6. Lineární ODR n-tého řádu

A. Obecná homogenní LODRn

V předcházející kapitole jsme diferenciální rovnici (libovolného řádu) nazvali lineární, je-li tato rovnice lineární vzhledem ke hledané funkci y a všem jejím derivacím. *Lineární obyčejnou diferenciální rovnicí* řádu $n \geq 2$ (zkratka: LODRn) proto budeme nazývat rovnici tvaru

$$A_n(x)y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + A_1(x)y' + A_0(x)y = f(x), \tag{6.1}$$

kde $A_n(x),\ A_{n-1}(x), \ldots,\ A_1(x),\ A_0(x),\ f(x)$ jsou spojité funkce proměnné x na intervalu I. Podobně jako v případě LODR1 rozlišujeme rovnice homogenní a nehomogenní.

a) Je-li $f(x) = 0$ pro všechna $x \in I$, tj. je-li rovnice tvaru

$$A_n(x)y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + A_1(x)y' + A_0(x)y = 0, \tag{6.2}$$

mluvíme o *homogenní* LODRn.

b) Je-li $f(x) \neq 0$ pro nějaké $x \in I$, mluvíme o *nehomogenní* LODRn.

Homogenní rovnice mají řadu důležitých vlastností, které ostatní ODRn nemají. Následující vlastnost lze prověřit přímým dosazením do dané rovnice.

Věta 6.1. (Linearita prostoru řešení) Jsou-li funkce $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_k = y_k(x)$ řešeními rovnice (6.2), potom také funkce

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ky_k, \qquad C_i \in \mathbb{R},$$

kterou nazýváme lineární kombinací řešení $y_1, y_2, \ldots, y_k$, je řešením rovnice (6.2).

Jinak vyjádřeno, každý (konečný) součet řešení rovnice (6.2) je opět řešení (6.2); podobně vynásobíme-li řešení rovnice (6.2) libovolnou reálnou (příp. i komplexní konstantou), obdržíme opět řešení (6.2). Řešení této rovnice tedy tvoří lineární prostor.

Víme-li tedy např., že řešeními rovnice $y'' + y = 0$ jsou funkce $\sin x, \cos x$, pak řešeními téže rovnice musí být rovněž funkce $-\cos x, 2\sin x, 3\sin x - 5\cos x$ apod. Intuitivně je však zřejmé, že „podstatná“ řešení jsou v uvedeném výčtu právě dvě funkce (např. $\sin x$ a $\cos x$). Všechna ostatní jsou totiž jejich lineární kombinací. V další části budeme pojem „podstatných“ řešení precizovat a stanovíme jejich počet v závislosti na řádu uvažované homogenní LODRn.

Definice 6.2. (Lineárně nezávislé funkce) Nechť $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ jsou reálné, popř. komplexní funkce reálné proměnné x, které jsou definovány na intervalu I. Říkáme, že uvedené funkce jsou na intervalu I *lineárně nezávislé*, jestliže vztah

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x) = 0, \qquad x \in I,$$

kde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ jsou konstanty, platí pouze v případě $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$.

V opačném případě (tj. když alespoň jedno $C_k \neq 0$) říkáme, že uvedené funkce jsou na intervalu I *lineárně závislé.*

Jinak vyjádřeno, funkce $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ jsou na I lineárně nezávislé, jestliže žádnou z těchto funkcí nelze na I vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících. Dvojice funkcí $\sin x, \cos x$ (ale také např. $-\cos x, 2\sin x$ nebo $\sin x, 3\sin x - 5\cos x$) jsou tedy lineárně nezávislé na $\mathbb{R}$, neboť nelze vyjádřit funkci $\sin x$ jako násobek $\cos x$, ani naopak (podobně pro další uvedené dvojice). Naproti tomu dvojice funkcí $\sin x$, $2\sin x$, či trojice $\sin x$, $\cos x$, $3\sin x - 5\cos x$ jsou lineárně závislé na každém netriviálním intervalu $I \subset \mathbb{R}$.

Protože posuzovat lineární závislost či nezávislost funkcí podle výše uvedené definice může být (zejména v případě více funkcí) problém, uvedeme obecnou metodu, jak zjistit, zdali daná n-tice řešení

$$y_1(x),\ y_2(x), \ldots,\ y_n(x)$$

rovnice (6.2) tvoří n lineárně nezávislých funkcí na intervalu I.

Definice 6.3. (Wronského determinant) Nechť funkce $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ jsou na intervalu I alespoň $(n-1)$-krát spojitě derivovatelné. Potom determinant

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

se nazývá *Wronského determinant* nebo *wronskián* funkcí $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots,$ $y_n(x)$.

