Analytická geometrie

19. září 2007

- Příklad 1.

- Příklad 2.

- Příklad 3.

Příklad 1. Určete obecnou rovnici roviny, která prochází body

$$A = [0, 1, 2],\ B = [-1, 0, 3],\ C = [3, 1, 0].$$

Příklad 1.
$A = [0, 1, 2],\ B = [-1, 0, 3],\ C = [3, 1, 0].$

Řešení: Obecná rovnice má tvar $ax + by + cz + d = 0$.

Určíme směrové vektory roviny:
$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -1, 1), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (3, 0, -2)$

Lze vybrat libovolné dva různé vektory, které mají počáteční a koncový bod v bodech A, B, C.

Příklad 1.
$A = [0, 1, 2],\ B = [-1, 0, 3],\ C = [3, 1, 0].$

Řešení: Obecná rovnice má tvar $ax + by + cz + d = 0$.

Určíme směrové vektory roviny:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -1, 1), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (3, 0, -2)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k} = (2, 1, 3)$$

K určení obecné rovnice potřebujeme vektor normálový, který dostaneme ze směrových pomocí vektorového součinu. Determinant se spočítá pomocí Sarrusova pravidla.

Příklad 1.
$A = [0, 1, 2],\ B = [-1, 0, 3],\ C = [3, 1, 0].$

Řešení: Obecná rovnice má tvar $ax + by + cz + d = 0$.

Určíme směrové vektory roviny:
$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -1, 1), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (3, 0, -2)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k} = (2, 1, 3)$$

$a = 2,\ b = 1,\ c = 3, \quad 2x + y + 3z + d = 0$

Koeficienty a, b, c odpovídají souřadnicím normálového vektoru, zbývá určit d.

Příklad 1.
$A = [0, 1, 2],\ B = [-1, 0, 3],\ C = [3, 1, 0].$

Řešení: Obecná rovnice má tvar $ax + by + cz + d = 0$.

Určíme směrové vektory roviny:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -1, 1), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (3, 0, -2)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k} = (2, 1, 3)$$

$a = 2,\ b = 1,\ c = 3, \quad 2x + y + 3z + d = 0$

$2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + d = 0$

Do rovnice jsme dosadili bod A, tj. $x = 0,\ y = 1,\ z = 2$.

Příklad 1.
$A = [0, 1, 2],\ B = [-1, 0, 3],\ C = [3, 1, 0].$

Řešení: Obecná rovnice má tvar $ax + by + cz + d = 0$.

Určíme směrové vektory roviny:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -1, 1), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (3, 0, -2)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k} = (2, 1, 3)$

$a = 2,\ b = 1,\ c = 3, \quad 2x + y + 3z + d = 0$

$2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + d = 0, \quad \Rightarrow d = -7$

$$2x + y + 3z - 7 = 0$$

Vypočítali jsme d a dosadili do rovnice roviny.

Příklad 2. Určete vzájemnou polohu přímky $p: \; \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{4}$ a roviny $\rho: \; x + y + z - 2 = 0$

Příklad 2. $p: \ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{4}$, $\rho: \ x+y+z-2=0$

Řešení: Přímka p má směrový vektor $\overrightarrow{s} = (2,3,4)$, rovina ρ má normálový vektor $\overrightarrow{n} = (1,1,1)$.

Jestliže $\overrightarrow{s}$ a $\overrightarrow{n}$ jsou lineárně závislé nebo nezávislé ale nekolmé, pak mají p a ρ právě jeden společný bod. Jestliže jsou $\overrightarrow{s}$ a $\overrightarrow{n}$ na sebe kolmé, pak může být $p \| \rho$ nebo p leží v ρ.

Příklad 2. $p: \ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{4}$, $\rho: \ x+y+z-2=0$

Řešení: Přímka p má směrový vektor $\overrightarrow{s} = (2,3,4)$, rovina ρ má normálový vektor $\overrightarrow{n} = (1,1,1)$.

$\overrightarrow{s}$ a $\overrightarrow{n}$ jsou lineárně nezávislé, nekolmé.

Nezávislost: neexistuje reálné číslo r takové, že $\overrightarrow{s} = r \cdot \overrightarrow{n}$.
Kolmost: skalární součin $\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{n} = 9$ je různý od 0.

