5. Základy teorie ODR

A. Diferenciální rovnice a související pojmy

Mnohé fyzikální a jiné zákony lze popsat pomocí rovnic, v nichž jako neznámá vystupuje funkce, přičemž tyto rovnice obsahují derivaci, příp. derivace neznámé funkce. Tyto rovnice se nazývají *diferenciální rovnice.*

Motivační příklad. Částka 1000 Kč se ročně úročí 10%. Na konci roku je pak na účtu částka 1100 Kč. Jestliže se úroky připisují půlročně, úročí se od poloviny roku částka 1050 Kč a na konci roku je na účtu částka 1102,50 Kč. Výpočet lze teoreticky stále zužovat: úročení probíhá čtvrtletně, měsíčně, týdně, denně atd. Vzniká tedy otázka, kolik činí výše částky na účtu po roce spojitého úročení (tj. za předpokladu, že částka je úročena nepřetržitě).

Nechť $y(t)$ vyjadřuje výši částky v čase t, přičemž hodnota závisle proměnné y je udávána v korunách a hodnota nezávisle proměnné t v rocích. Uvažujeme-li nejprve roční úročení, pak výše částky v libovolném čase $t \geq 1$ lze určit jako řešení rovnice

$$y(t+1) = y(t) + \frac{y(t)}{10}, \qquad t \geq 1,$$

přičemž hodnota $y(t)$ v čase $t \in \langle 0, 1)$ je dána počátečním vkladem, tedy $y(t) = 1000$ pro tato t. Odtud snadno ověříme, že $y(1) = y(0) + 0.1y(0) = 1100$. Jsou-li úroky připisovány půlročně, pak výši částky $y(t)$ v libovolném čase $t \geq 1/2$ určíme jako řešení rovnice

$$y(t+\frac{1}{2}) = y(t) + \frac{y(t)}{20}, \qquad t \geq \frac{1}{2},$$

přičemž $y(t) = 1000$ pro $t \in \langle 0, 1/2)$. Odtud tedy $y(1) = 1102,50$. Označme nyní h délku časového úseku (v rocích), po jehož uplynutí dochází k opětnému připisování úroků (v předcházejících úvahách jsme volili $h = 1$ a $h = 1/2$). Pak hodnotu $y(t)$ v libovolném čase $t \geq h$ určíme jako řešení rovnice

$$y(t+h) = y(t) + \frac{y(t)}{10}h \quad \Longrightarrow \quad \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \frac{y(t)}{10}, \qquad t \geq h. \tag{5.1}$$

přičemž $y(t) = 1000$ pro $t \in \langle 0, h)$. Při spojitém úročení je nyní třeba provést limitní přechod pro $h \to 0$ (formálně vzato, jedná se o limitu zprava; je ale snadné ověřit, že vztah (5.30) má smysl i pro záporná h). Tím podle definice derivace rovnice (5.30) nabývá tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{y(t)}{10}, \qquad t \geq 0, \tag{5.2}$$

přičemž $y(t) = 1000$ pro $t = 0$. Rovnice (5.31) je rovnicí, v níž jako neznámá vystupuje funkce $y(t)$ a tato rovnice obsahuje derivaci funkce $y(t)$. Jedná se tedy o rovnici diferenciální (na rozdíl od vztahu (5.30), který není diferenciální rovnicí pro žádné $h > 0$). Později uvidíme, že jediným řešením rovnice (5.31) vyhovujícím podmínce $y(0) = 1000$ je funkce

$$y(t) = 1000\,\mathrm{e}^{t/10}\,.$$

Odtud tedy plyne, že výše částky (v korunách) po roce spojitého úročení činí $y(1) = 1105,17$.

Definice 5.1. a) *Obyčejnou diferenciální rovnicí* (ODR) nazýváme rovnici, v níž se vyskytuje (či vyskytují) derivace hledané funkce jedné proměnné.

b) *Parciální diferenciální rovnicí* (PDR) nazýváme rovnici, v níž se vyskytují parciální derivace hledané funkce dvou nebo více proměnných.

c) *Řádem* diferenciální rovnice nazýváme největší řád derivace hledané funkce v uvažované diferenciální rovnici.

d) Diferenciální rovnici (ODR či PDR) nazýváme *lineární*, je-li tato rovnice lineární vzhledem ke hledané funkci i její derivaci (případně derivacím). Zkratky: LODR, LPDR.

e) Označení ODR1 (či LODR1) značí obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu (či LODR prvního řádu). Zkratky ODRn a LODRn značí ODR a LODRn-tého řádu. V podobném smyslu užíváme zkratky PDR1, PDRn, LPDR1, LPDRn.

V další části se budeme výhradně zabývat obyčejnými diferenciálními rovnicemi (přívlastek obyčejné budeme zpravidla vynechávat).

Výše odvozená diferenciální rovnice

$$y'(x) = \frac{y(x)}{10} \tag{5.3}$$

(nezávisle proměnnou nyní značíme x) je příkladem LODR1. Tuto rovnici budeme stručně zapisovat ve tvaru $y' = y/10$ (proměnnou x u neznámé funkce y tedy nebudeme vypisovat).

Linearitu této rovnice porušíme, uvažujeme-li na pravé straně výraz, který není lineární vzhledem k y; příkladem nelineární ODR1 je tedy např. rovnice

$$y' = \frac{y^2}{10} + x, \qquad \text{příp.} \qquad y' = \frac{\sin y}{10} + x.$$

Podobně rovnice

$$y'' = xy$$

je příkladem LODR2, zatímco podobná rovnice (druhého řádu)

$$y'' = x\sqrt{y}$$

již lineární není.

Výše uvedené rovnice mají explicitně vyjádřenu derivaci y nejvyššího řádu; říkáme, že tyto rovnice jsou dány v tzv. *normálním tvaru.* Užitím vztahu $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ lze každou ODR1 v normálním tvaru přepsat pomocí diferenciálů; tento tvar pak nazýváme *diferenciálním.* Rovnice (5.3) v diferenciálním tvaru tedy je

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{10}.$$

Dále se budeme výhradně zabývat obyčejnými diferenciálními rovnicemi (přívlastek obyčejné zde budeme zpravidla vynechávat).

Užití ODR. Diferenciální rovnice mají zásadní význam při řešení mnohých problémů fyzikálních, technických a inženýrských. Bez diferenciálních rovnic by nebylo možné provádět různé výpočty související s pružností a pevností materiálu, s řízením složitých jaderných reakcí, s lety do vesmíru apod. V dalším textu se omezíme pouze na modelové příklady, jejichž hlavním účelem bude ilustrovat probíranou látku a motivovat zavedení dalších pojmů.

Rovnice (5.3) jako matematický model problému spojitého úročení je příkladem tzv. Malthusovy rovnice $y' = ky$, kde $k \neq 0$ je reálná konstanta. K sestavení této rovnice vede následující úvaha: Nechť $y = y(t)$ vyjadřuje množství dané veličiny v čase t. Za předpokladu, že okamžitá změna (přírůstek či úbytek) y je v každém okamžiku úměrná hodnotě y, pak dostáváme právě Malthusovu rovnici. Je snadné si rozmyslet, že na tuto rovnici vede (po provedení potřebných zjednodušení) řada dalších problémů, jako např. populační problém. Všechny tyto problémy mají společné to, že k jejich jednoznačnému vyřešení Malthusova rovnice nestačí. Je třeba ještě dodat informaci o hodnotě y v některém pevném časovém okamžiku (nejčastěji se jedná o časový počátek; pak tedy předepisujeme počáteční stav – viz informace o počátečním stavu účtu v problému spojitého úročení).