Následující věta nám udává ekvivalentní podmínku pro lineární nezávislost řešení homogenní rovnice (6.2).

Věta 6.4. (Charakterizace lineárně nezávislých řešení) Nechť $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ jsou partikulární řešení homogenní LODRn (6.2), kde $A_n(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$. Pak $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ jsou lineárně nezávislé na I, když a jen když

$$W(x) \neq 0 \qquad \text{pro všechna } x \in I. \tag{6.3}$$

K této větě ještě poznamenejme, že za uvedených předpokladů platí tzv. Liouvillova formule

$$W(x) = W(x_0)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} (A_{n-1}(x)/A_n(x))\,\mathrm{d}x}\,, \tag{6.4}$$

kde $x_0 \in I$ je libovolný bod. Vztah (6.4) hraje při dokazování předcházející věty důležitou roli; jeho hlavní smysl spočívá v tom, že vzhledem k nenulovosti exponenciální funkce na $\mathbb{R}$ je $W(x)$ identicky rovno nule na I, příp. různé od nuly na celém I podle toho, je-li $W(x_0) = 0$ nebo $W(x_0) \neq 0$ (připomeňme, že x_0 je libovolný, pevně zvolený bod I). Podmínka (6.3) z předcházející věty lze proto ekvivalentně nahradit požadavkem $W(x) \neq 0$ pro nějaké $x \in I$.

Definice 6.5. (Fundamentální systém) Systém řešení $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ rovnice (6.2), která jsou lineárně nezávislá na I, se nazývá *fundamentální systém řešení* této rovnice.

S pomocí předcházející věty nyní odvodíme hlavní výsledek tohoto oddílu.

Věta 6.6. (Struktura obecného řešení) Nechť funkce $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots,$ $y_n(x)$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní LODRn (6.2), kde $A_n(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$. Pak každé řešení $y(x)$ této rovnice lze psát jednoznačně ve tvaru

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x), \tag{6.5}$$

kde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ jsou vhodné konstanty. Jinak řečeno, vztah (6.5) je vyjádřením obecného řešení této rovnice.

Pravdivost tvrzení ověřme pro jednoduchost zápisu pro $n = 2$, tj. pro rovnici

$$A_2(x)y'' + A_1(x)y' + A_0(x)y = 0. \tag{6.6}$$

Tvrdíme tedy, že každé řešení $y(x)$ rovnice (6.6) lze psát ve tvaru

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \tag{6.7}$$

kde $y_1(x)$, $y_2(x)$ jsou lineárně nezávislá řešení a C_1, C_2 jsou vhodné konstanty. Zvolme tedy partikulární řešení předepsáním počátečních podmínek

$$y(x_0) = \xi_0,\ y'(x_0) = \xi_1, \tag{6.8}$$

kde x_0, ξ_0, ξ_1 jsou tři *libovolná* pevná čísla, přičemž $x_0 \in I$. Dosazením (6.7) do (6.8) dostaneme

$$\begin{aligned} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) &= \xi_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) &= \xi_1. \end{aligned}$$

Předcházející vztahy tvoří soustavu dvou lineárních algebraických rovnic pro neznámé C_1, C_2, jejichž hodnota bude záviset na zvolených x_0, ξ_0, ξ_1. Její determinant

$$W(x_0) = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0)$$

je různý od nuly pro každé $x_0 \in I$, takže konstanty C_1, C_2 jsou určeny jednoznačně při každé volbě trojice x_0, ξ_0, ξ_1.

Poznámka 6.7. Předcházející větu lze také volně formulovat tak, že k určení obecného řešení rovnice (6.2) stačí nalézt n (tj. tolik, kolik činí řád rovnice) lineárně nezávislých partikulárních řešení dané rovnice. V následujícím oddíle se naučíme nalézt tato řešení pro speciální případ rovnice (6.2).

B. Homogenní LODRn s konstantními koeficienty

Je to rovnice typu

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{6.9}$$

kde $a_n, \ldots, a_0$ jsou konstanty. Při dalším postupu se nechme inspirovat případem $n = 1$, tedy rovnicí $a_1 y' + a_0 y = 0$. Tato ODR1 je nejen lineární, ale také rovnicí se separovanými proměnnými. Metodou separace proměnných snadno určíme její obecné řešení ve tvaru $C\mathrm{e}^{\lambda x}$, kde $\lambda = -a_0/a_1$, tj. λ je kořenem rovnice $a_1 \lambda + a_0 = 0$.

