Monotonnost funkce

20. srpna 2007

- 1. $f = x^3 - 12x$
- 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$
- 3. $f = \frac{x}{\ln x}$

Příklad 1. Určete intervaly monotonnosti a lokální extrémy funkce

$$f = x^3 - 12x$$

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

Nejprve je třeba určit definiční obor. Výraz je vždy definován.

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

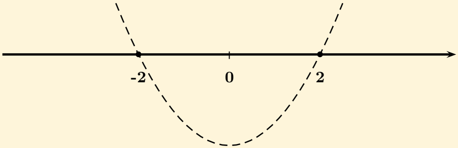
$f' = 3x^2 - 12$

Určíme první derivaci a zjistíme, kdy je kladná a kdy záporná. K tomu je třeba zjistit nulové body derivace, tedy řešit rovnici $3x^2 - 12 = 0$.

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f' = 3x^2 - 12 \qquad x_{1,2} = \pm 2$

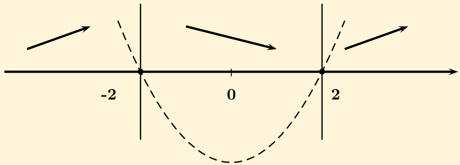


Grafem derivace je parabola. Tam, kde je její graf nad osou x je první derivace kladná, kde je parabola pod osou x, je první derivace záporná. **Poznámka:** Lze to zjistit i tak, že do předpisu derivace dosadíme libovolný bod ze zkoumaného intervalu a zjistíme znaménko výsledné hodnoty.

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f' = 3x^2 - 12 \qquad x_{1,2} = \pm 2$

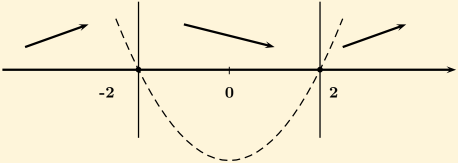


Určili jsme intervaly monotonnosti.

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f' = 3x^2 - 12 \qquad x_{1,2} = \pm 2$



V bodech $x = \pm 2$ dochází ke změně monotonie a derivace v nich existuje a je v nich rovna nule, tudíž v nich nastávají lokální extrémy. Konkrétně v bodě $x = -2$ lokální maximum, v bodě $x = 2$ lokální minimum.

Příklad 2. Určete intervaly monotonnosti a lokální extrémy funkce

$$f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$$

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

Nejprve je třeba určit definiční obor. Výraz je vždy definován.

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

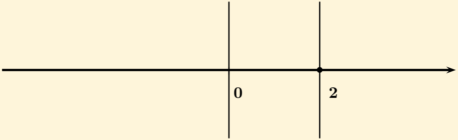
$f' = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}(2-x)$

Určíme první derivaci a zjistíme, kdy je kladná a kdy záporná. K tomu je třeba zjistit nulové body derivace, tedy řešit rovnici $x\mathrm{e}^{-x}(2-x) = 0$.

Příklad 2. $f = x^2\mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f' = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}(2-x) \qquad x_{1,2} = \{0, 2\}$

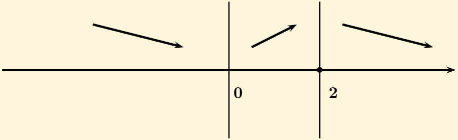


Výraz e^{-x} je vždy kladný, nulové body se týkají pouze ostatních členů. Nyní budeme postupovat tak, že do předpisu derivace dosadíme libovolný bod ze zkoumaného intervalu a zjistíme znaménko výsledné hodnoty.

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f' = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}(2-x) \qquad x_{1,2} = \{0, 2\}$

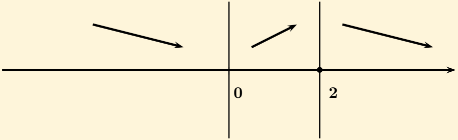


Určili jsme intervaly monotonnosti.

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f' = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}(2-x) \qquad x_{1,2} = \{0, 2\}$



V bodech $x = \{0, 2\}$ dochází ke změně monotonie a derivace v nich existuje a je v nich rovna nule, tudíž v nich nastávají lokální extrémy. Konkrétně v bodě $x = 2$ lokální maximum, v bodě $x = 0$ lokální minimum.

Příklad 3. Určete intervaly monotonnosti a lokální extrémy funkce

$$f = \frac{x}{\ln x}$$

Příklad 3. $f = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

Nejprve je třeba určit definiční obor. Funkce $\ln x$ je definována pouze pro kladná čísla a navíc je ve jmenovateli zlomku, tedy nesmí být rovna nule. To vylučuje $x = 1$, protože $\ln 1 = 0$.

Příklad 3. $f = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

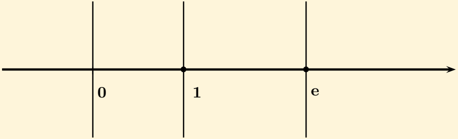
$f' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

Určíme první derivaci a zjistíme, kdy je kladná a kdy záporná. K tomu je třeba zjistit nulové body derivace, tedy řešit rovnici $\ln x - 1 = 0$. V bodě $x = 1$ není definována ani derivace funkce f ani samotná funkce. Je třeba jej zahrnout do dělících bodů.

Příklad 3. $f = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^{+} \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

$f' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, nulový bod v bodě x=$\mathrm{e}$.

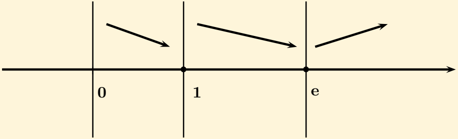


Nyní budeme postupovat tak, že do předpisu derivace dosadíme libovolný bod ze zkoumaného intervalu a zjistíme znaménko výsledné hodnoty. Zkoumáme tedy intervaly $(0,1)$, $(1,\mathrm{e})$ a (e,∞).

Příklad 3. $f = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

$f' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, nulový bod v bodě x=e.

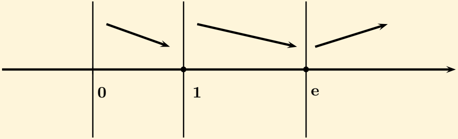


Určili jsme intervaly monotonnosti.

Příklad 3. $f = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

$f' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, nulový bod v bodě x=e.



V bodě $x = \mathrm{e}$ dochází ke změně monotonie a derivace v něm existuje a je v rovna nule, tudíž v něm nastává lokální extrém. Konkrétně lokální minimum.