7. Soustavy ODR1

A. Základní poznatky o soustavách ODR1

V inženýrské praxi se se soustavami diferenciálních rovnic setkáváme především v úlohách souvisejících s mechanikou. Příkladem může být úloha popsat dráhu hmotného bodu pohybujícího se v prostoru vlivem působení dané síly, přičemž je známa počáteční poloha a počáteční rychlost tohoto bodu.

V následující definici nejprve zavedeme potřebné základní pojmy, které jsou přímým zobecněním analogických pojmů pro ODR1 a ODRn.

Definice 7.1. (Soustava ODR1 a související pojmy) a) Soustavu n diferenciálních rovnic prvního řádu tvaru

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n)\\ y_2' &= f_2(x, y_1, \dots, y_n)\\ &\dots\\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n)\end{aligned}\right\}, \tag{7.1}$$

kde funkce f_k $(k = 1, \dots, n)$ jsou definovány na $(n+1)$-rozměrné oblasti $\Omega \subset R^{n+1}$, nazýváme *normální soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu.*

b) *Řešením* normální soustavy (7.1) nazýváme každou skupinu n funkcí tvaru

$$\tilde{y}_1(x),\ \tilde{y}_2(x),\ \dots,\ \tilde{y}_n(x), \tag{7.2}$$

které jsou spojitě derivovatelné v nějakém intervalu I a pro všechny body $x \in I$ vyhovují dané soustavě (7.1).

c) Úlohu určit řešení soustavy (7.1), které vyhovuje n *počátečním podmínkám*

$$y_1(x_0) = b_1,\ y_2(x_0) = b_2,\ \dots,\ y_n(x_0) = b_n\,, \tag{7.3}$$

kde $(x_0, b_1, \dots, b_n) \in \Omega$ je libovolný, ale pevně daný bod, nazýváme *počátečním problémem.*

d) *Obecným řešením* soustavy (7.1) budeme rozumět skupinu n funkcí závisejících na n obecných parametrech $C_1, \dots, C_n$ takových, že vhodnou (přípustnou) volbou těchto konstant obdržíme řešení každého počátečního problému (7.1), (7.3).

e) *Partikulárním řešením* soustavy (7.1) nazveme takové řešení, které obdržíme z obecného řešení pevnou volbou konstant $C_1, \dots, C_n$.

Převedení ODRn na soustavu n ODR1. V dalším textu se budeme zabývat výhradně soustavami diferenciálních rovnic prvního řádu tvaru (7.1), neboť všechny soustavy ODR (i vyšších řádů), které se ve fyzikální a technické praxi vyskytují, se dají na tvar (7.1) převést.

Příklad 7.2. Celá mechanika hmotného bodu a tuhého tělesa (včetně příbuzných oborů) je vybudována na druhém Newtonově zákoně, který má obecně tvar soustavy tří nelineárních ODR druhého řádu:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= f(t, x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))\\ \ddot{y}(t) &= g(t, x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))\\ \ddot{z}(t) &= h(t, x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))\end{aligned}\right\}, \tag{7.4}$$

kde tečkou značíme derivaci podle času t a kde f, g, h jsou dané funkce. Počáteční podmínky (charakterizující počáteční polohu a počáteční rychlost) jsou tvaru

$$x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0,\ z(t_0) = z_0, \tag{7.5}$$

$$\dot{x}(t_0) = u_0,\ \dot{y}(t_0) = v_0,\ \dot{z}(t_0) = w_0, \tag{7.6}$$

kde t_0, x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0 jsou daná čísla.

Problém (7.4) – (7.6) převedeme na problém (7.1), (7.3) takto: Položíme

$$u(t) := \dot{x}(t),\ v(t) := \dot{y}(t),\ w(t) := \dot{z}(t)\,. \tag{7.7}$$

Potom rovnice (7.4) lze psát ve tvaru

$$\left.\begin{array}{l} \dot{u}(t) = X(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)) \\ \dot{v}(t) = Y(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)) \\ \dot{w}(t) = Z(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)) \end{array}\right\}. \tag{7.8}$$

K těmto třem rovnicím připojíme vztahy (7.7), které napíšeme formálně trochu jinak:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}(t) = u(t) \\ \dot{y}(t) = v(t) \\ \dot{z}(t) = w(t) \end{array}\right\}. \tag{7.9}$$

Počáteční podmínky (7.5), (7.6) lze nyní psát takto:

$$\left.\begin{array}{l} x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0,\ z(t_0) = z_0 \\ u(t_0) = u_0,\ v(t_0) = v_0,\ w(t_0) = w_0 \end{array}\right\}. \tag{7.10}$$

Rovnice (7.8), (7.9) tvoří soustavu ODR1 pro šest neznámých funkcí u, v, w, x, y, z. Je snadné si přitom rozmyslet, že počáteční problémy (7.4) – (7.6) a (7.8) – (7.10) jsou ekvivalentní.