Definice 6.8. (Konstrukce fundamentálního systému řešení) Hledejme tedy (partikulární) řešení rovnice (6.9) ve tvaru

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x}, \tag{6.10}$$

kde číslo λ je třeba určit. Dosazením (6.10) do (6.9) dostaneme

$$a_n \lambda^n \mathrm{e}^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} \mathrm{e}^{\lambda x} + \cdots + a_1 \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} + a_0 \mathrm{e}^{\lambda x} = 0$$

a po zkrácení nenulovým výrazem $\mathrm{e}^{\lambda x}$

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0\,. \tag{6.11}$$

Rovnici (6.11) nazýváme *charakteristickou rovnicí* diferenciální rovnice (6.9). K určení λ je tedy třeba vyřešit tuto charakteristickou rovnici. Z algebry víme, že tato rovnice má celkem n komplexních kořenů včetně násobností (tj. každý kořen počítáme tolikrát, kolik je jeho násobnost).

Případ n=2. Konstrukci n lineárně nezávislých řešení rovnice (6.9), která odpovídají těmto n kořenům, objasníme na případě $n = 2$, tedy na rovnici tvaru

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{6.12}$$

Její charakteristická rovnice je kvadratická rovnice

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

která má dva kořeny tvaru

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}\,.$$

Nyní jsou tři možnosti:

a) Kořeny λ_1, λ_2 jsou reálné různé (tj. $a_1^2 - 4a_0a_2 > 0$). Podle (6.10) získáváme dvě partikulární řešení

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x},$$

pro jejichž wronskián platí

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \lambda_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} (\lambda_2 - \lambda_1)\mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \neq 0,$$

kde x je libovolné. Tyto funkce tedy tvoří fundamentální systém řešení (6.12), a její obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}\ .$$

b) Kořeny $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (případ $a_1^2 - 4a_0a_2 = 0$) jsou reálné stejné (λ je tedy dvojnásobný kořen). Vztah (6.10) nám dává jedno partikulární řešení

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x};$$

s pomocí rovnosti $2a_2\lambda + a_1 = 0$, která plyne ze vzorce pro $\lambda_{1,2}$, lze dosazením do (6.12) prověřit, že dalším partikulárním řešením je funkce

$$y_2(x) = x\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Pro wronskián obou funkcí v tomto případě platí

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\lambda x} & x\mathrm{e}^{\lambda x} \\ \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} & \mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda x \mathrm{e}^{\lambda x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2\lambda x} \neq 0,$$

kde x je libovolné. Tato řešení jsou tedy lineárně nezávislá, a obecné řešení rovnice (6.12) je v tomto případě tvaru

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

c) Kořeny $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$, $b \neq 0$, jsou nereálné, komplexně sdružené (případ $a_1^2 - 4a_0a_2 < 0$). V tomto případě nám vztah (6.10) a Eulerova formule $\mathrm{e}^{ibx} = \cos bx + i \sin bx$ dávají tato partikulární řešení ve tvaru komplexních funkcí reálné proměnné x:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} &= \mathrm{e}^{(a+ib)x} = \mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{ibx} = \mathrm{e}^{ax}(\cos bx + i \sin bx), \\ \mathrm{e}^{\lambda_2 x} &= \mathrm{e}^{(a-ib)x} = \mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{-ibx} = \mathrm{e}^{ax}(\cos bx - i \sin bx). \end{aligned}$$

Nyní pomocí těchto dvou komplexních řešení určíme dvě požadovaná reálná řešení. V této souvislosti připomeňme, že součtem, příp. rozdílem dvou řešení homogenní LODRn je opět řešení téže rovnice, a rovněž vynásobením konstantou (a to i komplexní) dostáváme opět řešení dané rovnice. Jestliže tedy výše odvozená komplexní řešení nejprve sečteme a vydělíme 2, a poté odečteme a vydělíme 2i, obdržíme dvě reálná řešení

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \mathrm{e}^{ax} \cos bx, \\ y_2(x) &= \mathrm{e}^{ax} \sin bx. \end{aligned}$$

Pro wronskián v tomto případě platí

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{ax} \cos bx & \mathrm{e}^{ax} \sin bx \\ a\mathrm{e}^{ax} \cos bx - b\mathrm{e}^{ax} \sin bx & a\mathrm{e}^{ax} \sin bx + b\mathrm{e}^{ax} \cos bx \end{vmatrix}$$

kde x je libovolné (připomínáme, že v tomto případě je $b \neq 0$). Obecné řešení rovnice (6.12) je tedy v tomto případě tvaru

$$y(x) = \mathrm{e}^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

Případ obecného n. Zobecněním případu $n = 2$ pak dostáváme tuto větu:

a) Ke každému k-násobnému reálnému kořenu λ charakteristické rovnice (6.11) přísluší právě k lineárně nezávislých partikulárních řešení rovnice (6.9) tvaru

