Diferenciál a Taylorův polynom

7. září 2007

- Diferenciál

- Taylorův polynom

Příklad 1. Určete druhý diferenciál funkce $f(x) = \mathrm{tg} x$ v bodě $x = \frac{\pi}{4}$

Příklad 1.Určete druhý diferenciál funkce $f(x) = \mathrm{tg} x$ v bodě $x = \frac{\pi}{4}$

Řešení: Je třeba spočítat druhou derivaci funkce f:

$$f' = \frac{1}{\cos^2 x},\ f'' = \frac{-2}{\cos^3 x} \cdot (-\sin x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$\mathrm{d}^2 f(a) = f''(a)\,\mathrm{d}x^2$
$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, druhá derivace vznikne derivací zlomku a složené funkce.

Příklad 1.Určete druhý diferenciál funkce $f(x) = \mathrm{tg}x$ v bodě $x = \frac{\pi}{4}$

Řešení: Je třeba spočítat druhou derivaci funkce f:

$$f' = \frac{1}{\cos^2 x},\ f'' = \frac{-2}{\cos^3 x} \cdot (-\sin x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}^2 f = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x^2$$

Určili jsme první a druhý diferenciál obecně, nyní do druhého diferenciálu dosadíme bod $\frac{\pi}{4}$.

Příklad 1. Určete druhý diferenciál funkce $f(x) = \mathrm{tg} x$ v bodě $x = \frac{\pi}{4}$

Řešení: Je třeba spočítat druhou derivaci funkce f:

$$f' = \frac{1}{\cos^2 x},\ f'' = \frac{-2}{\cos^3 x} \cdot (-\sin x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}^2 f = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x^2$$

$$\mathrm{d}^2 f(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sin\frac{\pi}{4}}{\cos^3\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{d}x^2 = 4\,\mathrm{d}x^2$$

$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Příklad 2. Určete Taylorův polynom stupně 5 funkce $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.

Příklad 2. Určete Taylorův polynom stupně 5 funkce $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.

Řešení: Sestavíme tabulku pro derivace až do řádu 5 a jejich funkční hodnoty v bodě $x_0 = 0$.

	x	$x = x_0 = 0$
f	$\mathrm{e}^x \sin x$	0
f'		
f''		
f'''		
$f^{(4)}$		
$f^{(5)}$		

$$T^n_{x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Příklad 2. Určete Taylorův polynom stupně 5 funkce $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.

Řešení: Sestavíme tabulku pro derivace až do řádu 5 a jejich funkční hodnoty v bodě $x_0 = 0$.

	x	$x = x_0 = 0$
f	$\mathrm{e}^x \sin x$	0
f'	$\mathrm{e}^x (\sin x + \cos x)$	1
f''		
f'''		
$f^{(4)}$		
$f^{(5)}$		

$f'(x) = \mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x$ …derivace součinu

Příklad 2. Určete Taylorův polynom stupně 5 funkce $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.

Řešení: Sestavíme tabulku pro derivace až do řádu 5 a jejich funkční hodnoty v bodě $x_0 = 0$.

	x	$x = x_0 = 0$
f	$\mathrm{e}^x \sin x$	0
f'	$\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)$	1
f''	$2\mathrm{e}^x \cos x$	2
f'''		
$f^{(4)}$		
$f^{(5)}$		

$$f''(x) = \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) + \mathrm{e}^x(\cos x - \sin x)$$

Příklad 2. Určete Taylorův polynom stupně 5 funkce $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.

Řešení: Sestavíme tabulku pro derivace až do řádu 5 a jejich funkční hodnoty v bodě $x_0 = 0$.

	x	$x = x_0 = 0$
f	$\mathrm{e}^x \sin x$	0
f'	$\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)$	1
f''	$2\mathrm{e}^x \cos x$	2
f'''	$2\mathrm{e}^x(\cos x - \sin x)$	2
$f^{(4)}$		
$f^{(5)}$		

$$f'''(x) = 2\mathrm{e}^x \cos x - 2\mathrm{e}^x \sin x$$

Příklad 2. Určete Taylorův polynom stupně 5 funkce $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.

Řešení: Sestavíme tabulku pro derivace až do řádu 5 a jejich funkční hodnoty v bodě $x_0 = 0$.

	x	$x = x_0 = 0$
f	$\mathrm{e}^x \sin x$	0
f'	$\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)$	1
f''	$2\mathrm{e}^x \cos x$	2
f'''	$2\mathrm{e}^x(\cos x - \sin x)$	2
$f^{(4)}$	$-4\mathrm{e}^x \sin x$	0
$f^{(5)}$		

$$f^{(4)}(x) = 2\mathrm{e}^x(\cos x - \sin x) + 2\mathrm{e}^x(-\sin x - \cos x)$$

Příklad 2. Určete Taylorův polynom stupně 5 funkce $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.

Řešení: Sestavíme tabulku pro derivace až do řádu 5 a jejich funkční hodnoty v bodě $x_0 = 0$.

	x	$x = x_0 = 0$
f	$\mathrm{e}^x \sin x$	0
f'	$\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)$	1
f''	$2\mathrm{e}^x \cos x$	2
f'''	$2\mathrm{e}^x(\cos x - \sin x)$	2
$f^{(4)}$	$-4\mathrm{e}^x \sin x$	0
$f^{(5)}$	$-4\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)$	-4

$$f^{(5)}(x) = -4\mathrm{e}^x \sin x - 4\mathrm{e}^x \cos x$$

Příklad 2. Určete Taylorův polynom stupně 5 funkce $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.

Řešení: Sestavíme tabulku pro derivace až do řádu 5 a jejich funkční hodnoty v bodě $x_0 = 0$.

	x	$x = x_0 = 0$
f	$\mathrm{e}^x \sin x$	0
f'	$\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)$	1
f''	$2\mathrm{e}^x \cos x$	2
f'''	$2\mathrm{e}^x(\cos x - \sin x)$	2
$f^{(4)}$	$-4\mathrm{e}^x \sin x$	0
$f^{(5)}$	$-4\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)$	-4

$$T_0^5(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{(-4)}{5!}x^5 = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - 30x^5$$