Příklad Počáteční problém

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = -1 \tag{7.11}$$

převedeme na počáteční problém pro soustavu ODR1.

Řešení. Položíme

$$y_1 := y, \quad y_2 := y', \quad y_3 := y'', \quad y_4 := y'''\,.$$

Pak lze problém (7.11) přepsat na tvar

$$\left.\begin{array}{lcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ y_3' & = & y_4 \\ y_4' & = & -y_1 + 2y_3 \end{array}\right\}, \qquad y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 1,\ y_3(0) = 0,\ y_4(0) = -1\,.$$

Poznámka 7.3. Zobecněním právě uvedeného postupu se lze snadno přesvědčit, že každou diferenciální rovnici n-tého řádu v normálním tvaru je možné převést na normální soustavu n diferenciálních rovnic řádu prvního.

Definice 7.4. (Soustava lineárních ODR1) Je to soustava rovnic tvaru

$$\left.\begin{array}{c} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ \cdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{array}\right\}, \tag{7.12}$$

kde všechny koeficienty $a_{ij}(x)$ a funkce $f_k(x)$ jsou spojité na intervalu I.

a) Je-li $f_k(x) = 0$ pro všechna $x \in I$ a $k = 1, \ldots, n$, mluvíme o *homogenní* soustavě LODR1.

b) Je-li $f_k(x) \neq 0$ pro nějaké $x \in I$ a $k = 1, \ldots, n$, mluvíme o *nehomogenní* soustavě LODR1.

Pokud půjde o soustavu s konstantními koeficienty, budeme místo $a_{ij}(x)$ psát a_{ij}. V případě nekonstantních koeficientů *nebudeme* argument x vynechávat.

Maticový zápis soustavy LODR1. Položme

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

resp. v případě konstantních koeficientů

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

a zaveďme sloupcové vektory

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Potom můžeme soustavu (7.12) psát stručně ve tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x)$$

a odpovídající soustavu s konstantními koeficienty ve tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(x)\,.$$

Pro úsporu místa budeme psát sloupcové vektory ve tvaru transponovaných řádkových vektorů, např.

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T\,.$$

Zavedeme-li konstantní vektor

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T,$$

kde b_i jsou pravé strany vztahů (7.3), potom můžeme psát počáteční podmínku (7.3) ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{b}\,.$$

Eliminační metoda řešení soustav LODR1. Princip eliminační metody spočívá v převodu soustavy n lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu na jednu lineární diferenciální rovnici řádu n-tého. Jde tedy o postup opačný k postupu uvedenému v předcházejících příkladech. Myšlenka tohoto převedení spočívá v tom, že pomocí vhodných algebraických úprav a pomocí derivování vybraných rovnic soustavy postupně vyloučíme $n-1$ neznámých funkcí i s jejich derivacemi.

Použití eliminační metody je efektivní pouze za předpokladu, že získanou LODRn umíme vyřešit; musí se tedy jednat o LODRn s konstantními koeficienty. Proto se eliminační metoda užívá především pro řešení soustav LODR1 s konstantními koeficienty.

Princip metody předvedeme na příkladu.

Příklad 7.5. Nalezněme obecné řešení soustavy

$$y_1' = -2y_1 + 2y_2 + x, \tag{7.13}$$
$$y_2' = 3y_1 - y_2\,. \tag{7.14}$$

Řešení. Přistoupíme k eliminaci např. funkce y_2 a její derivace. Z rovnice neobsahující y_2' (tedy z rovnice (7.13)) dostáváme

$$2y_2 = y_1' + 2y_1 - x\,. \tag{7.15}$$

Odtud derivováním

$$2y_2' = y_1'' + 2y_1' - 1\,. \tag{7.16}$$

Vztahy (7.15), (7.16) nyní dosadíme do rovnice (7.14), kterou násobíme dvěma:

$$(y_1'' + 2y_1' - 1) - 6y_1 + (y_1' + 2y_1 - x) = 0\,,$$

čili

$$y_1'' + 3y_1' - 4y_1 = x + 1\,. \tag{7.17}$$

Obdrželi jsme tedy nehomogenní LODR2 s neznámou funkcí y_1. Charakteristická rovnice $\lambda^2+3\lambda-4=0$ má kořeny $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-4$, a proto je obecné řešení příslušné homogenní rovnice tvaru

$$y_{1_h}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-4x}\,.$$

Partikulární řešení (7.17) lze pak metodou neurčitých koeficientů snadno nalézt ve tvaru

$$y_{1_p}=-\frac{1}{16}(4x+7)\,.$$

Obecné řešení rovnice (7.17) je tedy tvaru

$$y_1=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-4x}-\frac{1}{16}(4x+7),\qquad C_1,\,C_2\in\mathbb{R}\,. \tag{7.18}$$

Dosazením (7.18) do rovnice neobsahující y_2' (tj. do rovnice (7.13)) dostáváme

$$y_2=\frac{1}{2}y_1'+y_1-\frac{x}{2}=\frac{3}{2}C_1\mathrm{e}^x-C_2\mathrm{e}^{-4x}-\frac{3}{4}x-\frac{9}{16},\qquad C_1,\,C_2\in\mathbb{R}\,. \tag{7.19}$$

Vztahy (7.18), (7.19) nyní tvoří obecné řešení soustavy (7.13), (7.14).