Jiným významným příkladem je rovnice

$$m\ddot{y} = F(t, y, \dot{y})$$

představující matematické vyjádření druhého Newtonova zákona pro pohyb hmotného bodu o hmotnosti m po ose y. Je to ODR2 pro hledanou funkci $y = y(t)$, která vyjadřuje polohu hmotného bodu na ose y. Druhá derivace $\mathrm{d}^2x/\,\mathrm{d}t^2$ má fyzikální význam zrychlení hmotného bodu; daná funkce F vyjadřuje výslednou vnější sílu, která působí na hmotný bod.

Nechť na tento bod působí např. síla F úměrná výchylce y z rovnovážné polohy a působící proti směru výchylky (ostatní síly jako je tření či gravitace neuvažujeme). Pak $F = -ky$, kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti, a pohyb hmotného bodu je tedy popsán diferenciální rovnicí

$$m\ddot{y} = -ky,$$

nebo-li

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \qquad \omega^2 = \frac{k}{m} > 0. \tag{5.4}$$

Později uvidíme, že každé řešení rovnice (5.4) lze psát ve tvaru

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \,, \tag{5.5}$$

kde C_1, C_2 jsou obecné konstanty. Konkrétní volbou dvojic C_1, C_2 dostaneme jednotlivá řešení (5.4). O tom, že se jedná skutečně o řešení, se snadno přesvědčíme dosazením (5.5) do (5.4); v tomto smyslu také zavedeme za chvíli pojem řešení ODR.

V aplikacích nás vždy zajímá pohyb za konkrétních podmínek. Např. bod vychýlíme do vzdálenosti y_0 od klidové polohy (y_0 má zápornou hodnotu, vychýlíme-li bod dolů) a pustíme. V okamžiku puštění kuličky začneme odčítat čas. Realizovali jsme tak tyto dvě *počáteční podmínky*:

$$x(0) = x_0 \,, \quad \dot{x}(0) = 0 \,, \tag{5.6}$$

kde $\dot{x}$ má fyzikální význam rychlosti.

Vypočteme hodnoty konstant C_1, C_2 z (5.4) pro případ (5.6). Platí

$$x_0 = x(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1 \,,$$

$$0 = \dot{x}(0) = -C_1 \omega \sin 0 + C_2 \omega \cos 0 = C_2 \omega \,;$$

tedy $C_1 = x_0$, $C_2 = 0$ a odtud

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \,. \tag{5.7}$$

Uvedené dvě počáteční podmínky tedy již hledané řešení (a tím i pohyb hmotného bodu) určili vztahem (5.5) jednoznačně.

V souladu s uvedenými příklady budeme dále uvažovat ODRn v normálním tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{5.8}$$

kde f je reálná funkce definovaná na $(n+1)$-rozměrné oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, a pro tuto rovnici zavedeme některé související pojmy.

Definice 5.2. (Pojem řešení ODR)

a) *Řešením* rovnice (5.8) nazýváme každou n-krát spojitě derivovatelnou funkci na nějakém intervalu I, která vyhovuje dané rovnici, takže po dosazení této funkce a jejích derivací do dané rovnice dostaneme na intervalu I identickou rovnost.

b) ODR budeme považovat za vyřešenou, budeme-li znát všechna její řešení.

c) Křivku, která znázorňuje některé řešení dané ODR, nazýváme *integrální křivkou* diferenciální rovnice. Samotné řešení nazýváme také *integrálem* diferenciální rovnice.

Poznamenejme, že pokud definiční obor řešení dané rovnice nebude dopředu stanoven, budeme obvykle hledat řešení definovaná na maximálním možném intervalu (tato řešení se nazývají *maximální*; my budeme tento přívlastek vynechávat).

Definice 5.3. (Počáteční podmínky a počáteční problém) Mějme dán libovolný, ale pevně daný bod $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \Omega$. Úloha určit řešení rovnice (5.8), které vyhovuje n *počátečním podmínkám*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \,, \tag{5.9}$$

se nazývá *počáteční problém* (nebo také *Cauchyho úloha*). Původ názvu počátečních podmínek (a tedy i počátečního problému) plyne z toho, že se nejčastěji předepisují v bodě, který reprezentuje časový počátek.

Speciálně počáteční problém pro ODR1 je tvaru

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

a pro ODR2 pak

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1.$$

Definice 5.4. (Okrajové podmínky a okrajový problém) Tento problém se uvažuje zejména v případě ODR2, kdy nezávisle proměnná x má význam délky. Jde o úlohu určit řešení rovnice

$$y'' = f(x, y, y')$$

splňující tzv. *okrajové podmínky*, které mohou být např. tvaru

$$y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta$$

nebo

$$y'(a) = \gamma, \qquad y'(b) = \delta,$$

kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou dané hodnoty a a, b jsou koncové body intervalu I, ve kterém hledáme řešení ODR2.

Definice 5.5. (Druhy řešení ODR)

a) *Obecným řešením* rovnice (5.8) budeme rozumět každou funkci závisející na n obecných parametrech $C_1, \dots, C_n$ takových, že speciální (přípustnou) volbou $C_1, \dots, C_n$ lze získat řešení každého počátečního problému (5.8), (5.9).

b) *Partikulární řešení* ODRn je takové řešení ODRn, které obdržíme z obecného řešení pevnou volbou konstant $C_1, \dots, C_n$.

c) *Výjimečné (singulární) řešení* je řešení ODRn, které nelze získat z obecného řešení žádnou volbou hodnot $C_1, \dots, C_n$.

Uvedené pojmy ilustrujme na příkladu rovnice (5.4). Jejím obecným řešením je funkce (5.5). Dosazením počátečních podmínek (5.6) do obecného řešení jsme získali partikulární řešení (5.7). Výjimečné řešení rovnice (5.4) nemá.

Geometrický význam ODR Diferenciální rovnice prvního řádu

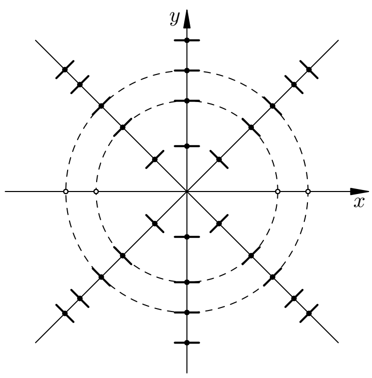
$$y' = f(x, y) \tag{5.10}$$

přiřazuje každému bodu (x, y) definičního oboru Ω funkce f směrnici y' příslušného řešení. Tím je v Ω dáno pole směrů, tzv. *směrové pole*. Toto směrové pole lze graficky znázornit tak, že zakreslíme dostatečně „mnoho“ bodů $(x, y) \in \Omega$ a tečny příslušných integrálních křivek o směrnicích $f(x, y)$ vyznačíme „krátkými“ úsečkami. Z geometrického hlediska řešit diferenciální rovnici (5.8) znamená „vepsat“ do daného směrového pole křivky tak, aby jejich tečny dané směrové pole „respektovaly“.

