Derivace funkce jedné proměnné

Jana Hoderová

2. října 2007

Určete první derivace těchto funkcí

- $y = \sin^4(3x^2 + x + 5)$
- $y = \sin^2 x \cos x^2$
- $y = \cos(3x^2 + x + 5)^3$
- $y = \ln^6(3x^2 + x + 5)$
- $y = \operatorname{tg}^4(3x^2 + x + 5)$

$$y = \sin^4(3x^2 + x + 5)$$

Řešení: $y' = \left(\sin^4(3x^2 + x + 5)\right)'$

Jde o derivaci složené funkce, takže začneme derivací vnější složky, kterou je čtvrtá mocnina u funkce sinus.

$$y = \sin^4(3x^2 + x + 5)$$

Řešení: $y' = \left(\sin^4(3x^2 + x + 5)\right)' =$

$= 4\sin^3(3x^2 + x + 5)\left(\sin(3x^2 + x + 5)\right)'$

$$y = \sin^4(3x^2 + x + 5)$$

Řešení: $y' = \left(\sin^4(3x^2 + x + 5)\right)' =$

$= 4\sin^3(3x^2 + x + 5)\left(\sin(3x^2 + x + 5)\right)'$

Opět jde o derivaci složené funkce, kde vnější složkou je funkce sinus.

$$y = \sin^4(3x^2 + x + 5)$$

Řešení: $y' = \left(\sin^4(3x^2 + x + 5)\right)' =$

$$= 4\sin^3(3x^2 + x + 5)\left(\sin(3x^2 + x + 5)\right)' =$$
$$= 4\sin^3(3x^2 + x + 5)\cos(3x^2 + x + 5)(3x^2 + x + 5)'$$

$$y = \sin^4(3x^2 + x + 5)$$

Řešení: $y' = \left(\sin^4(3x^2 + x + 5)\right)' =$

$= 4\sin^3(3x^2 + x + 5)\left(\sin(3x^2 + x + 5)\right)' =$
$= 4\sin^3(3x^2 + x + 5)\cos(3x^2 + x + 5)(3x^2 + x + 5)'$

Zbývá už jen určit derivaci polynomu.

$$y = \sin^4(3x^2 + x + 5)$$

Řešení: $y' = \bigl(\sin^4(3x^2 + x + 5)\bigr)' =$

$$\begin{aligned}
&= 4\sin^3(3x^2 + x + 5)\,\bigl(\sin(3x^2 + x + 5)\bigr)' = \\
&= 4\sin^3(3x^2 + x + 5)\cos(3x^2 + x + 5)(3x^2 + x + 5)' = \\
&= 4\sin^3(3x^2 + x + 5)\cos(3x^2 + x + 5)(6x + 1).
\end{aligned}$$

$$y = \sin^2 x \cos x^2$$

Řešení: $y' = \left(\sin^2 x \cos x^2\right)'$

$$y = \sin^2 x \cos x^2$$

Řešení: $y' = \left(\sin^2 x \cos x^2\right)'$

Jde o derivaci součinu dvou funkcí, takže použijeme vzorec

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

$y = \sin^2 x \cos x^2$

Řešení: $y' = \left(\sin^2 x \cos x^2\right)' =$

$= 2 \sin x \cos x \cos x^2 + \sin^2 x(-\sin x^2)2x.$

Vzorec pro derivaci součinu dvou funkcí:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

$$y = \sin^2 x \cos x^2$$

Řešení: $y' = \left(\sin^2 x \cos x^2\right)' =$

$= 2 \sin x \cos x \cos x^2 + \sin^2 x(-\sin x^2) 2x.$

$$y = \cos(3x^2 + x + 5)^3$$

Řešení: $y' = \left(\cos(3x^2 + x + 5)^3\right)' =$

$$y = \cos(3x^2 + x + 5)^3$$

Řešení: $y' = \left(\cos(3x^2 + x + 5)^3\right)' =$

$$= -\sin(3x^2 + x + 5)^3 \left((3x^2 + x + 5)^3\right)' =$$

$$y = \cos(3x^2 + x + 5)^3$$

Řešení: $y' = \left(\cos(3x^2 + x + 5)^3\right)' =$

$$= -\sin(3x^2 + x + 5)^3 \left((3x^2 + x + 5)^3\right)' =$$
$$= -\sin(3x^2 + x + 5)^3 3(3x^2 + x + 5)^2 (3x^2 + x + 5)' =$$