$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda x},\ y_2 = x\mathrm{e}^{\lambda x},\ \ldots,\ y_k = x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda x}\ .$$

b) Ke každému k-násobnému komplexnímu kořenu $\lambda = a + ib$ (a zároveň k jeho komplexně sdruženému kořenu $\bar{\lambda} = a - ib$) přísluší právě $2k$ lineárně nezávislých partikulárních řešení rovnice (6.9) tvaru

$$y_1 = \mathrm{e}^{ax}\cos bx,\ y_2 = x\mathrm{e}^{ax}\cos bx,\ \ldots,\ y_k = x^{k-1}\mathrm{e}^{ax}\cos bx,$$
$$y_{k+1} = \mathrm{e}^{ax}\sin bx,\ y_{k+2} = x\mathrm{e}^{ax}\sin bx,\ \ldots,\ y_{2k} = x^{k-1}\mathrm{e}^{ax}\sin bx\,.$$

Příklad 6.9. Řešte diferenciální rovnici

$$y'' + 2y' - 3y = 0\,. \tag{6.13}$$

Řešení. Charakteristická rovnice je tvaru $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ a má dva různé reálné kořeny $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$. Odtud tedy dostáváme, že funkce

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{-3x}, \qquad y_2(x) = \mathrm{e}^{x}$$

jsou lineárně nezávislá řešení (6.13). Obecné řešení pak má tvar

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{-3x} + C_2\,\mathrm{e}^{x}, \qquad C_1,\,C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 6.10. Řešte počáteční problém

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0\,.$$

Řešení. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ má dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 2$. Proto je obecné řešení dané rovnice tvaru

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{2x}, \qquad C_1,\,C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

K tomu, abychom mohli dosadit druhou z počátečních podmínek, je třeba derivovat obecné řešení; tedy

$$y' = 2C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2(1+2x)\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Dosazením počátečních podmínek pak máme

$$1 = y(0) = C_1, \quad 0 = y'(0) = 2C_1 + C_2, \qquad \text{tj. } C_1 = 1, \quad C_2 = -2\,.$$

Příslušné partikulární řešení je pak tvaru

$$y = (1-2x)\,\mathrm{e}^{2x}, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

c) Určeme řešení počátečního problému

$$y^{(4)} - y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1,\ y'''(0) = 0\,.$$

Řešení: Charakteristická rovnice $\lambda^4 - 1 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\lambda_{3,4} = \pm\mathrm{i}$. Odtud dostáváme obecné řešení dané rovnice ve tvaru

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x, \quad C_1,\,C_2,\,C_3,\,C_4 \in \mathbb{R}\,.$$

Dosazením počátečních podmínek do obecného řešení a jeho derivací

$$\begin{aligned} y' &= \quad C_1\,\mathrm{e}^{x} - C_2\,\mathrm{e}^{-x} - C_3\sin x + C_4\cos x,\\ y'' &= \quad C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_1\,\mathrm{e}^{-x} - C_3\cos x - C_4\sin x,\\ y''' &= \quad C_1\,\mathrm{e}^{x} - C_2\,\mathrm{e}^{-x} + C_3\sin x - C_4\cos x \end{aligned}$$

dostáváme $C_1 = C_2 = 1/2$, $C_3 = C_4 = 0$. Řešením daného počátečního problému je proto funkce

$$y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) = \cosh x, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Homogenní LODRn s nekonstantními koeficienty. Ačkoliv struktura řešení je v tomto případě stejná jako pro homogenní LODRn s konstantními koeficienty (tvrzení oddílu A jsou platná pro obecnou homogenní LODRn), ve většině případů neumíme nalézt požadovaných n lineárně nezávislých řešení. Jako příklad uveďme formálně jednoduchou LODR2

$$y'' - xy = 0$$

(tzv. Airyho rovnici), jejíž dvě lineárně nezávislá řešení neumíme najít v exaktním tvaru.

Obecně lze říci, že homogenní LODRn s nekonstantními koeficienty umíme vyřešit většinou pouze tehdy, lze-li vhodnou substitucí převést na odpovídající rovnici s konstantními koeficienty.

C. Obecná nehomogenní LODRn

Jde o rovnici

$$A_n(x)y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + A_1(x)y' + A_0(x)y = f(x)\,, \tag{6.14}$$

kde $A_n(x),\ A_{n-1}(x), \dots,\ A_1(x),\ A_0(x),\ f(x)$ jsou spojité funkce proměnné x na intervalu I a funkce $f(x)$ je na I nenulová.

V tomto oddíle uvedeme dvě tvrzení, která nám mohou usnadnit postup při hledání řešení rovnice (6.14).