U rovnice druhého řádu je každému bodu (x, y) a směru y' přiřazena hodnota druhé derivace (tím je tedy předepsána křivost hledané integrální křivky). Rovnice vyššího řádu již nemají tak jednoduchou geometrickou interpretaci.

Příklad 5.6. Sestrojme směrové pole diferenciální rovnice $y' = -x/y$.

Řešení. Funkce $f(x, y) = -x/y$ je definována pro všechna reálná x a y s výjimkou bodů ležících na ose x. Položíme-li $y' = k$, kde $k \in \mathbb{R}$, obdržíme otevřené polopřímky $x = -ky$ $(y \neq 0)$. Jsou to křivky, v jejichž bodech je danou rovnicí předepsána táž hodnota směrnice $y' = k$; říká se jim *izokliny*. Pomocí izoklin pak snadno vidíme, že směrové pole dané rovnice má tvar znázorněný na obr. 5.1.



Obr. 5.1: Izokliny a směrové pole rovnice $y' = -x/y$

Odtud také plyne, že v horní polorovině jsou integrálními křivkami půlkružnice $y = \sqrt{C - x^2}$, zatímco v dolní polorovině to jsou půlkružnice $y = -\sqrt{C - x^2}$, kde $C \in \mathbb{R}^+$.

B. Některé typy ODR1

V této kapitole uvedeme několik základních typů ODR1, jejichž řešení lze nalézt v tzv. uzavřeném tvaru. Seznámíme se přitom s metodami umožňujícími vyjádření přesného řešení dané rovnice, a to po konečném počtu kroků.

B1. ODR1 se separovanými proměnnými

Je tvaru

$$y' = g(x)h(y)\,, \tag{5.11}$$

kde g, h jsou funkce jedné proměnné. Platí

Věta 5.7. Nechť funkce g, resp. h je definovaná a spojitá na intervalu (a, b), resp. (c, d) a nechť pro každé $y \in (c, d)$ je $h(y) \neq 0$. Dále nechť $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$ jsou libovolné body. Pak má počáteční problém

$$y' = g(x)h(y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{5.12}$$

řešení definované na nějakém intervalu I. Toto řešení je určeno implicitně vzorcem

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)} = \int_{x_0}^{x} g(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{pro každé } x \in I. \tag{5.13}$$

Praktický postup. Za předpokladů uvedených v předcházejícím tvrzení je řešení počátečního problému (5.12) dáno implicitně vztahem (5.12). Vztah

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x + C, \qquad C \in \mathbb{R} \tag{5.14}$$

je tedy obecným řešením rovnice (5.11). Mnemotechnicky si vzorec (5.14) můžeme zapamatovat takto: V rovnici (5.11) místo y' napíšeme $\mathrm{d}y\big/\mathrm{d}x$ a provedeme tzv. *separaci proměnných.* Výrazy s proměnnými x, resp. y od sebe oddělíme na obou stranách rovnice. Tím obdržíme formální rovnost

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obě strany rovnosti „integrujeme“ a na pravou stranu připíšeme integrační konstantu, čímž obdržíme vzorec (5.14).

Příklad 5.8. Určeme všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{1}{x}(2y + 1). \tag{5.15}$$

Řešení. Zvolíme postup popsaný v předcházející poznámce. Předpoklad $x \neq 0$, $2y + 1 \neq 0$ rozdělí rovinu na čtyři oblasti:

$$\Omega_1 = (0, \infty) \times (-1/2, \infty), \qquad \Omega_2 = (-\infty, 0) \times (-1/2, \infty),$$
$$\Omega_3 = (-\infty, 0) \times (-\infty, -1/2), \qquad \Omega_4 = (0, \infty) \times (-\infty, -1/2)\,.$$

Ve všech těchto oblastech postupně dostáváme:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{x}(2y+1), \\
\frac{\mathrm{d}y}{2y+1} &= \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{2y+1} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\
\frac{1}{2}\ln|2y+1| &= \ln|x| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Z tohoto tvaru lze hledanou funkci y vyjádřit explicitně na levé straně, čímž se získaný výsledek značně zpřehlední. Než tak učiníme, zapíšeme obecnou konstantu C_1 ve tvaru $(1/2)\ln|C|$, $C \neq 0$, což nám umožní jednoduše upravit výsledek.

Odlogaritmováním a úpravou vztahu

$$
\frac{1}{2}\ln|2y+1| = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|C|, \qquad C \in \mathbb{R} - \{0\}
$$

dostáváme

$$
|2y+1| = |C|x^2, \qquad C \in \mathbb{R} - \{0\}\,.
$$

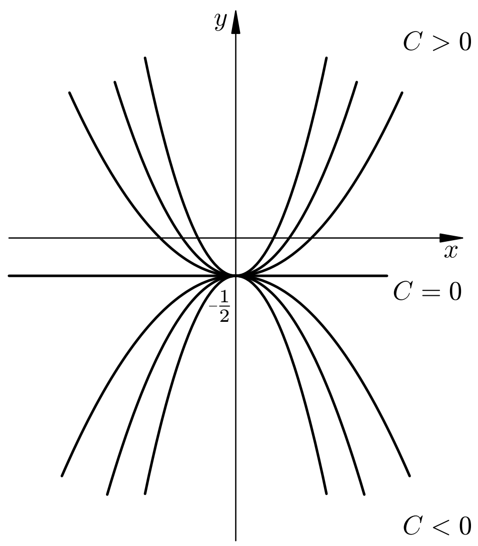
Nyní přistoupíme k odstranění absolutních hodnot. V oblastech Ω_1 a Ω_2 platí $2y+1 = Cx^2$, $C > 0$ a v oblastech Ω_3, Ω_4 pak $2y+1 = Cx^2$, $C < 0$. Dohromady tedy na uvedených oblastech platí

$$
2y+1 = Cx^2, \qquad C \in \mathbb{R} - \{0\}\,. \tag{5.16}
$$

Nyní posoudíme případ $2y+1 = 0$ (tj. $y = -1/2$). Dosazením do rovnice (5.15) snadno vidíme, že tato konstantní funkce je také řešením. Protože toto řešení lze obdržet ze vztahu (5.16) volbou $C = 0$, všechna řešení rovnice (5.15) jsou tvaru

$$
y = Cx^2 - \frac{1}{2}, \qquad C \in \mathbb{R}\,,
$$

kde místo $C/2$ píšeme C. Tato řešení, která tvoří současně obecné řešení dané rovnice, představují jednoparametrickou soustavu parabol znázorněnou na obr. 5.2.



Obr. 5.2: Obecné řešení tvoří jednoparametrická soustava parabol

Všimněme si, že každým bodem roviny, s výjimkou bodů ležících na ose y, prochází právě jedna integrální křivka obecného řešení. Jinak vyjádřeno, předepíšeme-li těmito body počáteční podmínku, bude mít odpovídající počáteční problém právě jedno řešení.

B2. Lineární ODR1

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu má obvykle tvar

$$y' = a(x)y + f(x)\,. \tag{5.17}$$

Je-li $f(x) = 0$ pro všechna uvažovaná x, pak hovoříme o *homogenní* LODR1; v opačném případě se jedná o *nehomogenní* LODR1.

Předpokládejme dále, že funkce $a(x)$, $f(x)$ jsou spojité na intervalu I. Uvedeme nejobvyklejší metodu řešení rovnice (5.17), tzv. *metodu variace konstanty.* Řešení probíhá ve dvou krocích.

