Aplikace určitého integrálu

29. srpna 2007

- 1. Obsah plochy pod křivkou

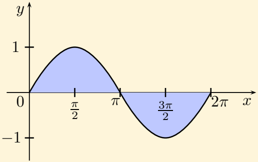
- 2. Objem rotačního tělesa

- 3. Délka křivky

Příklad 1. Vypočtěte obsah plochy ohraničené funkcí $\sin x$ na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ a osou x.

Příklad 1. Vypočtěte obsah plochy ohraničené funkcí $\sin x$ na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ a osou x.

Řešení:



Máme určit obsah plochy na obrázku.

Příklad 1. Vypočtěte obsah plochy ohraničené funkcí $\sin x$ na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ a osou x.

Řešení: K tomu je potřeba spočítat

$$\int\limits_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x + (-1) \cdot \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$$

Nemůžeme počítat $\int\limits_0^{2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$, protože část plochy je pod osou x a odečítala by se!

Příklad 1. Vypočtěte obsah plochy ohraničené funkcí $\sin x$ na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ a osou x.

Řešení:

$$\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x + (-1)\cdot \int_\pi^{2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi - \Big[-\cos x\Big]_\pi^{2\pi}$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c$$

Příklad 1. Vypočtěte obsah plochy ohraničené funkcí $\sin x$ na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ a osou x.

Řešení:

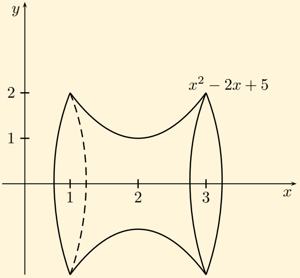
$$\int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x + (-1) \cdot \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = \big[-\cos x \big]_0^{\pi} - \big[-\cos x \big]_{\pi}^{2\pi} =$$
$$= 1 + 1 - (-1 - 1) = 4$$

Ověřte si: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = 0$

Příklad 2. Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = x^2 - 2x + 5$ na intervalu $\langle 1, 3 \rangle$ kolem osy x.

Příklad 2. Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = x^2 - 2x + 5$ na intervalu $\langle 1, 3 \rangle$ kolem osy x.

Řešení:



Máme určit objem tělesa na obrázku.

Příklad 2. Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = x^2 - 2x + 5$ na intervalu $\langle 1, 3\rangle$ kolem osy x.

Řešení: K tomu je potřeba spočítat

$$\pi \int_1^3 (x^2 - 2x + 5)^2 \, \mathrm{d}x$$

Objem rotačního tělesa: $V = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x$

Příklad 2. Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = x^2 - 2x + 5$ na intervalu $\langle 1, 3 \rangle$ kolem osy x.

Řešení:

$$\pi \int_1^3 (x^2 - 2x + 5)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_1^3 (x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 20x + 25) \, \mathrm{d}x$$

Umocnili jsme závorku.

Příklad 2. Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = x^2 - 2x + 5$ na intervalu $\langle 1, 3 \rangle$ kolem osy x.

Řešení:

$$\pi \int_1^3 (x^2 - 2x + 5)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_1^3 (x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 20x + 25) \, \mathrm{d}x =$$
$$= \pi \Big[\tfrac{x^5}{5} - x^4 + \tfrac{14}{3} x^3 - 10x^2 + 25x \Big]_1^3$$

Integrujeme polynom člen po členu podle vzorce $\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

Příklad 2. Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = x^2 - 2x + 5$ na intervalu $\langle 1, 3 \rangle$ kolem osy x.

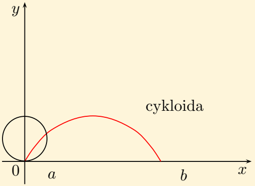
Řešení:

$$\pi \int_1^3 (x^2 - 2x + 5)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_1^3 (x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 20x + 25) \, \mathrm{d}x =$$
$$= \pi \left[\tfrac{x^5}{5} - x^4 + \tfrac{14}{3} x^3 - 10x^2 + 25x \right]_1^3 = \tfrac{393}{5} - \tfrac{283}{15} = \tfrac{896}{15}$$

Příklad 3. Vypočtěte délku oblouku cykloidy dané parametricky
$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$
$t \in \langle 0, 2\pi \rangle,\ a > 0.$

Příklad 3. Vypočtěte délku oblouku cykloidy $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$ $t \in \langle 0, 2\pi \rangle,\ a > 0.$

Řešení:



Máme určit délku křivky na obrázku vyznačené červeně.

Příklad 3. Vypočtěte délku oblouku cykloidy $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$ $t \in \langle 0, 2\pi \rangle,\ a > 0.$

Řešení: K tomu je potřeba spočítat

$$\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\,\mathrm{d}x$$

Délka křivky dané parametricky: $L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\left[\dot\varphi(t)\right]^2 + \left[\dot\psi(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t,$
v našem případě $\varphi(t) = a(t - \sin t),\ \psi(t) = a(1 - \cos t),$
tedy $\dot\varphi(t) = a(1 - \cos t),\ \dot\psi(t) = a \sin t.$

Příklad 3. Vypočtěte délku oblouku cykloidy $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$ $t \in \langle 0, 2\pi \rangle,\ a > 0.$

Řešení:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, \mathrm{d}x = \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, \mathrm{d}t$$

$$a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) =$$
$$= 2a^2(1 - \cos t).$$

Příklad 3. Vypočtěte délku oblouku cykloidy $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$ $t \in \langle 0, 2\pi \rangle,\ a > 0$.

Řešení:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, \mathrm{d}x = \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\, \mathrm{d}t =$$
$$= \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 \tfrac{t}{2}}\, \mathrm{d}t$$

Použili jsme vztah $\left|\sin \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, tedy po umocnění $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$.

Příklad 3. Vypočtěte délku oblouku cykloidy $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$ $t \in \langle 0, 2\pi \rangle,\ a > 0.$

Řešení:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 \tfrac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 2a \int_0^{2\pi} \sin \tfrac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 2a\Big[-2\cos \tfrac{t}{2}\Big]_0^{2\pi} =$$

$$= 2a(2+2) = 8a$$