

Hodnost matice

© ÚM FSI VUT v Brně

20. srpna 2007

Určete hodnotu matice

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 6 \\ -5 & -7 & -8 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 7 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$h \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 6 \\ -5 & -7 & -8 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 7 & -5 & -6 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -7 & -8 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 7 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Postupujeme pomocí elementárních řádkových úprav. Násobíme čtvrtý řádek postupně čísly -2 a $-\frac{3}{2}$ a přičteme k prvnímu resp. druhému řádku.

$$h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -7 & -8 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 7 & -5 & -6 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} -5 & -7 & -8 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 7 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Vypustili jsme nulové řádky pro přehlednější postup, hodnost zřejmě zůstane zachována.

$$h \begin{pmatrix} -5 & -7 & -8 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 7 & -5 & -6 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ -5 & -7 & -8 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Vynásobili jsme druhý řádek číslem $\frac{1}{2}$ a vyměnili s prvním.

$$h \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ -5 & -7 & -8 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & -5 & -6 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 7 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

Nyní matici transponujeme a pokračujeme dále pomocí řádkových úprav.

Poznámka: Lze ekvivalentně postupovat i pomocí sloupcových úprav bez transponování.

$$h \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 7 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 6 & -8 \\ 0 & 9 & -12 \end{pmatrix}$$

Násobili jsme postupně první řádek čísly -2,-1,-1,-2 a přičítali postupně k 2. až 5. řádku.

$$h \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 6 & -8 \\ 0 & 9 & -12 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Násobili jsme postupně druhý řádek čísly 1,-2,-3 a přičítali postupně k 3. až 5. řádku.

$$h \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} = 2$$