Příklad 2. Určete limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^3}$$

Řešení: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{2x} = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$, jsou tedy splněny předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla

Řešení: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\mathrm{e}^{2x})'}{(x^3)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{3x^2}$

Použití l'Hospitalova pravidla, derivace čitatele zvlášť a jmenovatele zvlášť.

Řešení: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\mathrm{e}^{2x})'}{(x^3)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{3x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$\lim\limits_{x\to\infty} 2\mathrm{e}^{2x} = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} 3x^2 = \infty$, jsou tedy opět splněny předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla

Řešení: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(e^{2x})'}{(x^3)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}}{3x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4e^{2x}}{6x}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} 4e^{2x} = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} 6x = \infty$, jsou tedy opět splněny předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla

Řešení: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\mathrm{e}^{2x})'}{(x^3)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{3x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$
$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4\mathrm{e}^{2x}}{6x} =$
$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{8\mathrm{e}^{2x}}{6} = \infty.$

$\lim\limits_{x\to\infty} 8\mathrm{e}^{2x} = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} 6 = 6$, dostáváme nekonečný výraz.

Příklad 3. Určete limitu

$$\lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

Řešení: $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=[\infty-\infty]$

Jelikož je to limita zprava, existují limity obou sčítanců a jsou rovny nekonečnu. Je třeba výraz upravit, aby splňoval předpoklady pro použití l' Hospitalova pravidla

Řešení: $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=[\infty-\infty]=$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}$$

Převedení na společného jmenovatele.

Řešení: $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=[\infty-\infty]=$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\ln x-(x-1)=0$ a $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\ln x=0$ dosazením , jsou tedy již splněny předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla

Řešení: $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=[\infty-\infty]=$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+1-\frac{1}{x}}$$

Použití l'Hospitalova pravidla, derivace čitatele zvlášť a jmenovatele zvlášť.

Řešení: $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=[\infty-\infty]=$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Výraz opět splňuje předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla

Řešení: $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = [\infty - \infty] =$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+1-\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

Použití l'Hospitalova pravidla

Řešení: $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=[\infty-\infty]=$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{2}$$

Dosazení $x=1$

Příklad 4. Určete limitu

$$\lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x}\ln x)$$

Řešení: $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sqrt{x}\ln x) = [0\cdot\infty]$

Je třeba výraz upravit, aby splňoval předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla.

Řešení: $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sqrt{x}\ln x) = [0\cdot\infty] =$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Odmocninu jsme převedli do jmenovatele zlomku, kde se objevila jako převrácená hodnota

Řešení: $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sqrt{x}\ln x) = [0\cdot\infty] =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right]$

Teď již výraz splňuje předpoklady pro l'Hospitalovo pravidlo

Řešení: $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sqrt{x}\ln x) = [0\cdot\infty] =$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}\frac{1}{x\sqrt{x}}}$$

Použití l'Hospitalova pravidla

Řešení: $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sqrt{x}\ln x) = [0 \cdot \infty] =$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}\frac{1}{x\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} -2\sqrt{x} = 0$$

Algebraickou úpravou (např. pomocí převodu na racionální exponent mocniny x) získáme výraz $-2\sqrt{x}$, jehož limita je zřejmá.