Příklad 2. $p: \ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{4}$, $\rho: \ x+y+z-2=0$

Řešení: Přímka p má směrový vektor $\overrightarrow{s} = (2,3,4)$, rovina ρ má normálový vektor $\overrightarrow{n} = (1,1,1)$.
$\overrightarrow{s}$ a $\overrightarrow{n}$ jsou lineárně nezávislé, nekolmé.
Spočtěme průnik p a ρ. Parametrické rovnice přímky p jsou tvaru
$x = 1 + 2t,$
$y = -2 + 3t,$
$z = 4t, \ t \in \mathbb{R}$

Dosadíme za x, y, z z parametrických rovnic přímky p do obecné rovnice roviny ρ.

Příklad 2. $p: \ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{4}$, $\rho: \ x+y+z-2=0$

Řešení: Přímka p má směrový vektor $\overrightarrow{s} = (2,3,4)$, rovina ρ má normálový vektor $\overrightarrow{n} = (1,1,1)$.

$\overrightarrow{s}$ a $\overrightarrow{n}$ jsou lineárně nezávislé, nekolmé.

Spočtěme průnik p a ρ. Parametrické rovnice přímky p jsou tvaru

$x = 1 + 2t,$

$y = -2 + 3t,$

$z = 4t, \ t \in \mathbb{R}$

$(1+2t) + (-2+3t) + (4t) - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1/3$

Vypočtenou hodnotu parametru t dosadíme zpět do parametrických rovnic přímky p.

Příklad 2. $p:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{4}$, $\rho:\ x+y+z-2=0$

Řešení: Přímka p má směrový vektor $\overrightarrow{s}=(2,3,4)$, rovina ρ má normálový vektor $\overrightarrow{n}=(1,1,1)$.
$\overrightarrow{s}$ a $\overrightarrow{n}$ jsou lineárně nezávislé, nekolmé.
Spočtěme průnik p a ρ. Parametrické rovnice přímky p jsou tvaru
$x=1+2t$,
$y=-2+3t$,
$z=4t,\ t\in\mathbb{R}$
$(1+2t)+(-2+3t)+(4t)-2=0 \quad\Rightarrow\quad t=1/3$

$$P=\left[\frac{5}{3},-1,\frac{4}{3}\right]$$

Přímka p a rovina ρ mají jeden společný bod P, jsou tedy různoběžné. Z lineární nezávislosti $\overrightarrow{s}$ a $\overrightarrow{n}$ jsou navíc nekolmé.

Příklad 3. Určete délku poloos a střed elipsy, která je zadaná rovnicí:

$$2x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$$

Příklad 3. $2x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$

Řešení: Obecnou rovnici převedeme na středový tvar.

Středová rovnice elipsy je tvaru

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,$$

kde $S = [m, n]$ je střed elipsy a a, b jsou délky jejích poloos.

Příklad 3. $2x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$

Řešení: Obecnou rovnici převedeme na středový tvar.

$$2(x^2 + 2x) + (y^2 - 2y) + 2 = 0$$

Členy v závorkách převedeme na čtverec, tj. budeme je chtít ve tvaru $(x + c)^2,\ (y + d)^2,\ c, d \in \mathbb{R}$.

Příklad 3. $2x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$

Řešení: Obecnou rovnici převedeme na středový tvar.

$$2(x^2 + 2x) + (y^2 - 2y) + 2 = 0$$
$$2\left[(x+2)^2 - 1\right] + \left[(y-1)^2 - 1\right] + 2 = 0$$

$(x+c)^2 = x^2 + 2cx + c^2$. Prostřední člen v tomto vzorci, $2cx$, má být roven $2x$. Tedy $c = 1$. Máme $(x+1)^2$, abychom však neměnili hodnotu výrazu, musíme odečíst člen c^2, v našem případě 1. Podobně pro závorku obsahující y.

Příklad 3. $2x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$

Řešení: Obecnou rovnici převedeme na středový tvar.

$$2(x^2 + 2x) + (y^2 - 2y) + 2 = 0$$

$$2\left[(x+2)^2 - 1\right] + \left[(y-1)^2 - 1\right] + 2 = 0$$

$$2(x+1)^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$$

Roznásobili jsme závorky a sečetli konstanty.

Příklad 3. $2x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$

Řešení: Obecnou rovnici převedeme na středový tvar.

$$2(x^2 + 2x) + (y^2 - 2y) + 2 = 0$$

$$2\left[(x+2)^2 - 1\right] + \left[(y-1)^2 - 1\right] + 2 = 0$$

$$2(x+1)^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$$

$$\frac{(x+2)^2}{\frac{1}{2}} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1$$

Z vlastností koeficientů středové rovnice plyne, že tato elipsa má délku hlavní poloosy $\sqrt{1/2}$, hlavní poloosy 1 a střed v bodě $[-2, 1]$.