I. Řešíme nejprve přidruženou homogenní LODR1 ve tvaru

$$y' = a(x)y, \tag{5.18}$$

v níž můžeme za předpokladu $y \neq 0$ separovat proměnné. Výše popsanou metodou separace proměnných lze určit obecné řešení y_h rovnice (5.18) ve tvaru

$$y_h = Cv(x), \qquad \text{kde } v(x) = \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,, \qquad C \in \mathbb{R}$$

(volba $C = 0$ zahrnuje vyloučený případ $y = 0$, který je rovněž řešením (5.18)).

II. Řešení původní nehomogenní rovnice (5.17) hledáme ve stejném tvaru, ale C již není číselná konstanta, nýbrž funkce proměnné x (odtud je také název metody):

$$y = C(x)v(x) \qquad C(x) = ? \tag{5.19}$$

Obecné řešení nehomogenní LODR1 se tedy liší od obecného řešení homogenní LODR1 jen tím, že místo konstanty C nastoupí vhodná (zatím neurčená) funkce $C(x)$. Tu určíme tak, že vztah (5.19) dosadíme do původní rovnice (5.17). Odtud po úpravě máme

$$C'(x)v(x) = f(x)\,. \tag{5.20}$$

Protože $v(x) > 0$, lze rovnici (5.20) dělit $v(x)$, takže

$$C(x) = \int \frac{f(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x + C = \int f(x)\,\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\,,$$

kde C je obecná konstanta. Dosazením $C(x)$ do vztahu (5.19) dostáváme obecné řešení lineární rovnice (5.17), zahrnující všechna řešení této rovnice. Toto řešení je přitom definováno na intervalu I, tedy všude tam, kde jsou funkce $a(x)$, $f(x)$ spojité.

Příklad 5.9. Nalezněme řešení počátečního problému

$$y' = \frac{1}{x}(2y+1), \qquad y(1) = 0.$$

Řešení. Daná rovnice již byla rozřešena v oddíle B1 jako rovnice se separovanými proměnnými. Současně je však i rovnicí lineární, neboť lze psát ve tvaru

$$y' = \frac{2}{x}y + \frac{1}{x} \qquad \text{tj. } a(x) = \frac{2}{x},\ f(x) = \frac{1}{x}\,. \tag{5.21}$$

Ilustrujme proto při řešení této rovnice také metodu variace konstanty:

I. Nejprve nalezneme obecné řešení přidružené homogenní rovnice

$$y' = \frac{2}{x}y.$$

Separací proměnných dostáváme pro $x \neq 0$ a $y \neq 0$

$$y_h = Cx^2, \qquad C \in \mathbb{R},$$

kde volba parametru $C = 0$ zahrnuje i nulové řešení $y_h = 0$.

II. Metodou variace konstanty hledejme obecné řešení rovnice (5.21) ve tvaru

$$y = C(x)x^2, \qquad C(x) = ?$$

Neznámou funkci $C(x)$ určíme dosazením tohoto vztahu do (5.21):

$$C'(x)x^2 + C(x)2x = \frac{2}{x}C(x)x^2 + \frac{1}{x}, \qquad \text{tj.} \qquad C'(x) = \frac{1}{x^3}.$$

Odtud pak integrací dostáváme

$$C(x) = \int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{-3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C,$$

kde C je obecná konstanta. Zpětným dosazením $C(x)$ máme

$$y = (-\frac{1}{2x^2} + C)x^2 = Cx^2 - \frac{1}{2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li nyní počáteční podmínku do obecného řešení, máme $C = 1/2$, a řešení daného počátečního problému je tedy tvaru

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 1), \qquad x \in (0, \infty).$$

Následující dva typy lze převést vhodnou substitucí na rovnici se separovanými proměnnými, resp. rovnici lineární.

B3. ODR1 tvaru y'=f(y/x)

Rovnici

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.22}$$

lze snadno převést substitucí

$$y(x) = u(x)x \qquad \text{(stručně: } y = ux) \tag{5.23}$$

na ODR1 se separovanými proměnnými. Vskutku, ze substituce (5.23) plyne $y' = u'x + u$, takže rovnice (5.22) přejde v rovnici

$$u'x + u = f(u), \qquad \text{neboli} \qquad u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)\,,$$

což je ODR1 se separovanými proměnnými.

Odtud tedy dále pro $x \neq 0$ a $f(u) \neq u$ dostaneme rovnici v diferenciálním tvaru

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}\,.$$

Její obecný integrál vyjadřuje vztah mezi proměnnými x a u. Ze vztahu (5.23) plyne $u = y/x$. Užitím tohoto vztahu v obecném integrálu dostaneme obecné řešení v x a y.

Příklad 5.10. Nalezněme všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}. \tag{5.24}$$

Řešení. Rovnici (5.24) nejprve převedeme na požadovaný tvar (předpokládáme přitom $x, y \neq 0$). Úpravou pravé strany obdržíme rovnici

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^{-1}\right).$$

Položíme proto $u = y/x$, tedy $y' = u'x + u$, a daná rovnice se transformuje na tvar

$$u'x + u = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$$

nebo-li za uvedeného předpokladu $x \neq 0$

$$u' = -\frac{1}{x}\frac{u^2+1}{2u}\,. \tag{5.25}$$

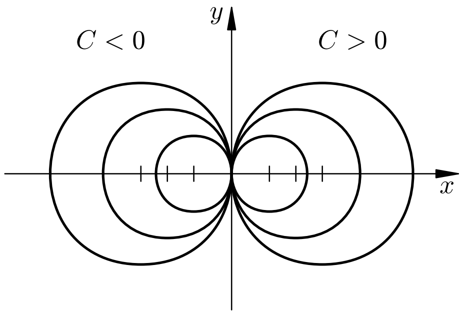
Po provedení separace proměnných, integraci a následné úpravě dostáváme obecné řešení rovnice (5.25) ve tvaru

$$u^2 = \frac{C}{x} - 1, \qquad C \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Zpětným dosazením substituce lze snadno určit obecné řešení rovnice (5.24) ve tvaru

$$x^2 + y^2 = Cx, \qquad C \in \mathbb{R} - \{0\}\,.$$

Obecné řešení tedy opět zahrnuje všechna řešení dané rovnice, a tvoří jednoparametrickou soustavou kružnic se středem v bodě $(C/2, 0)$ a poloměrem $C/2$.



Obr. 5.3: Obecné řešení tvoří jednoparamterická soustava kružnic

Z obr. 5.3 je rovněž patrné, že všemi body roviny, s výjimkou bodů ležících na souřadnicových osách, prochází právě jedna funkce z obecného řešení.

B4. Bernoulliova rovnice

Bernoulliova rovnice je tvaru

$$y' = a(x)y + f(x)y^r, \qquad r \in \mathbb{R}. \tag{5.26}$$

Poznamenejme, že v případě $r = 0$ nebo $r = 1$ je daná rovnice lineární, a proto budeme předpokládat $r \neq 0$, $r \neq 1$. Nechť dále funkce $a(x)$, $f(x)$ jsou spojité v nějakém intervalu I. Ukážeme, že rovnici (5.26) lze substitucí

$$u(x) = y^{1-r}(x) \qquad \text{(stručně: } u = y^{1-r}\text{)}$$

převést na LODR1. Vskutku, za předpokladu $y \neq 0$ položíme $u = y^{1-r}$. Potom $u' = (1-r)y^{-r}y'$, takže Bernoulliova rovnice se transformuje na tvar

$$u' = (1-r)a(x)u + (1-r)f(x),$$

což je rovnice lineární. Tuto rovnici vyřešíme (viz oddíl B2) a z jejího obecného řešení pak prostřednictvím dané substituce získáme obecné řešení původní rovnice (5.26).