Poznámka 7.6. Uvedená metoda vede snadno k cíli v případě soustavy dvou LODR1. V případě tří a více rovnic je její použití obtížné a vyžaduje značnou matematickou obratnost. Proto se dále seznámíme i s jinými metodami řešení.

B. Obecná homogenní soustava LODR1

Je to soustava

$$\mathbf{y}'=\mathbf{A}(x)\mathbf{y}\,. \tag{7.20}$$

V předcházejícím oddíle jsme ukázali, že každou diferenciální rovnici n-tého řádu je možné převést na soustavu n diferenciálních rovnic řádu prvního, a v lineárním případě také naopak. Je proto přirozené očekávat, že struktura řešení homogenní soustavy LODR1 pro n neznámých funkcí bude velmi podobná struktuře řešení homogenní LODRn.

Následující tvrzení jsou vektorovými analogiemi odpovídajících vět o struktuře množiny řešení homogenní LODRn.

Věta 7.7. (Linearita prostoru řešení) Jsou-li vektory $\mathbf{y}_1,\,\mathbf{y}_2,\,\ldots,\,\mathbf{y}_k$ řešení soustavy (7.20) na intervalu I, potom také jejich lineární kombinace

$$\mathbf{y}=C_1\mathbf{y}_1+C_2\mathbf{y}_2+\cdots+C_k\mathbf{y}_k \tag{7.21}$$

je řešením této soustavy na intervalu I.

Tvrzení snadno ověříme přímým dosazením (7.21) do (7.20). Zřejmě je

$$(C_1\mathbf{y}_1+C_2\mathbf{y}_2+\cdots+C_k\mathbf{y}_k)'=C_1\mathbf{y}_1'+C_2\mathbf{y}_2'+\cdots+C_k\mathbf{y}_k'=$$
$$\mathbf{A}(x)C_1\mathbf{y}_1+\mathbf{A}(x)C_2\mathbf{y}_2+\cdots+\mathbf{A}(x)C_ky_k=\mathbf{A}(x)(C_1\mathbf{y}_1+C_2\mathbf{y}_2+\cdots+C_k\mathbf{y}_k)\,.$$

Definice 7.8. (Fundamentální systém) Jsou-li vektory $\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n$ lineárně nezávislé na intervalu I a jsou-li řešeními soustavy (7.20), potom říkáme, že tvoří *fundamentální systém řešení* soustavy (7.20) na intervalu I.

Definice 7.9. (Fundamentální matice) Nechť vektory $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ jsou řešení soustavy (7.20). Z lineární algebry je známo, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé na intervalu I právě tehdy, když matice

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(x) = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n] = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & & & \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}, \tag{7.22}$$

jejíž sloupce tvoří vektory $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$, má na I nenulový determinant. Matici (7.22), která má v teorii soustav lineárních ODR1 velký význam, nazýváme *fundamentální maticí* soustavy (7.20).

Následující tvrzení je hlavním výsledkem tohoto oddílu. Konstatuje se zde, že (podobně jako v případě homogenní LODRn) znalost fundamentálního systému řešení soustavy (7.20) postačuje k určení obecného řešení dané soustavy.

Věta 7.10. (Struktura obecného řešení) Tvoří-li vektory $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ fundamentální systém řešení homogenní soustavy (7.20) na intervalu I, potom každé řešení $\mathbf{y}$ této soustavy lze jednoznačně psát ve tvaru

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{y}_1 + C_2\mathbf{y}_2 + \cdots + C_n\mathbf{y}_n\,, \tag{7.23}$$

kde $C_1, C_2, \dots, C_n$ jsou vhodné konstanty. Položíme-li

$$\mathbf{c} := (C_1, C_2, \dots, C_n)^T,$$

potom lze psát (7.23) stručně ve tvaru

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}\,\mathbf{c} = \mathbf{c}^T\mathbf{Y}^T, \tag{7.24}$$

kde $\mathbf{Y}$ je fundamentální matice (7.22).

Odvození vztahu (7.23), resp. (7.24) je analogické jako v případě homogenní LODRn.

Poznámka 7.11. Vztah (7.23) je tedy vyjádřením obecného řešení homogenní soustavy (7.20).

C. Homogenní soustava LODR1 s konstantními koeficienty

Je to soustava tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}\,, \tag{7.25}$$

kde A je konstantní matice. Podle předcházející věty je k určení obecného řešení soustavy (7.25) třeba nalézt n lineárně nezávislých řešení této soustavy. V této kapitole uvedeme tzv. *Eulerovu metodu* (nazývanou také *metodou vlastních čísel*) vedoucí k nalezení těchto n řešení.