$$y = \cos(3x^2 + x + 5)^3$$

Řešení: $y' = \left(\cos(3x^2 + x + 5)^3\right)' =$

$$= -\sin(3x^2 + x + 5)^3 \left((3x^2 + x + 5)^3\right)' =$$
$$= -\sin(3x^2 + x + 5)^3 3(3x^2 + x + 5)^2 (3x^2 + x + 5)' =$$
$$= -\sin(3x^2 + x + 5)^3 3(3x^2 + x + 5)^2 (6x + 1).$$

$$y = \ln^6(3x^2 + x + 5)$$

Řešení: $y' = \left(\ln^6(3x^2 + x + 5)\right)'$

Jde o derivaci složené funkce, takže začneme derivací vnější složky, kterou je šestá mocnina u přirozeného logaritmu.

$$y = \ln^6(3x^2 + x + 5)$$

Řešení: $y' = \left(\ln^6(3x^2 + x + 5)\right)' =$

$= 6\ln^5(3x^2 + x + 5)\left(\ln(3x^2 + x + 5)\right)' =$

$$y = \ln^6(3x^2 + x + 5)$$

Řešení: $y' = \left(\ln^6(3x^2 + x + 5)\right)' =$

$= 6\ln^5(3x^2 + x + 5)\left(\ln(3x^2 + x + 5)\right)' =$

Opět jde derivaci složené funkce, pokračujeme tedy derivací přirozeného logaritmu.

$$y = \ln^6(3x^2 + x + 5)$$

Řešení: $y' = \left(\ln^6(3x^2 + x + 5)\right)' =$

$$= 6\ln^5(3x^2 + x + 5)\left(\ln(3x^2 + x + 5)\right)' =$$
$$= 6\ln^5(3x^2 + x + 5)\frac{1}{(3x^2+x+5)}(3x^2 + x + 5)'$$

$$y = \ln^6(3x^2 + x + 5)$$

Řešení: $y' = \left(\ln^6(3x^2 + x + 5)\right)' =$

$$= 6\ln^5(3x^2 + x + 5)\left(\ln(3x^2 + x + 5)\right)' =$$
$$= 6\ln^5(3x^2 + x + 5)\frac{1}{(3x^2+x+5)}(3x^2 + x + 5)'$$

Zbývá derivace posledního členu.

$$y = \ln^6(3x^2 + x + 5)$$

Řešení: $y' = \left(\ln^6(3x^2 + x + 5)\right)' =$

$$= 6\ln^5(3x^2 + x + 5)\left(\ln(3x^2 + x + 5)\right)' =$$
$$= 6\ln^5(3x^2 + x + 5)\frac{1}{(3x^2+x+5)}(3x^2 + x + 5)' =$$
$$= 6\ln^5(3x^2 + x + 5)\frac{1}{(3x^2+x+5)}(6x + 1).$$

$$y = \operatorname{tg}^4(3x^2 + x + 5)$$

Řešení: $y' = \left(\operatorname{tg}^4(3x^2 + x + 5)\right)'$

$$y = \operatorname{tg}^4(3x^2 + x + 5)$$

Řešení: $y' = \left(\operatorname{tg}^4(3x^2 + x + 5)\right)' =$

$= 4\operatorname{tg}^3(3x^2 + x + 5)\left(\operatorname{tg}(3x^2 + x + 5)\right)'$

$y = \operatorname{tg}^4(3x^2 + x + 5)$

Řešení: $y' = \left(\operatorname{tg}^4(3x^2 + x + 5)\right)' =$

$$= 4\operatorname{tg}^3(3x^2 + x + 5)\left(\operatorname{tg}(3x^2 + x + 5)\right)' =$$
$$= 4\operatorname{tg}^3(3x^2 + x + 5)\frac{1}{\cos^2(3x^2+x+5)}(3x^2 + x + 5)'$$

$$y = \operatorname{tg}^4(3x^2 + x + 5)$$

Řešení: $y' = \left(\operatorname{tg}^4(3x^2 + x + 5)\right)' =$

$$= 4\operatorname{tg}^3(3x^2 + x + 5)\left(\operatorname{tg}(3x^2 + x + 5)\right)' =$$
$$= 4\operatorname{tg}^3(3x^2 + x + 5)\tfrac{1}{\cos^2(3x^2+x+5)}(3x^2 + x + 5)' =$$
$$= 4\operatorname{tg}^3(3x^2 + x + 5)\tfrac{1}{\cos^2(3x^2+x+5)}(6x + 1).$$