Kromě řešení, která dostaneme tímto postupem, má rovnice (5.26) pro $r > 0$ také řešení $y = 0$.

Příklad 5.11. Nalezněme řešení počátečního problému

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}, \qquad y(1) = 1\,.$$

Řešení. Daná rovnice již byla řešena v oddíle B3 pomocí substituce $u = y/x$. Lze ji však také upravit na tvar

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - xy^{-1}\right) \qquad \text{(tj. } a(x) = \frac{1}{2x},\ f(x) = -\frac{x}{2},\ r = -1\text{)} \tag{5.27}$$

a řešit ji jako Bernoulliovu rovnici substitucí $u = y^{1-r} = y^2$. Při dosazování substituce budeme postupovat tak, že rovnici (5.27) nejprve vydělíme faktorem $y^r = y^{-1}$ (tedy vynásobíme y) a poté do ní dosadíme $u = y^2$, resp. $u' = 2yy'$. Dostáváme

$$y'y = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{x} - x\right), \qquad \text{tedy} \qquad u' = \frac{u}{x} - x. \tag{5.28}$$

Tuto lineární rovnici vyřešíme metodou variace konstanty.

I. Přidruženou homogenní rovnici

$$u' = \frac{u}{x}$$

lze řešit separací proměnných, nebo další substitucí $v = u/x$. Oběma způsoby snadno zjistíme, že

$$u_h = Cx, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

II. Nechť

$$u = C(x)x, \qquad C(x) = ?$$

Dosazením do řešené lineární rovnice (5.28) máme

$$C'(x)x + C(x) = \frac{C(x)x}{x} - x, \qquad \text{tj.} \qquad C'(x) = -1.$$

Odtud $C(x) = -x + C$, a obecné řešení rovnice (5.28) je tedy tvaru

$$u = Cx - x^2, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

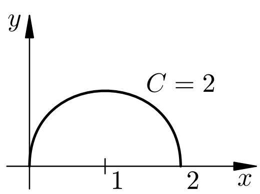
Zpětným dosazením substituce pak dostáváme

$$y^2 = Cx - x^2, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Dosazením počátečního bodu $(1, 1)$ do obecného řešení dostáváme $C = 2$. Protože znaménko funkce y je stejné jako znaménko y-ové souřadnice počátečního bodu, hledané partikulární řešení je funkce tvaru

$$y = \sqrt{2x - x^2}, \qquad x \in (0, 2)$$

znázorněná na obr. 5.4.



Obr. 5.4: Partikulární řešení

Rozmyslete si přitom, proč je uvedený interval otevřený, ačkoliv krajní body tohoto intervalu náleží do definičního oboru funkce y.

B5. Exaktní rovnice

Předpokládejme, že jsou dány funkce $P(x, y), Q(x, y)$, které jsou spojité i se svými prvními parciálními derivacemi v nějaké oblasti Ω. Exaktní rovnicí potom nazveme rovnici, kterou lze napsat ve tvaru

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0\,,$$

přičemž platí tzv. podmínka exaktnosti $P'_y(x,y) = Q'_x(x,y)$.

Věta 5.12. Podmínka exaktnosti je ekvivalentní s existencí kmenové funkce $\Phi(x,y)$ (potenciálu), jejíž totální diferenciál je levá strana rovnice $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ (Pfaffova forma). Řešení exaktní rovnice je dáno implicitně rovnicí

$$\Phi(x,y) = C\,.$$

Praktický postup při určení potenciálu. Protože levá strana rovnice je totálním diferenciálem hledané funkce Φ, platí $P = \Phi'_x$ a $Q = \Phi'_y$. Odtud naopak

$$\Phi(x,y) = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x + C(y)\,. \tag{5.29}$$

Zbývá určit funkci $C(y)$. Derivujme proto vztah (5.29) podle proměnné y, tj.

$$\Phi'_y(x,y) = \left[\int P(x,y)\,\mathrm{d}x + C(y)\right]'_y = \left[\int P(x,y)\,\mathrm{d}x\right]'_y + C'(y)\,.$$

Protože $\Phi'_y = Q$, dostáváme rovnost

$$\left[\int P(x,y)\,\mathrm{d}x\right]'_y + C'(y) = Q(x,y) \implies C'(y) = Q(x,y) - \left[\int P(x,y)\,\mathrm{d}x\right]'_y$$
$$\implies C(y) = \int \left(Q(x,y) - \left[\int P(x,y)\,\mathrm{d}x\right]'_y\right)\mathrm{d}y + K\,,$$

kde integrační konstantu K obvykle nepíšeme, protože ji lze zahrnout do konstanty C na pravé straně rovnice $\Phi(x,y) = C$. Poznamenejme ještě, že při určení kmenové funkce Φ jsme podobně mohli začít integrací funkce Q podle proměnné y a následně vzniklý výraz derivovat podle x.

Příklad 5.13. Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{\mathrm{e}^y}{2y - x\mathrm{e}^y}\,.$$

Řešení. Diferenciální tvar rovnice je

$$\underbrace{\mathrm{e}^y}_{P}\,\mathrm{d}x + \underbrace{(x\mathrm{e}^y - 2y)}_{Q}\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Ověřme nejprve podmínku exaktnosti. Platí $P'_y = \mathrm{e}^y$ a $Q'_x = \mathrm{e}^y$, tj. $P'_y = Q'_x$ v celé rovině $\mathbb{R}^2$. Hledejme nyní kmenovou funkci $\Phi(x,y)$.

$$\Phi = \int P\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^y x + C(y) \implies \Phi'_y = \mathrm{e}^y x + C'_y = \underbrace{x\mathrm{e}^y - 2y}_{Q}\,.$$

Odtud

$$C'(y) = -2y \implies C(y) = -y^2$$

a obecné řešení je dáno implicitně rovnicí

$$\mathrm{e}^y x - y^2 = C\,.$$

C. Existence a jednoznačnost řešení počátečního problému pro ODR1

Zabývejme se nyní otázkou, za jakých podmínek vůbec má daný počáteční problém řešení, případně, zda je toto řešení jediné. Uvažujme počáteční problém pro ODR1

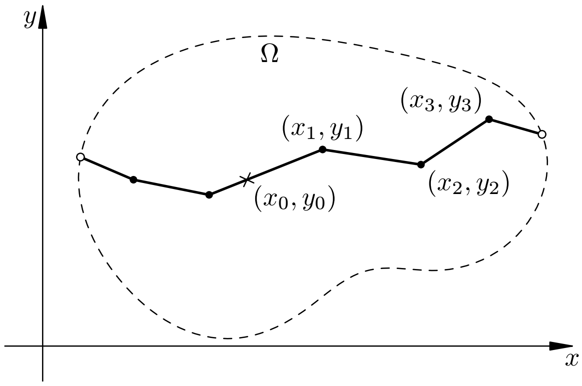
$$y' = f(x, y(x)) \tag{5.30}$$

$$y(x_0) = y_0 \,. \tag{5.31}$$

Věta 5.14. (Peanova) Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá v dvojrozměrné oblasti Ω obsahující ve svém vnitřku bod (x_0, y_0). Potom existuje alespoň jedno řešení počátečního problému (5.30), (5.31), které je definované a spojité v nějakém okolí bodu x_0.