Konstrukce fundamentálního systému - Eulerova metoda. Na základě analogie s homogenní LODRn hledejme partikulární řešení soustavy (7.25) ve tvaru

$$\mathbf{y} = \mathrm{e}^{\lambda x}\mathbf{h} = \mathrm{e}^{\lambda x}(h_1, \dots, h_n)^T, \tag{7.26}$$

kde neznámé $\lambda \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)^T \in \mathbb{R}^n$ je třeba určit. O číselném vektoru $\mathbf{h}$ navíc předpokládáme, že je nenulový (tj. alespoň jedna jeho složka je různá od nuly). Dosazením (7.26) do (7.25) dostaneme

$$\lambda\mathrm{e}^{\lambda x}\mathbf{h} = \mathbf{A}(\mathrm{e}^{\lambda x}\mathbf{h}) = \mathrm{e}^{\lambda x}\mathbf{A}\,\mathbf{h}\,.$$

Po zkrácení nenulovým faktorem $\mathrm{e}^{\lambda x}$ získáme rovnici

$$\mathbf{A}\,\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h}\,. \tag{7.27}$$

Ta čísla λ, pro která má rovnice (7.27) nenulové řešení $\mathbf{h} \neq \mathbf{o}$ (tj. alespoň jedna složka vektoru $\mathbf{h}$ je různá od nuly), nazýváme *vlastní čísla* (*vlastní hodnoty*) matice $\mathbf{A}$. Konstantní nenulové vektory $\mathbf{h}$, které pro danou vlastní hodnotu λ vyhovují rovnici (7.27), se nazývají *vlastní vektory* matice $\mathbf{A}$ příslušné vlastní hodnotě λ.

Nejprve uvedeme, jak lze zjistit všechny vlastní hodnoty čtvercové matice $\mathbf{A}$: Užitím vztahu $\mathbf{h} = \mathbf{E}\,\mathbf{h}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice (tj. čtvercová matice, která má na hlavní diagonále jedničky a mimo hlavní diagonálu nuly), dostaneme ze vztahu (7.27) vztah $\mathbf{A}\,\mathbf{h} = \lambda\mathbf{E}\,\mathbf{h}$ čili

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{h} = \mathbf{o}\,, \tag{7.28}$$

kde $\mathbf{o} = (0, \ldots, 0)^T$ je nulový vektor. Z algebry víme, že homogenní soustava (7.28) má *nenulové* řešení $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)^T$ (ne jediné!), když a jen když determinant této soustavy je roven nule:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0\,, \tag{7.29}$$

čili

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0\,. \tag{7.30}$$

Rovnice (7.30) se nazývá *charakteristická rovnice* soustavy (7.25). Je to algebraická rovnice stupně n pro neznámou λ, která má n komplexních kořenů včetně násobností. Např. pro $n = 2$ je to kvadratická rovnice tvaru

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0\,.$$

Postup při řešení soustavy (7.25) je nyní zhruba tento:

1) Nalezneme všechna vlastní čísla λ matice $\mathbf{A}$.

2) Ke každému vlastnímu číslu λ nalezneme vlastní vektor $\mathbf{h}$.

3) Pokud jsou všechna vlastní čísla reálná a navzájem různá, nalezli jsme pomocí (7.26) požadovaných n lineárně nezávislých partikulárních řešení soustavy (7.25). Pokud jsou některá vlastní čísla λ násobnými kořeny charakteristické rovnice nebo jejími komplexními kořeny, musíme užít dodatečné obraty.

Podrobnosti si nyní vysvětlíme na příkladech, přičemž se omezíme na případ $n = 2$.

Uvažujeme tedy soustavu dvou diferenciálních rovnic pro dvě neznámé funkce y_1, y_2. Je tedy třeba nalézt dvě lineárně nezávislá řešení $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ této soustavy; obecné řešení $\mathbf{y}$ pak bude lineární kombinací těchto řešení. Abychom se vyhnuli nedorozuměním mezi symboly $\mathbf{y}_i$ a y_i, budeme tato lineárně nezávislá řešení označovat $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

Příklad 7.12. Řešíme soustavu

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= y_1 + y_2 \end{aligned}\right\}.$$

Řešení. Charakteristická rovnice

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

má reálné různé kořeny $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$.

