Konvexnost, konkávnost

20. srpna 2007

- 1. $f = x^3 - 12x$
- 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$
- 3. $f = \frac{x}{\ln x}$

Příklad 1. Určete intervaly, na kterých je funkce konvexní a konkávní a určete inflexní body

$$f = x^3 - 12x$$

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

Nejprve je třeba určit definiční obor. Výraz je vždy definován.

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

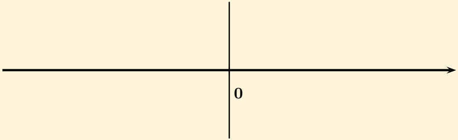
$f'' = 6x$

Určíme druhou derivaci a zjistíme, kdy je kladná a kdy záporná. K tomu je třeba zjistit nulové body derivace, tedy řešit rovnici $6x = 0$.

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f'' = 6x \qquad x = 0$

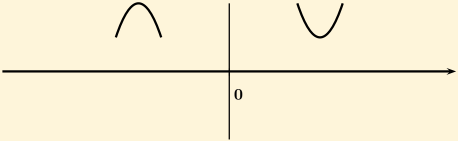


Vpravo od bodu $x = 0$ je druhá derivace kladná a proto je zde původní funkce f konvexní, vlevo od bodu $x = 0$ je záporná a tedy f je zde konkávní. Toto jsme zjistili dosazením libovolného bodu ze zkoumaného intervalu, např $f''(2) = 24 > 0$.

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f'' = 6x \qquad x = 0$

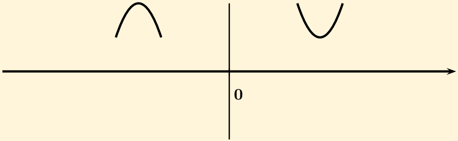


Určili jsme intervaly konvexnosti a konkávnosti.

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f'' = 6x \qquad x = 0$



V bodě $x = 0$ dochází ke změně z konkávní na konvexní, je to tedy inflexní bod.

Příklad 2. Určete intervaly, na kterých je funkce konvexní a konkávní a určete inflexní body funkce

$$f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$$

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

Nejprve je třeba určit definiční obor. Výraz je vždy definován.

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

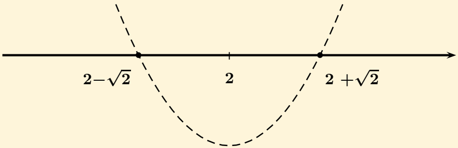
$f'' = \mathrm{e}^{-x}(2-x) - x\mathrm{e}^{-x}(2-x) - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

Určíme druhou derivaci a zjistíme, kdy je kladná a kdy záporná. K tomu je třeba zjistit nulové body derivace, tedy řešit rovnici $x^2 - 4x + 2 = 0$, protože výraz e^{-x} je vždy kladný.

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f'' = \mathrm{e}^{-x}(2-x) - x\mathrm{e}^{-x}(2-x) - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 4x + 2)$
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$

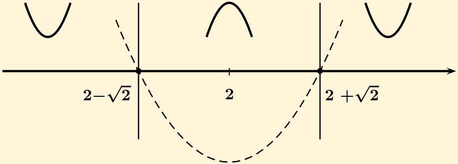


Grafem zkoumaného výrazu je parabola viz obr., znaménko druhé derivace závisí pouze na tomto výrazu, tedy kde je parabola nad osou x, je celý výraz kladný, kde pod osou x, je záporný.

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f'' = \mathrm{e}^{-x}(2-x) - x\mathrm{e}^{-x}(2-x) - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 4x + 2)$
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$

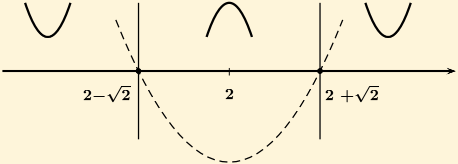


Určili jsme intervaly, na kterých je funkce f konvexní a konkávní. Lze to udělat i pomocí dosazování bodů ze zkoumaných intervalů do předpisu druhé derivace a určením znaménka tohoto výrazu.

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f'' = \mathrm{e}^{-x}(2-x) - x\mathrm{e}^{-x}(2-x) - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 4x + 2)$
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$



V bodech $x = 2 \pm \sqrt{2}$ dochází ke změně z konvexní na konkávní resp. naopak, druhá derivace je v nich rovna nule, tudíž to jsou inflexní body.

Příklad 3. Určete intervaly, na kterých je funkce konvexní a konkávní a určete inflexní body funkce

$$f = \frac{x}{\ln x}$$

Příklad 3. $f = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

Nejprve je třeba určit definiční obor. Funkce $\ln x$ je definována pouze pro kladná čísla a navíc je ve jmenovateli zlomku, tedy nesmí být rovna nule. To vylučuje $x = 1$, protože $\ln 1 = 0$.

Příklad 3. $f = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

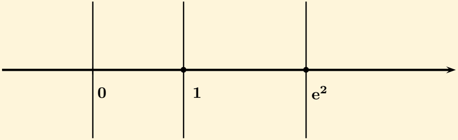
$f'' = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 1)2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\frac{1}{x}\ln x(2-\ln x)}{\ln^4 x}$

Určíme druhou derivaci a zjistíme, kdy je kladná a kdy záporná. K tomu je třeba zjistit nulové body derivace, tedy řešit rovnici $2 - \ln x = 0$. V bodě $x = 1$ není definována ani druhá derivace funkce f ani samotná funkce. Je třeba jej zahrnout do dělících bodů.

Příklad 3. $f = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

$f'' = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 1) 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\frac{1}{x}\ln x (2 - \ln x)}{\ln^4 x}$,
nulový bod v bodě $x = \mathrm{e}^2$.



Do druhé derivace postupně dosadíme nějaký bod z intervalů $(0,1)$, $(1,\mathrm{e}^2)$ a (e^2,∞) a zjistíme znaménko výsledné hodnoty. Jmenovatel je vždy kladný, navíc $\frac{1}{x}$ je vždy kladné na $\mathrm{D}f$.

Příklad 3. $f = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

$f'' = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 1) 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\frac{1}{x}\ln x(2-\ln x)}{\ln^4 x}$,
nulový bod v bodě $x = \mathrm{e}^2$.

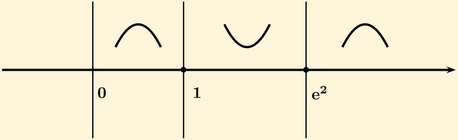
interval	znaménko $\ln x$	znaménko $2 - \ln x$
$(0,1)$	$-$	$+$
$(1,\mathrm{e}^2)$	$+$	$+$
(e^2,∞)	$+$	$-$

Určili jsme znaménka výrazů, odtud pak intervaly konvexnosti a konkávnosti.

Příklad 3. $f = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

$f'' = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 1) 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\frac{1}{x}\ln x (2 - \ln x)}{\ln^4 x}$,
nulový bod v bodě $x = \mathrm{e}^2$.



V bodě $x = \mathrm{e}^2$ dochází ke změně z konvexní na konkávní, druhá derivace v něm existuje a je v rovna nule, tudíž je to inflexní bod.