Opakování střední školy

30. srpna 2007

- 1. Logaritmická rovnice

- 2. Goniometrická rovnice

Příklad 1: Spočtěte x z rovnice

$$\log x - \frac{3}{\log x} = 2$$

Příklad 1: $\log x - \frac{3}{\log x} = 2$

Řešení: Podmínkou řešitelnosti je, aby $\log x \neq 0$, tedy $x \neq 1$.

$\log^2 x - 3 = 2 \log x$

Násobíme výrazem $\log x$

Příklad 1: $\log x - \frac{3}{\log x} = 2$

Řešení: Podmínkou řešitelnosti je, aby $\log x \neq 0$, tedy $x \neq 1$.

$\log^2 x - 3 = 2\log x$
substituce: $\log x = a$
$a^2 - 2a - 3 = 0$

Provedeme substituci za $\log x$ a všechny členy rovnice převedeme na jednu stranu

Příklad 1: $\log x - \frac{3}{\log x} = 2$

Řešení: Podmínkou řešitelnosti je, aby $\log x \neq 0$, tedy $x \neq 1$.

$\log^2 x - 3 = 2\log x$
substituce: $\log x = a$
$a^2 - 2a - 3 = 0$
$(a-3)(a+1) = 0,\ a_1 = 3,\ a_2 = -1$

Ekvivalentně lze kvadratickou rovnici řešit pomocí vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice $a_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$

Příklad 1: $\log x - \frac{3}{\log x} = 2$

Řešení: Podmínkou řešitelnosti je, aby $\log x \neq 0$, tedy $x \neq 1$.

$\log^2 x - 3 = 2\log x$
substituce: $\log x = a$
$a^2 - 2a - 3 = 0$
$(a-3)(a+1) = 0,\ \ a_1 = 3,\ \ a_2 = -1$
$\log x_1 = 3$, tedy $x_1 = 10^3$
$\log x_2 = -1$, tedy $x_2 = 10^{-1}$

Dosadili jsme do substituční rovnice za a. Funkce $\log x$ má základ 10, x tedy získáme umocněním 10 na číslo na pravé straně.

Příklad 1: $\log x - \frac{3}{\log x} = 2$

Řešení: Podmínkou řešitelnosti je, aby $\log x \neq 0$, tedy $x \neq 1$.

$\log^2 x - 3 = 2\log x$

substituce: $\log x = a$

$a^2 - 2a - 3 = 0$

$(a-3)(a+1) = 0,\ a_1 = 3,\ a_2 = -1$

$\log x_1 = 3$, tedy $x_1 = 10^3$

$\log x_2 = -1$, tedy $x_2 = 10^{-1}$

$x_1 = 1000,\ x_2 = 1/10$

Rovnice má dva kořeny

Příklad 2: Spočtěte x z rovnice

$$\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$$

Příklad 2: $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$

Řešení: $\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) + \sin x = 0$

Použili jsme vzorec $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Příklad 2: $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$

Řešení: $\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) + \sin x = 0$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

substituce: $\sin x = r$

Rovnici upravíme a provedeme substituci za $\sin x$

Příklad 2: $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$

Řešení: $\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) + \sin x = 0$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

substituce: $\sin x = r$

$2r^2 + r - 1 = 0,\ r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4},\ r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = -1$

Použili jsme vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice s koeficienty $a, b, c:\ r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Příklad 2: $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$

Řešení: $\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) + \sin x = 0$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$
substituce: $\sin x = r$
$2r^2 + r - 1 = 0,\ r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4},\ r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = -1$
$\sin x_1 = \frac{1}{2}$ tedy $x_{11} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ a $x_{12} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\sin x_2 = -1$ tedy $x_2 = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Ke každému kořenu může být přičtena perioda funkce $\sin x$, tedy 2π, a rovnice je stále splněna!

Příklad 2: $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$

Řešení: $\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) + \sin x = 0$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$
substituce: $\sin x = r$
$2r^2 + r - 1 = 0,\ r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4},\ r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = -1$
$\sin x_1 = \frac{1}{2}$ tedy $x_{11} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ a $x_{12} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\sin x_2 = -1$ tedy $x_2 = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Rovnice má tedy nekonečně mnoho kořenů závislých na parametru k daných třemi systémy $\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\},\ k \in \mathbb{Z}$