Pro $\lambda_1 = 3$ nabývá rovnice $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{h} = \mathbf{o}$ tvaru

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2h_1 + 4h_2 \\ h_1 - 2h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vydělíme-li první rovnici minus dvěma, dostaneme druhou rovnici. Máme tedy ve skutečnosti jednu rovnici pro dvě neznámé h_1, h_2, takže jednu z neznámých můžeme volit. Položíme $h_2 = 1$; potom $h_1 = 2$. První partikulární řešení je tedy tvaru

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}.$$

Pro $\lambda_2 = -1$ nabývá rovnice $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{h} = \mathbf{o}$ tvaru

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h_1 + 4h_2 \\ h_1 + 2h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Získané rovnice jsou tedy opět lineárně závislé. Zvolíme $h_2 = 1$, takže $h_1 = -2$; odtud

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-x} = \begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}.$$

Obecné řešení $\mathbf{y}$ je pak lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, tj.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1\mathbf{u} + C_2\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2C_1\mathrm{e}^{3x} - 2C_2\mathrm{e}^{-x} \\ C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pozor: Skutečnost, že rovnice pro hledaná h_1, h_2 byly v obou případech závislé, není náhodná. Plyne z požadavku, aby řešení $\mathbf{h}$ soustavy (7.28) bylo nenulové.

Příklad 7.13. Řešíme soustavu

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= -7y_1 + y_2 \\ y_2' &= -2y_1 - 5y_2 \end{aligned}\right\}.$$

Řešení. Charakteristická rovnice

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0$$

má komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = -6 \pm i$.

Nejprve uvažujme $\lambda_1 = -6 + i$. V tomto případě je rovnice $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{h} = \mathbf{o}$ tvaru

$$\begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+i)h_1 + h_2 \\ -2h_1 + (1-i)h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Násobíme-li první rovnici číslem $(1 - i)$, dostaneme druhou rovnici. Máme tedy opět k dispozici pouze jednu rovnici. Položíme-li $h_1 = 1$, dostaneme z první rovnice $h_2 = 1 + i$. Vektoru $\mathbf{h}$ s těmito složkami, tj. vektoru $\mathbf{h} = (1, 1 + i)^T$ přísluší partikulární řešení

$$\mathbf{w} = \mathrm{e}^{(-6+i)x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-6x}(\cos x + i\sin x)\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\mathrm{e}^{-6x}\begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} + \underbrace{i\mathrm{e}^{-6x}\begin{pmatrix} \sin x \\ \sin x + \cos x \end{pmatrix}}_{i\mathbf{v}}.$$

Zkonstruovali jsme tedy komplexní řešení $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$. K nalezení potřebných dvou reálných řešení využijeme následující poznatek, který opět snadno prověříme dosazením:

Má-li homogenní soustava (7.20) komplexní řešení $\mathbf{y} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$, kde $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou reálné vektory, potom má také komplexně sdružené řešení $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ a zároveň reálná řešení $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

Podle tohoto tvrzení má naše soustava také reálná řešení

$$\mathbf{u} = \mathrm{e}^{-6x}\begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \mathrm{e}^{-6x}\begin{pmatrix} \sin x \\ \sin x + \cos x \end{pmatrix},$$

která jsou lineárně nezávislá. Obecné řešení je pak tvaru $\mathbf{y} = C_1\mathbf{u} + C_2\mathbf{v}$, tedy

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \mathrm{e}^{-6x}[C_1\cos x + C_2\sin x] \\ y_2 &= \mathrm{e}^{-6x}[(C_1 + C_2)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x)] \end{aligned}\right\}, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 7.14. Řešíme soustavu

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 - y_2 \end{aligned}\right\}. \tag{7.31}$$

Řešení. Charakteristická rovnice

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

má dvojnásobný reálný kořen $\lambda = -2$. V tomto případě máme pro určení vlastního vektoru $\mathbf{h}$ příslušnému vlastnímu číslu $\lambda = -2$ k dispozici jedinou rovnici tvaru $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{h} = \mathbf{o}$, tj.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{tedy např.} \quad h_1 = 1,\ h_2 = -1.$$

Dostáváme tedy jedno partikulární řešení

$$\mathbf{u} = \mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Protože jsme vyčerpali všechny možnosti, které plynou z charakteristické rovnice, hledejme další partikulární řešení $\mathbf{v}$ ve tvaru

$$\mathbf{v} = \mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} P_1(x) \\ Q_1(x) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} ax + a_1 \\ bx + b_1 \end{pmatrix}, \tag{7.32}$$

kde $P_1(x) = ax + a_1,\ Q_1(x) = bx + b_1$ jsou polynomy prvního stupně (na rozdíl od vyjádření pro $\mathbf{u}$ tedy zvyšujeme stupeň konstantních polynomů h_1, h_2 o jedna). Dosazením (7.32) do (7.31) dostaneme po zkrácení výrazem e^{-2x}:

$$\begin{aligned} -2ax - 2a_1 + a &= -3ax - 3a_1 - bx - b_1\,, \\ -2bx - 2b_1 + b &= ax + a_1 - bx - b_1\,. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme

$$\begin{aligned} x^1: &\quad -2a = -3a - b, \quad -2b = a - b\,, \\ x^0: &\quad -2a_1 + a = -3a_1 - b_1, \quad -2b_1 + b = a_1 - b_1\,. \end{aligned}$$