Interpretujme volně základní myšlenku důkazu, neboť dává současně geometrický náhled, jak konstruovat alespoň přibližné řešení daného problému.

Uvažujme diferenciální rovnici (5.30) a počáteční podmínku (5.31). Z bodu (x_0, y_0) veďme přímku o směrnici $f(x_0, y_0)$. Na této přímce zvolme bod (x_1, y_1), kde $x_0 < x_1$ (viz obr. 1) a proložme jím přímku o směrnici $f(x_1, y_1)$. Na ní opět zvolme bod (x_2, y_2), kde $x_1 < x_2$, a celý postup opakujme. Získáme tak lomenou čáru, kterou bychom mohli analogicky prodloužit také nalevo od bodu (x_0, y_0). Budeme ji nazývat *Eulerovou lomenou čarou.*



Obr. 5.5: Eulerova lomenná čára

Z obrázku je zřejmé, že jsou-li úsečky obsažené v Eulerově lomené čáře dostatečně krátké, může tato čára být rozumnou aproximací hledané integrální křivky procházející bodem (x_0, y_0). Navíc lze sestrojit posloupnost Eulerových lomených čar, která „konverguje“ k hledané integrální křivce (pokud tato existuje).

Následující příklad nám ukáže, že předpoklad Peanovy věty sice zaručuje existenci řešení daného problému, nikoliv však jeho jednoznačnost.

Příklad 5.15. Dosazením se můžeme přesvědčit, že počáteční problém

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \qquad y(0) = 0$$

má řešení $y = 0$ a $y = x^3$ (řešení vyhovujících danému problému je ve skutečnosti nekonečně mnoho; k prokázání nejednoznačnosti stačí znát dvě různá řešení).

Věta 5.16. (Picardova) Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá v dvojrozměrné oblasti Ω obsahující ve svém vnitřku bod (x_0, y_0). Dále nechť má $f(x, y)$ v každém bodě Ω parciální derivaci $\partial f/\partial y$, která je na Ω ohraničená. Potom existuje jediné řešení počátečního problému (5.30), (5.31), které je definované a spojité v nějakém okolí bodu x_0.

Rovněž důkaz Picardovy věty je konstruktivní v tom smyslu, že udává konstrukci přibližného (v limitě přesného) řešení daného problému. Idea spočívá v zavedení posloupnosti funkcí (zvané posloupnost Picardových aproximací) tvaru

$$y_0(x) = y_0 \,,$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,\mathrm{d}t,$$
$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,\mathrm{d}t,$$
$$\dots$$
$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t,$$
$$\dots$$

O této posloupnosti je pak třeba dokázat, že pro $n \to \infty$ stejnoměrně konverguje k hledanému řešení, přičemž toto řešení je určeno jednoznačně.

Funkce $f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ z předcházejícího příkladu je spojitá v jakékoliv oblasti obsahující bod $(0, 0)$, a proto řešení daného problému existuje. V žádném okolí tohoto bodu však není derivace $\partial f/\partial y = 2/y^{1/3}$ ohraničená, a proto také není zaručena (a v našem příkladě ani splněna) jednoznačnost řešení.

Poznámka 5.17. Picardova věta i Peanova věta mají lokální charakter. Existence řešení je totiž zaručena pouze v nějakém okolí bodu x_0. Pro ilustraci této skutečnosti uvažujme počáteční problém

$$y' = 1 + y^2, \qquad y(0) = 0.$$

Tento problém má podle Picardovy věty jednoznačně určené řešení, neboť

$$f(x, y) = 1 + y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

jsou spojité funkce pro všechna reálná x a všechna reálná y. Neplyne však odtud, že toto řešení existuje také pro všechna reálná x. Separací proměnných se lze snadno přesvědčit, že jediným řešením tohoto problému je funkce $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Ke stanovení odhadu velikosti intervalu, na němž je řešení definováno, lze užít následujícího vztahu: Nechť obě podmínky Picardovy věty (f spojitá, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ohraničená) jsou splněny v obdélníku

$$D = \{(x, y) : \; x_0 - a \le x \le x_0 + a,\; y_0 - b \le y \le y_0 + b\}$$

a označme $M := \max\{|f(x, y)|, \,(x, y) \in D\}$. Pak hledané řešení je definované a spojité alespoň v intervalu $< x_0 - \delta, x_0 + \delta >$, kde

$$\delta = \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

D. Základy numerického řešení počátečních problémů pro ODR1

V inženýrské praxi se často setkáváme s diferenciálními rovnicemi, které nelze řešit analyticky. Jedním z nejjednodušších typů takové rovnice je tzv. Riccatiova diferenciální rovnice

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + f(x)$$

(tedy rovnice, jejíž pravá strana je kvadratickou funkcí y). V této souvislosti nabývají na významu *numerické metody* řešení. V tomto oddíle se stručně seznámíme se základní myšlenkou numerického řešení počátečního problému (5.30), (5.31).

Při numerickém řešení tohoto problému hledáme přibližné hodnoty neznámé funkce y ve zvolených bodech nějakého konečného intervalu $\langle x_0, a \rangle$. Tento interval rozdělíme na n stejně velkých dílků délky $h = a/n$ body

$$x_0 = x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \dots, \quad x_i = x_0 + ih, \dots, \quad x_n = a.$$

Body x_i budeme nazývat *uzly* a vzdálenost h dvou sousedních uzlů nazveme *krokem*. Hodnotu přesného řešení v uzlu x_i vyjadřuje symbol $y(x_i)$ a hodnotu přibližného řešení v uzlu x_i označíme Y_i. Jestliže se nám podaří najít přibližné řešení Y_i, kde $i = 0, 1, \ldots, n$, pak lze vypočítat přibližnou hodnotu řešení $y(x)$ v libovolném bodě $x \in \langle x_0, a \rangle$ např. interpolací.

Odvození jednotlivých numerických formulí spočívá nejčastěji buď v přibližné náhradě derivace $y'(x)$ v jednotlivých uzlech x_i (např. pomocí diferenčního podílu), nebo v integraci rovnice (5.30) a následné přibližné náhradě vzniklého integrálu. Další možný přístup je založen na rozvoji hledaného řešení $y(x)$ v mocninnou (Taylorovu) řadu se středem v bodě x_0 a následném výpočtu příslušných koeficientů $a_k = y^{(k)}(x_0)/k!$.

V dalším využijeme postup založený na integraci řešené rovnice a přibližné náhradě integrálu.

D1. Jednokrokové metody

Jestliže rovnici (5.30) zintegrujeme v intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$, dostaneme

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x,$$

takže

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x. \tag{5.32}$$

Jednotlivé numerické metody se nyní liší způsobem přibližného výpočtu integrálu na pravé straně (5.32).