Věta 6.11. (Struktura obecného řešení) Obecné řešení rovnice (6.14) lze psát ve tvaru

$$y = y_h + y_p\,, \tag{6.15}$$

kde y_h je obecné řešení homogenní LODRn příslušné k rovnici (6.14), tj. obecné řešení rovnice

$$A_n(x)y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + A_1(x)y' + A_0(x)y = 0\,,$$

a y_p je libovolné partikulární řešení rovnice (6.14).

Platnost tvrzení se ověří dosazením (6.15) do levé strany rovnice (6.14).

Poznámka 6.12. K určení obecného řešení nehomogenní rovnice (6.14) tedy podle předcházející věty stačí znát obecné řešení příslušné homogenní rovnice a jedno (libovolné) řešení původní nehomogenní rovnice. Odtud je také možné usoudit, že k nalezení obecného řešení nehomogenní LODRn musíme být schopni řešit příslušnou homogenní LODRn.

Věta 6.13. (Princip superpozice) Nechť v nehomogenní rovnici (6.14) lze funkci $f(x)$ rozložit na součet tvaru

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_r(x) \tag{6.16}$$

a nechť $y_{p_j}(x)$ je partikulární řešení rovnice

$$A_n(x)y^{(n)} + \cdots + A_1(x)y' + A_0(x)y = f_j(x) \quad (j = 1, \dots, r)\,, \tag{6.17}$$

jejíž levá strana je totožná s levou stranou rovnice (6.14). Potom

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_r}(x)$$

je partikulární řešení původní rovnice (6.14).

Stačí ukázat, že funkce $y_p(x) = y_{p_1}(x) + \cdots + y_{p_r}(x)$ vyhovuje rovnici (6.14). Z předpokladu, že y_{p_j} je řešením rovnice (6.17), plyne

$$A_n(x)y_{p_j}^{(n)} + \cdots + A_1(x)y'_{p_j} + A_0(x)y_{p_j} = f_j(x). \tag{6.18}$$

Sečtením rovnic (6.18) od $j = 1$ do $j = r$ dostaneme

$$A_n(x)\left(\sum_{j=1}^{r} y_{p_j}\right)^{(n)} + \cdots + A_1(x)\left(\sum_{j=1}^{r} y_{p_j}\right)' + A_0(x)\sum_{j=1}^{r} y_{p_j} = f(x)\,,$$

což jsme chtěli ukázat.

Poznámka 6.14. Počtářský přínos principu superpozice je zřejmý. Při hledání partikulárních řešení nehomogenní LODRn s pravou stranou (6.16) můžeme řešit (jednodušší) rovnice, jejichž pravé strany tvoří postupně jednotliví sčítanci ze vztahu (6.16). Takto získaná řešení pak sečteme, a tím obdržíme hledané partikulární řešení.

D. Metoda variace konstant

Princip metody je tentýž jako v případě LODR1. Popíšeme ho v případě nehomogenní LODR2; budeme tedy uvažovat rovnici

$$A_2(x)y'' + A_1(x)y' + A_0(x)y = f(x)\,, \tag{6.19}$$

kde $A_0(x), A_1(x), A_2(x), f(x)$ jsou dané funkce proměnné x, které jsou spojité na nějakém intervalu I. Předpokládejme, že jsme nalezli obecné řešení příslušné homogenní rovnice

$$A_2(x)y'' + A_1(x)y' + A_0(x)y = 0$$

a pišme toto řešení ve tvaru $y_h(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$. Podobně jako v případě LODR1 hledejme obecné řešení rovnice (6.19) ve tvaru

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\,, \qquad C_1(x),\, C_2(x) = ? \tag{6.20}$$

Dosazením (6.20) do (6.19) dostaneme *jednu* podmínku pro 2 neznámé funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$. Musíme tedy stanovit ještě jednu další nezávislou podmínku pro tyto funkce. Tu určíme v průběhu výpočtů y' a y'' potřebných pro dosazení (6.20) do (6.19). Derivací (6.20) dostáváme

$$y'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\,.$$

Jako hledanou podmínku stanovme

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0\,. \tag{6.21}$$

Tím se předchozí vztah se redukuje na vztah

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\,.$$

Opakovanou derivací odtud dostáváme

$$y''(x) = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

Dosazením y' a y'' do (6.19) máme

$$\begin{gathered} A_2(x)[C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x)] + \\ A_1(x)[C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)] + A_0(x)[C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)] = f(x). \end{gathered}$$

Protože funkce $y_1(x), y_2(x)$ jsou řešením příslušné homogenní rovnice, součet všech členů rovnice obsahujících $C_1(x)$ nebo $C_2(x)$ je roven nule. Odtud