Rovnice jsou zřejmě závislé; zvolíme

$$a = 1, \quad a_1 = 0\,,$$

takže dostaneme $b = -1$, $b_1 = -1$. Odtud dosazením do (7.32)

$$\mathbf{v} = \mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} x \\ -x-1 \end{pmatrix}. \tag{7.33}$$

Obecné řešení je tvaru $\mathbf{y} = C_1\mathbf{u} + C_2\mathbf{v}$, tedy

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{-2x} \\ y_2 &= (-C_1 - C_2 - C_2x)\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}\right\}, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Poznámka 7.15. Všimněme si, že koeficienty a, b ve vztahu (7.32) bylo možné zvolit stejně jako složky h_1, h_2 vlastního vektoru $\mathbf{h}$. Tato okolnost není náhodná. Zobecněním postupu popsaného v přecházejícím příkladu na případ $n = 2$ lze ukázat, že je-li λ dvojnásobné reálné vlastní číslo matice A takové, že hodnost matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ je rovna jedné (v případě $n = 2$ tedy řádky této matice jsou závislé a alespoň jeden z nich je nenulový), pak lze partikulární řešení $\mathbf{u}$ předpokládat v obvyklém tvaru $\mathbf{u} = \mathrm{e}^{\lambda x}\mathbf{h}$ a řešení $\mathbf{v}$ pak ve tvaru $\mathbf{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}(\mathbf{h}x + \bar{\mathbf{h}})$, kde vektor $\bar{\mathbf{h}}$ vyhovuje podmínce

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{h}\,.$$

Poznamenejme ještě, že uvedený postup neplatí v případě, má-li matice $\mathbf{A}$ dvojnásobné reálné vlastní číslo λ takové, že hodnost matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ je nulová. Tato situace nastane v případě, je-li daná soustava tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda y_1\,, \\ y_2' &= \lambda y_2\,. \end{aligned}$$

Tento tvar však není pro soustavy příliš typický a lze ho velmi snadno řešit postupnou integrací jednotlivých rovnic.

Postup v případě homogenní soustavy LODR1 s konstantními koeficienty pro neznámé funkce $y_1, \dots, y_n$, kde $n \geq 3$, je zobecněním výše uvedených postupů.

D. Obecná nehomogenní soustava LODR1

Je to soustava tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x), \tag{7.34}$$

kde $\mathbf{A}(x)$ je maticová funkce proměnné x spojitá na intervalu I a funkce $\mathbf{f}(x)$ je na I spojitá a nenulová.

O struktuře obecného řešení nehomogenní soustavy (7.34) platí následující analogie věty o řešení nehomogenní LODRn:

Věta 7.16. (Struktura obecného řešení) Obecné řešení soustavy (7.34) lze psát ve tvaru

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p\,, \tag{7.35}$$

kde $\mathbf{y}_h$ je obecné řešení příslušné homogenní soustavy a $\mathbf{y}_p$ je nějaké partikulární řešení původní nehomogenní soustavy (7.34).

Důkaz lze snadno provést přímým dosazením.

Poznámka 7.17. K určení obecného řešení nehomogenní soustavy (7.34) tedy podle předcházející věty musíme znát obecné řešení příslušné homogenní soustavy a jedno (libovolné) řešení původní nehomogenní soustavy. Odtud také vyplývá, že exaktně budeme schopni řešit pouze soustavy (7.34) s konstantními koeficienty.

Věta 7.18. (Princip superpozice) Platí v nezměněné podobě jako v případě nehomogenní LODRn. Lze-li tedy v nehomogenní soustavě (7.34) vektor $\mathbf{f}(x)$ rozložit na součet tvaru

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}_1(x) + \mathbf{f}_2(x) + \cdots + \mathbf{f}_r(x)$$

a dovedeme-li určit partikulární řešení $\mathbf{y}_{p_j}(x)$ rovnice

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}_j(x),$$

pak

$$\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{y}_{p_1}(x) + \mathbf{y}_{p_2}(x) + \cdots + \mathbf{y}_{p_r}(x)$$

je partikulární řešení původní rovnice (7.34).

K nalezení obecného (resp. partikulárního řešení) nehomogenní soustavy (7.34) máme opět k dispozici metodu variace konstant a metodu neurčitých koeficientů.

E. Metoda variace konstant

Princip metody je tentýž jako v případě LODR1, resp. LODRn. Předpokládejme, že $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ jsou lineárně nezávislá partikulární řešení přidružené homogenní soustavy. Dále nechť matice $\mathbf{Y}(x)$ je příslušná fundamentální matice řešení přidružené homogenní soustavy. Pak obecné řešení této homogenní soustavy je tvaru

$$\mathbf{y}_h(x) = C_1\mathbf{y}_1(x) + C_2\mathbf{y}_2(x) + \cdots + C_n\mathbf{y}_n(x) = \mathbf{Y}(x)\mathbf{c}\,,$$

kde $\mathbf{c} = (C_1, C_2, \dots, C_n)^T$. Obecné řešení $\mathbf{y}(x)$ dané nehomogenní soustavy (7.34) hledejme ve tvaru

$$\mathbf{y}(x) = C_1(x)\mathbf{y}_1(x) + C_2(x)\mathbf{y}_2(x) + \cdots + C_n(x)\mathbf{y}_n(x) = \mathbf{Y}(x)\mathbf{c}(x)\,, \tag{7.36}$$

$\mathbf{c}(x) = (C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x))^T$, přičemž složky $\mathbf{c}(x)$ je třeba určit.