Explicitní Eulerova metoda. Provedeme náhradu

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x \approx h f(x_i, y(x_i))$$

(v numerické matematice se tento typ náhrady nazývá obdélníková formule s uzlovým levým krajním bodem). Dosadíme-li tento vztah do (5.32), obdržíme vyjádření

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + h f(x_i, y(x_i))\,. \tag{5.33}$$

Tento vztah je však nepoužitelný, protože neznáme hodnotu $y(x_i)$. Proto zaměníme výrazy $y(x_i)$, $y(x_{i+1})$ ve formuli (5.33) jejich přibližnými hodnotami Y_i, Y_{i+1} a znaménko přibližné rovnosti $\approx$ nahradíme definitoricky znaménkem rovnosti. Vztah (5.33) pak nabude tvaru

$$Y_{i+1} = Y_i + h f(x_i, Y_i)\,. \tag{5.34}$$

Tento vztah je *jednokroková* numerická formule pro výpočet Y_{i+1} (neboť k výpočtu Y_{i+1} potřebujeme znát pouze hodnotu jedné předcházející aproximace Y_i). Protože známe Y_0 (můžeme totiž položit $Y_0 = y_0$), lze postupně pomocí (5.34) vypočítat hodnoty $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. V této souvislosti ještě zdůrazněme, že aproximace Y_{i+1} je vyjádřena na levé straně formule (5.34) explicitně (není již obsažena na pravé straně), což usnadňuje výpočet. Metody s touto vlastností se nazývají *explicitní*.

Protože právě uvedený postup je spojován se jménem L. Eulera (z geometrického hlediska je metoda založena na konstrukci Eulerových lomených čar), tvoří předpis (5.34) základ tzv. *explicitní Eulerovy metody*.

Vztah (5.34) jsme získali heuristicky; je nutno zdůvodnit, že přibližné hodnoty $Y_1, \ldots, Y_n$ jsou rozumnou aproximací přesných hodnot $y(x_1), \ldots, y(x_n)$. Bez důkazu uveďme, že řešíme-li pomocí formule (5.34) s dostatečně malým krokem h konkrétní počáteční problém (5.30), (5.31), pak existuje konstanta $K > 0$, nezávislá na h, taková, že

$$|y(x_i) - Y_i| \le Kh, \qquad i = 1, \ldots, n\,. \tag{5.35}$$

Výraz $y(x_i) - Y_i$ představuje tzv. *globální chybu* aproximace Y_i. Přívlastek globální zde znamená, že do této chyby se promítají nepřesnosti způsobené přibližným výpočtem všech předcházejících hodnot $Y_1, \ldots, Y_{i-1}$. Numerické metody s odhadem globální chyby tvaru (5.35) se nazývají metody *1. řádu* přesnosti, a to podle první mocniny kroku h uvedené ve vztahu (5.35). Z tohoto vztahu rovněž plyne, že blíží-li se délka kroku k nule, pak se přibližné hodnoty řešení v uzlech x_i blíží k přesným hodnotám; jinak vyjádřeno, uvedená metoda *konverguje*.

Implicitní Eulerova metoda. Nyní se vrátíme zpět ke vztahu (5.32), z něhož jsme pomocí náhrady integrálu obdélníkovou formulí s uzlovým levým koncovým bodem odvodili explicitní Eulerovu metodu. Provedeme-li náhradu obdélníkovou formulí s pravým koncovým bodem, tj.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x \approx h f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))\,,$$

obdržíme analogickým postupem *implicitní Eulerovu metodu*

$$Y_{i+1} = Y_i + hf(x_{i+1}, Y_{i+1}), \tag{5.36}$$

kde $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Hledaná aproximace Y_{i+1} se tedy vyskytuje i na pravé straně (5.36), a k jejímu určení je třeba řešit obecně nelineární rovnici pro Y_{i+1}. Lze ukázat, že tato metoda je opět prvního řádu přesnosti, tj. platí vztah (5.35).

Komplikace, způsobená obtížemi při určování Y_{i+1} ze vztahu (5.36) je vyvážena několika přednostmi. V následující poznámce zmíníme nejvýznamnější z nich.

Stabilita implicitní formule. Uvažujme počáteční problém

$$y' = \lambda y \quad (\lambda < 0), \quad y(0) = 1. \tag{5.37}$$

Jeho přesné řešení je tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Je proto přirozené požadovat

$$Y_i > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots. \tag{5.38}$$

Explicitní Eulerova formule aplikovaná na (5.37) dává

$$Y_{i+1} = Y_i + h\lambda Y_i = Y_i(1 - |\lambda|h).$$

Z požadavku (5.38) v tomto případě plyne (je totiž $Y_0 = 1 > 0$)

$$1 - |\lambda|h > 0, \quad \text{tj.} \quad h < \frac{1}{|\lambda|}\,. \tag{5.39}$$

Jestliže $|\lambda| \gg 1$, je podmínka (5.39) značným omezením na délku kroku h.

V případě implicitní Eulerovy formule platí

$$Y_{i+1} = Y_i + h\lambda Y_{i+1} = Y_i - h|\lambda|Y_{i+1},$$

takže

$$Y_{i+1} = \frac{Y_i}{1 + |\lambda|h}.$$

Protože $Y_0 = 1$, je požadavek (5.38) splněn bez jakéhokoliv omezení na délku kroku h.

Na řešení modelové úlohy (5.37) jsme ukázali, že explicitní Eulerova metoda je *podmíněně stabilní*, neboť v některých případech dává rozumné výsledky jen pro velmi malá h. Naopak implicitní Eulerova metoda je *bezpodmínečně stabilní*, tj. umožňuje řešit modelovou úlohu (5.37) bez omezení délky kroku h. Obecněji lze ukázat, že všechny bezpodmínečně stabilní metody jsou metody implicitní.

Modifikace Eulerovy metody. Eulerova metoda, popsaná v předcházející části, je metoda jednoduchá, avšak málo efektivní. Pro dosažení rozumné přesnosti je nutné volit (a to u explicitní i implicitní formule) malý krok, tedy velký objem výpočtů. Naznačíme proto způsob, jak lze např. explicitní Eulerovu metodu zpřesnit.

Vyjděme opět ze vztahu (5.32). Jestliže integrál na pravé straně nahradíme vztahem

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}[f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))]$$

(nazývaným lichoběžníková formule) a tuto náhradu dosadíme do (5.32), pak je tato úvaha základem tzv. *lichoběžníkové metody*

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, Y_i) + f(x_{i+1}, Y_{i+1})]\,. \tag{5.40}$$

Tuto implicitní metodu lze zapsat v explicitním tvaru, nahradíme-li hodnotu Y_{i+1} na pravé straně (5.40) pomocí explicitní Eulerovy metody (5.34). Tímto dosazením dostáváme tzv. modifikaci Eulerovy metody.

Obě formule jsou metody 2. řádu přesnosti. Jinak vyjádřeno, pro daný počáteční problém (5.30), (5.31) existuje konstanta $K > 0$, nezávislá na h, taková, že volíme-li v uvedených formulích krok h dostatečně malý, pak platí

$$|y(x_i) - Y_i| \le Kh^2, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Modifikace Eulerovy metody představuje oproti explicitní Eulerově metodě (5.34) ještě jeden rozdíl. Pro výpočet Y_{i+1} je nutné určit hodnotu funkce $f(x,y)$ ve dvou různých bodech. Metody s touto vlastností se nazývají *dvoubodové*. Explicitní Eulerova metoda tedy byla metoda jednobodová (při určování Y_{i+1} počítáme hodnotu $f(x,y)$ pouze v jednom bodě). Poznamenejme, že počet bodů, v nichž je nutné při výpočtu Y_{i+1} vyčíslit hodnotu funkce $f(x,y)$, je jednou z nejvýznamnějších charakteristik efektivnosti výpočtu.