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = \frac{f(x)}{A_2(x)}. \tag{6.22}$$

Vztahy (6.21), (6.22) tedy tvoří soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé $C_1'(x)$, $C_2'(x)$. Determinant této soustavy je wronskián $W(x)$, který je vzhledem k lineární nezávislosti funkcí $y_1(x), y_2(x)$ různý od nuly pro všechna $x \in I$. Soustava (6.21), (6.22) je tedy jednoznačně řešitelná na celém intervalu I, a lze ji vyřešit např. pomocí Gaussovy eliminační metody nebo Cramerova pravidla. Integrací $C_1'(x), C_2'(x)$ pak obdržíme vyjádření pro $C_1(x), C_2(x)$ (s obecnými integračními konstantami C_1, C_2), jejichž dosazením do (6.20) obdržíme obecné řešení (6.19).

Zobecnění tohoto postupu pro nehomogenní LODRn je snadné. Vztahy (6.21), (6.22) jsou pak rozšířeny na soustavu n rovnic pro neznámé $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$ tvaru

$$\left.\begin{array}{rcl} C_1'(x)y_1(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) & = & 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) & = & 0 \\ & \vdots & \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) & = & 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) & = & \frac{f(x)}{A_n(x)} \end{array}\right\} .$$

Příklad 6.15. Nalezněme obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,. \tag{6.23}$$

Řešení. I. Charakteristická rovnice příslušné homogenní LODR2 je tvaru

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

a má dvojnásobný reálný kořen $\lambda_{1,2} = 1$. Odtud

$$y_h = C_1\mathrm{e}^x + C_2 x\mathrm{e}^x\,.$$

II. Obecné řešení rovnice (6.23) tedy budeme hledat podle (6.20) ve tvaru

$$y = C_1(x)\mathrm{e}^x + C_2(x)x\mathrm{e}^x, \qquad C_1(x),\ C_2(x) = ? \tag{6.24}$$

Abychom tyto neznámé funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$ určili, musíme nejprve vyřešit soustavu (6.21), (6.22) pro $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ ve tvaru

$$\begin{array}{l} C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)x\mathrm{e}^x = 0, \\ C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)(1+x)\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,. \end{array}$$

K vyřešení této soustavy stačí zkrátit dané rovnice členem e^x a odečíst první rovnici od druhé. Odtud

$$C_1'(x) = -1, \qquad C_2'(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Integrací těchto vztahů dostáváme

$$C_1(x) = \int -1\,\mathrm{d}x = -x + C_1, \qquad C_2(x) = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C_2\,.$$

Dosazením do (6.24) tedy dostáváme obecné řešení ve tvaru

$$y = (-x + C_1)\mathrm{e}^x + (\ln|x| + C_2)x\mathrm{e}^x = C_1\mathrm{e}^x + C_2 x\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x \ln|x|, \qquad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\,,$$

kde místo $C_2 - 1$ píšeme opět C_2.

Poznámka 6.16. Kdybychom při integraci funkcí $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ nepsali integrační konstanty, pak po dosazení do tvaru (6.24) dostáváme partikulární řešení y_p rovnice (6.23). Hledané obecné řešení y pak určíme pomocí vztahu $y = y_h + y_p$ (a obdržíme pochopitelně tentýž výsledek).

E. Metoda neurčitých koeficientů

Touto metodou se hledá partikulární řešení $y_p(x)$ nehomogenní LODRn s konstantními koeficienty

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \tag{6.25}$$

kde $a_n, \ldots, a_0$ jsou konstanty a $f(x)$ je nenulová spojitá funkce některého z dále uvedených typů. Ilustrujme hlavní myšlenku na případě, kdy pravou stranou rovnice (6.25) je postupně polynom, exponenciální funkce, příp. sinus nebo kosinus. Pro tyto případy lze tvar pro y_p navrhnout *předběžně* takto:

$$\begin{aligned} f(x) &= P_m(x) \quad \Rightarrow \quad y_p = A_m x^m + \cdots + A_1 x + A_0, \qquad A_i = ? \\ f(x) &= K\,\mathrm{e}^{ax} \quad \Rightarrow \quad y_p = A\,\mathrm{e}^{ax}, \qquad A = ? \\ f(x) &= K_1 \cos bx + K_2 \sin bx \quad \Rightarrow \quad y_p = A\cos bx + B \sin bx, \qquad A, B = ? \end{aligned}$$

Pozor! Takto získaný tvar pro y_p je třeba ještě modifikovat v případě, kdy nějaký člen v navrženém tvaru pro y_p je obsažen také jako člen v y_h. V takovém případě je nutné celý předpokládaný tvar řešení y_p násobit opakovaně faktorem x, dokud y_p nemá žádný společný člen s y_h.