Dosaďme (7.36) do (7.34):

$$\mathbf{Y}'(x) \cdot \mathbf{c}(x) + \mathbf{Y}(x) \cdot \mathbf{c}'(x) = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{Y}(x) \cdot \mathbf{c}(x) + \mathbf{f}(x)\,.$$

Odtud využitím vztahu $\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{Y}(x)$ dostáváme

$$\mathbf{Y}(x) \cdot \mathbf{c}'(x) = \mathbf{f}(x)\,. \tag{7.37}$$

Soustava (7.37) je soustavou pro neznámé $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$. Maticí soustavy (7.37) je fundamentální matice $\mathbf{Y}(x)$ (tedy matice s nenulovým determinantem pro každé x); neznámé $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$ jsou proto danou soustavou určeny jednoznačně. K vyřešení soustavy (7.37) lze podobně jako u metody variace konstant pro LODRn užít např. Gaussovy eliminační metody nebo Cramerova pravidla. Integrací takto určených vztahů pro $C_j'(x)$ dostaneme vyjádření pro $C_j(x)$, jejichž dosazením do (7.36) dostáváme vztah pro obecné řešení $\mathbf{y}$ soustavy (7.34).

Poznamenejme ještě, že nepíšeme-li ve vyjádření pro $C_j(x)$ integrační konstanty, pak dosazením tohoto vztahu do (7.36) obdržíme vyjádření pro partikulární řešení $\mathbf{y}_p$ soustavy (7.34). Obecné řešení $\mathbf{y}$ pak určíme snadno pomocí vztahu (7.35).

Příklad 7.19. Určeme obecné řešení soustavy

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 4y_2 + \cos x \\ y_2' &= -y_1 - 2y_2 + \sin x \end{aligned}\right\}, \quad \text{tj.} \quad \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}. \tag{7.38}$$

Řešení. I. Podle výše popsaného postupu řešíme nejprve přidruženou homogenní soustavu. Charakteristická rovnice je tvaru $\lambda^2 = 0$ a má kořeny $\lambda_{1,2} = 0$.

Vlastní vektor $\mathbf{h}$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda_{1,2} = 0$ získáme jako řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tj. např. $h_1 = 2$, $h_2 = -1$. Partikulární řešení $\mathbf{u}$ je tedy tvaru

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Partikulární řešení $\mathbf{v}$ hledáme ve tvaru

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2x + \bar{h}_1 \\ -x + \bar{h}_2 \end{pmatrix},$$

kde složky $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$ vyhovují soustavě

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Volíme-li např. $\bar{h}_2 = 0$, pak $\bar{h}_1 = 1$, a tedy

$$\mathbf{y}_h = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2x + 1 \\ -x \end{pmatrix}.$$

II. Hledejme nyní obecné řešení $\mathbf{y}$ soustavy (7.38) ve tvaru

$$\mathbf{y} = C_1(x) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2(x) \begin{pmatrix} 2x + 1 \\ -x \end{pmatrix}, \qquad C_1(x),\, C_2(x) = ? \tag{7.39}$$

K určení $C_1(x)$, $C_2(x)$ nejprve vyřešíme soustavu (7.37) pro neznámé $C_1'(x)$, $C_2'(x)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2x + 1 \\ -1 & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}.$$

Pomocí elementárních úprav dostáváme řešení této soustavy ve tvaru

$$C_1'(x) = -2x\sin x - x\cos x - \sin x, \qquad C_2'(x) = 2\sin x + \cos x\,.$$

Odtud integrací per partes

$$C_1(x) = 2x\cos x - (x+2)\sin x + C_1, \qquad C_2(x) = -2\cos x + \sin x + C_2\,.$$

Dosazením těchto vztahů do (7.39) a následnou úpravou máme

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2x+1 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\cos x - 3\sin x \\ 2\sin x \end{pmatrix}.$$

F. Metoda neurčitých koeficientů

Tuto metodu lze užít pro hledání partikulárního řešení $\mathbf{y}_p(x)$ v případě, že složky vektoru $\mathbf{f}(x)$ jsou funkce popsané ve stejnojmenné metodě pro hledání partikulárního řešení nehomogenní LODRn. Jsou-li všechny složky téhož typu, je postup obdobný jako u LODRn. V opačném případě $\mathbf{f}(x)$ rozdělíme na součet více vektorů se složkami téhož typu a užijeme princip superpozice.