Zmíněné modifikace Eulerovy metody patří mezi tzv. Rungovy-Kuttovy metody. Bez odvození uvedeme pouze nejznámější z nich, která je čtvrtého řádu přesnosti. Její schéma je tvaru

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

kde

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, Y_i),\\
k_2 &= f(x_i + h/2, Y_i + hk_1/2),\\
k_3 &= f(x_i + h/2, Y_i + hk_2/2),\\
k_4 &= f(x_i + h, Y_i + hk_3).
\end{aligned}$$

Výhodou jednokrokových metod tohoto typu je mimo jiné skutečnost, že po výpočtu každého Y_{i+1} lze změnit délku kroku. Velkou nevýhodou této formule je, že se jedná o metodu čtyřbodovou, přičemž vypočtené veličiny $k_1, \ldots, k_4$ není možno v dalším kroku využít. Tato metoda je náročná na čas a užívá se zejména v kombinaci s tzv. vícekrokovými metodami, o nichž pojednáme v následujícím oddíle.

D2. Vícekrokové metody

Vícekrokovými metodami rozumíme metody, jejichž předpis pro výpočet aproximace Y_{i+1} závisí na více předcházejících aproximacích (nikoliv tedy pouze na Y_i). Mezi nejužívanější vícekrokové metody patří *metody Adamsovy.*

Adamsovy explicitní metody. Při jejich odvození opět vyjdeme z rovnosti

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\, \mathrm{d}x$$

(viz vztah (5.32)). Nahradíme-li funkci $f(x,y(x))$ polynomem 1. stupně procházejícím dvěma body $(x_{i-1}, f(x_{i-1}, y(x_{i-1})))$ a $(x_i, f(x_i, y(x_i)))$, pak po úpravě dostáváme

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) \approx \frac{h}{2}[3f(x_i, y(x_i)) - f(x_{i-1}, y(x_{i-1})].$$

Odpovídající numerická formule je tedy dána vztahem

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{2}[3f(x_i, Y_i) - f(x_{i-1}, Y_{i-1})]\,. \tag{5.41}$$

Tato formule je explicitní dvoukroková metoda (k výpočtu Y_{i+1} je třeba znát dvě předcházející aproximace Y_i, Y_{i-1}). Známe-li tedy Y_0, Y_1, můžeme z (5.41) určit $Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$. Při stanovení Y_0, Y_1 položíme jako obvykle $Y_0 = y_0$ a Y_1 vypočteme vhodnou jednokrokovou metodou (tj. jednokrokovou metodou téhož řádu). Lze ukázat, že metoda (5.41) je metoda druhého řádu přesnosti, a proto k určení Y_1 můžeme užít např. modifikaci Eulerovy metody .

Všimněme si, že při každém použití formule (5.41) se počítá jen jedna hodnota $f(x_i, Y_i)$, neboť hodnota $f(x_{i-1}, Y_{i-1})$ již byla vypočtena při předcházejícím použití této formule. Metoda (5.41) je tedy jednobodová.

Jestliže funkci $f(x,y(x))$ nahradíme polynomem vyššího stupně, obdržíme další vícekrokové formule z třídy Adamsových metod. Proložíme-li např. čtyřmi body

$$(x_i, f(x_i, y(x_i))), \quad (x_{i-1}, f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))), \ldots, \quad (x_{i-3}, f(x_{i-3}, y(x_{i-3})))$$

interpolační polynom 3. stupně, pak lze analogickou úvahou jako v předcházejícím případě odvodit příslušnou čtyřkrokovou explicitní formuli.

Adamsovy implicitní metody. Zcela analogicky lze odvodit Adamsovy vícekrokové implicitní metody. Jediný rozdíl spočívá v tom, že mezi interpolační body zahrneme také bod $(x_{i+1}, f(x_{i+1}, y(x_{i+1})))$. Proložíme-li tedy např. čtyřmi body

$$(x_{i+1}, f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))), \quad (x_i, f(x_i, y(x_i))), \ldots, \quad (x_{i-2}, f(x_{i-2}, y(x_{i-2})))$$

polynom 3. stupně, odvodíme po obvyklých úpravách tříkrokovou implicitní formuli.

D3. Metody typu prediktor-korektor

V tomto odstavci se ještě jednou vrátíme k otázce implicitních metod. Připomeňme, že při jejich užití je nutné řešit v každém kroku výpočtu (obecně nelineární) rovnici pro Y_{i+1}. Nejobvyklejší způsob řešení tohoto problému spočívá v tom, že implicitní formule sdružujeme s vhodnými explicitními formulemi do dvojic, které současně užíváme v tzv. metodách *prediktor–korektor* (česky: předpověď–oprava). Danou explicitní formulí se předpoví hodnota Y_{i+1}, která se pak koriguje implicitní formulí. Jako prediktor a korektor je vhodné volit formule stejného řádu přesnosti. Například pomocí (5.41) a (5.40) obdržíme algoritmus

$$\begin{aligned} &\text{P: } Y^*_{i+1} = Y_i + \tfrac{h}{2}[3f(x_i, Y_i) - f(x_{i-1}, Y_{i-1})], \\ &\text{K: } Y_{i+1} = Y_i + \tfrac{h}{2}[f(x_{i+1}, Y^*_{i+1}) + f(x_i, Y_i)]\,, \end{aligned}$$

který je tvořen explicitní a implicitní formulí druhého řádu přesnosti. Symbol Y^*_{i+1} zde značí předpovězenou hodnotu a symbol Y_{i+1} hodnotu korigovanou.

Shrnutí poznatků

Obyčejná diferenciální rovnice je rovnice, jejíž neznámá je funkce (jedné proměnné), a která obsahuje derivaci (příp. derivace) této neznámé funkce. Řád nejvyšší derivaci pak nazveme řádem rovnice. Rovnice tohoto typu hrají zásadní roli při modelování mnoha technických a přírodovědných problémů. Aby tyto modely měly řešení určeno jednoznačně, je třeba s danou rovnicí uvažovat i doplňující podmínky, jejichž počet je roven řádu rovnice. Jsou-li tyto podmínky předepsány pouze v jednom (nejčastěji počátečním) bodě, nazývají se podmínkami počátečními. Jsou-li předepsány v různých (nejčastěji okrajových) bodech, nazývají se podmínkami okrajovými.

Pro několik speciálních typů diferenciálních rovnic prvního řadu (a později uvidíme, že nejen prvního řádu) jsou známy metody vedoucí k nalezení přesného řešení.

V obecném případě musíme přistoupit k numerickému (tj. přibližnému) řešení. Při jeho použití je vhodné mít k dispozici informaci, že daný počáteční problém má právě jedno řešení; z matematického hlediska tuto informaci dává Picardova věta. Numerické řešení je pak obvykle založeno na přibližné náhradě derivace hledané funkce, příp. na integraci diferenciální rovnice a následné přibližné náhradě integrálu. Právě způsob a přesnost této náhrady je rozhodující při odvozování jednotlivých numerických metod. Tyto metody se klasifikují z několika hledisek. Mezi nejdůležitější hlediska patří konvergence metody, stabilita, objem výpočtů a odhad chyby.