Právě popsaný postup bude aplikován v následujícím příkladu.

Příklad 6.17. Řešme rovnici

$$y'' - 2y' + y = x^2 + 1 + \mathrm{e}^x\,. \tag{6.26}$$

Řešení. Především poznamenejme, že podle předcházejícího příkladu obecné řešení příslušné homogenní LODR2

$$y'' - 2y + y = 0$$

je tvaru

$$y_h = C_1\mathrm{e}^x + C_2 x\mathrm{e}^x\,.$$

Podle principu superpozice nyní rozložíme pravou stranu rovnice (6.26) na součet dvou funkcí

$$f_1(x) = x^2 + 1\,, \quad f_2(x) = \mathrm{e}^x$$

Nejprve hledejme partikulární řešení dané rovnice s pravou stranou $f_1(x)$, tj. rovnice

$$y'' - 2y' + y = x^2 + 1. \tag{6.27}$$

Pravá strana je polynom druhého stupně, a proto podle výše popsaného postupu hledejme předběžně řešení y_{p_1} ve tvaru polynomu 2. stupně, tj. $y_{p_1} = Ax^2 + Bx + C$, kde A, B, C jsou neznámé konstanty. Protože žádný člen y_{p_1} není shodný s žádným členem obsaženým v y_h, lze tento tvar považovat za definitivní. Výpočtem derivací $y'_{p_1} = 2Ax + B$, $y''_{p_1} = 2A$ a následným dosazením do (6.27) dostáváme vztah

$$2A - 4Ax - 2B + Ax^2 + Bx + C = x^2 + 1.$$

Porovnáním koeficientů u mocnin x^2, x^1 a x^0 obdržíme vztahy $A = 1$, $-4A + B = 0$, $2A - 2B + C = 1$. Vyřešením této soustavy máme $A = 1$, $B = 4$, $C = 7$. Tedy

$$y_{p_1} = x^2 + 4x + 7\,.$$

Zbývá určit partikulární řešení rovnice

$$y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x\,. \tag{6.28}$$

Protože $f_2(x) = \mathrm{e}^x$, budeme řešení y_{p_2} předpokládat nejprve ve tvaru $y_{p_2} = A\mathrm{e}^x$. Tento člen je však obsažen v y_h jako $C_1\mathrm{e}^x$ (označení konstanty zde není podstatné). Vynásobíme proto tento tvar faktorem x, čímž dostáváme $Ax\mathrm{e}^x$. I tento výraz je však zahrnut v y_h (jako $C_2x\mathrm{e}^x$). Opakované násobení x dává

$$y_{p_2} = Ax^2\mathrm{e}^x, \qquad A = ?$$

Teprve toto vyjádření y_{p_2} lze považovat za konečné (tento člen již není součástí y_h). Odtud derivací dostáváme

$$y'_{p_2} = 2Axe^x + Ax^2e^x, \qquad y''_{p_2} = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x.$$

Dosazením y_{p_2}, y'_{p_2}, y''_{p_2} do rovnice (6.28) dostaneme po zkrácení funkcí e^x a po jednoduchých úpravách $A = 1/2$. Tedy

$$y_{p_2} = \frac{1}{2}x^2 e^x,$$

a odtud dohromady

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = (C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2)e^x + x^2 + 4x + 7, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Poznámka 6.18. Úspěšnost metody neurčitých koeficientů je dána tím, že na pravé straně dané rovnice vystupují funkce, které jsou při postupném derivování stále téhož typu (tedy polynom zůstává polynomem, exponenciála exponenciálou s týmž exponentem a lineární kombinace sinů a kosinů opět kombinací sinů a kosinů s týmž argumentem). Tuto vlastnost mají také funkce dané obecněji vztahem

$$f(x) = e^{ax}[P_m(x)\cos bx + P^*_m(x)\sin bx] \quad (b \neq 0),$$

kde a, b jsou daná reálná čísla a $P_m(x)$, $P^*_m(x)$ polynomy tvaru

$$P_m(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_mx^m, \quad P^*_m(x) = c^*_0 + c^*_1x + \cdots + c^*_mx^m,$$

kde $c_0, c_1, \ldots, c_m$ a $c^*_0, c^*_1, \ldots, c^*_m$ jsou daná čísla. Požaduje se, aby alespoň jeden z koeficientů c_m a c^*_m u mocniny x^m byl různý od nuly. (Z tohoto požadavku plyne, že jeden z polynomů $P_m(x)$, $P^*_m(x)$ může být identicky roven nule.)

V tomto případě naznačíme formálně jiný postup při sestavení tvaru y_p, než byl popsán a aplikován při řešení předcházejícího příkladu; je snadné si přitom rozmyslet, že oba přístupy vedou k témuž závěru. Hledejme tedy $y_p(x)$ ve tvaru

$$y_p(x) = x^k e^{ax}[Q_m(x)\cos bx + R_m(x)\sin bx],$$

kde

$$Q_m(x) = A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m,$$
$$R_m(x) = B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m$$

jsou polynomy, jejichž koeficienty $A_0, \ldots, A_m$ a $B_0, \ldots, B_m$ je *třeba určit* a kde k je násobnost kořene $\lambda = a \pm ib$ charakteristické rovnice příslušné homogenní rovnice

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Není-li číslo $a \pm ib$ kořenem této charakteristické rovnice, potom klademe $k = 0$ (protože násobnost kořene $\lambda = a \pm ib$ je v tomto případě nulová). Neznámé koeficienty A_i, B_i přitom určíme dosazením tvaru y_p do řešené LODRn.

Vztah metody variace konstant a metody neurčitých koeficientů. Teoreticky je problém nalézt obecné řešení jakékoliv nehomogenní LODRn (6.14) vyřešen metodou variace konstant, protože jsme touto metodou redukovali řešení rovnice (6.14) na n integrací. Metoda však předpokládá znalost řešení y_h příslušné homogenní rovnice, což umíme pouze v případě rovnice (6.14) s konstantními koeficienty. Navíc vypočítat získané integrály je většinou problém z početního hlediska, a proto má metoda variace konstant spíše teoretický význam. Dovoluje-li tvar dané LODRn použít metodu neurčitých koeficientů, bývá tento postup obvykle mnohem snadnější. Ilustrujme toto srovnání na rovnici

$$y'' - 2y' + y = x^2 + 1$$

řešené v předcházejícím příkladu. Metodou neurčitých koeficientů jsme zde hledali řešení y_p dané rovnice ve tvaru

$$y_p = Ax^2 + Bx + C, \qquad A, B, C = ?$$

Zvolíme-li k nalezení obecného řešení y (resp. partikulárního řešení y_p) této rovnice metodu variace konstant, pak pomocí tvaru pro y_h předpokládáme

$$y = C_1(x)\mathrm{e}^x + C_2(x)x\mathrm{e}^x, \qquad C_1(x),\, C_2(x) = ?$$

Srovnání těchto vztahů zřetelně dokumentuje skutečnost, že tvar navržený metodou variace konstant vychází pouze z tvaru y_h příslušné homogenní LODR2 a vůbec nerespektuje tvar pravé strany $f(x)$. V důsledku toho je navržený tvar mnohdy zbytečně složitý, což má za následek početní obtíže při řešení lineární soustavy pro $C_i'(x)$ a následné integraci.

Poznámka 6.19. (obecná ODRn) ODRn v normálním tvaru nazýváme rovnici

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}).$$

Čtenáři jistě neuniklo, že jsme se v předchozích kapitolách (věnovaným rovnicím vyšších řádů) takto obecnou rovnicí vůbec nezabývali a věnovali se výhradně rovnicím lineárním. O jiných typech rovnic n-tého řádu toho totiž víme velmi málo, a proto se obecná ODRn řeší především numericky.

Shrnutí poznatků

Homogenní LODRn mají řadu speciálních vlastností, které umožňují jednoduše popsat strukturu řešení, příp. i popsat algoritmus nalezení exaktního řešení.

Množina všech řešení dané homogenní LODRn tvoří lineární prostor (jakákoliv lineární kombinace řešení je opět řešení téže rovnice). Umíme-li nalézt tolik lineárně nezávislých řešení, kolik činí řád dané rovnice, pak tyto funkce tvoří tzv. fundamentální systém řešení a všechna řešení obdržíme jako lineární kombinaci funkcí z fundamentálního systému. Požadovaná lineárně nezávislá řešení umíme určit ve speciálním případě, kdy koeficienty dané rovnice jsou konstanty.

Obecné řešení nehomogenní LODRn lze vyjádřit ve tvaru součtu obecného řešení příslušné homogenní LODRn a partikulárního řešení původní nehomogenní LODRn. K úspěšnému vyřešení nehomogenní LODRn bychom tedy měli být schopni řešit příslušnou homogenní rovnici, což umíme pouze v případě rovnic s konstantními koeficienty.

K určení partikulárního řešení dané nehomogenní rovnice máme k dispozici univerzální metodu variace konstant, a dále metodu neurčitých koeficientů, která lze sice použít pouze pro rovnice se speciální pravou stranou, je však početně výrazně snadnější (zejména se při jejím užití vyhneme integraci).