Příklad 7.20. Určeme obecné řešení soustavy

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 4y_2 + \cos x \\ y_2' &= -y_1 - 2y_2 + \sin x \end{aligned}\right\}, \quad \text{tj.} \quad \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}.$$

Řešení. Daná soustava je tatáž jako soustava (7.37) rozřešená v předcházejícím příkladu pomocí metody variace konstant. Nyní tutéž soustavu vyřešíme metodou neurčitých koeficientů, což nám umožní porovnat obě tyto metody z hlediska efektivity výpočtu.

Podle předcházejícího příkladu platí pro řešení $\mathbf{y}_h$ příslušné homogenní soustavy vztah

$$\mathbf{y}_h = C_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2x+1 \\ -x \end{pmatrix}.$$

Naším úkolem je určit $\mathbf{y}_p$. Na základě tvaru $\mathbf{f}(x)$ hledejme $\mathbf{y}_p$ ve tvaru

$$\mathbf{y}_p = \begin{pmatrix} A\cos x + B\sin x \\ C\cos x + D\sin x \end{pmatrix}.$$

Protože tento tvar nemá s $\mathbf{y}_h$ žádný společný člen, můžeme ho považovat za definitivní. Dosazením do dané soustavy dostáváme

$$\begin{aligned} -A\sin x + B\cos x &= 2A\cos x + 2B\sin x + 4C\cos x + 4D\sin x + \cos x, \\ -C\sin x + D\cos x &= -A\cos x - B\sin x - 2C\cos x - 2D\sin x + \sin x\,. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u funkcí $\sin x$ a $\cos x$ dostáváme čtyři rovnice pro A, B, C, D

$$-A = 2B + 4D, \quad B = 2A + 4C + 1, \quad -C = -B - 2D + 1, \quad D = -A - 2C\,,$$

jejichž řešením je čtveřice $A = -2$, $B = -3$, $C = 0$, $D = 2$. Obecné řešení $\mathbf{y}$ dané soustavy je pak tvaru

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p = C_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2x+1 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\cos x - 3\sin x \\ 2\sin x \end{pmatrix},$$

kde C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$.

G. Numerické řešení počátečních problémů pro soustavy ODR1 a ODRn

Uvažujme-li soustavy LODR1 s nekonstantními koeficienty, nebo obecněji nelineární soustavy ODR1, pak obvykle nemáme k dispozici metodu, jak určit hledané řešení exaktně. V těchto případech tedy musíme přistoupit k numerickému (přibližnému) řešení.

Numerické metody řešení počátečních problémů pro ODR1 se dají bez obtíží zobecnit na případ numerického řešení počátečních problémů pro soustavy ODR1, resp. pro ODRn. Předmětem tohoto oddílu je velmi stručné pojednání o tomto tématu.

Numerické řešení soustav ODR1. Princip naznačíme na případě počátečního problému pro soustavu dvou diferenciálních rovnic prvního řádu. Uvažujme tento problém ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} y' &= f(x,y,z) \\ z' &= g(x,y,z) \end{aligned}\right\}, \tag{7.40}$$

$$y(0) = y_0, \qquad z(0) = z_0\,. \tag{7.41}$$

Při numerickém řešení počátečního problému (7.40), (7.41) hledáme přibližnou hodnotu vektoru $(y,z)^T$ ve vybraných uzlech

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h, \ldots, \quad x_i = ih, \ldots, \quad x_n = a$$

intervalu $\langle 0, a\rangle$. Přibližnou hodnotu složek y, resp. z hledaného řešení v uzlu x_i označíme symboly Y_i, resp. Z_i.

Nejjednodušší numerickou metodou řešení počátečních problémů pro ODR1 byla explicitní Eulerova metoda. Analogií této metody v případě počátečního problému (7.40), (7.41) je následující předpis pro výpočet Y_i, Z_i:

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + hf(x_i, Y_i, Z_i), \\ Z_{i+1} &= Z_i + hg(x_i, Y_i, Z_i), \end{aligned} \tag{7.42}$$

$i = 0, 1, \ldots, n-1$; klademe přitom $Y_0 = y_0$, $Z_0 = z_0$ (viz (7.41)).

Numerické řešení ODRn. Otázka numerického řešení počátečního problému pro ODRn je zpravidla řešena převedením tohoto problému na počáteční problém pro soustavu ODR1 (viz předcházející kapitola, oddíl A) a následným využitím vhodné numerické metody pro tuto soustavu (tedy např. formule (7.42)). Postup ukážeme na příkladu.

Příklad 7.21. Pomocí Eulerovy metody (7.42) určeme přibližnou hodnotu řešení počátečního problému

$$\ddot\varphi + \sin\varphi = 0, \qquad \varphi(0) = \frac{\pi}{4},\ \dot\varphi(0) = 0$$

v bodě $t = 1$.

Řešení. Poznamenejme, že daný počáteční problém je zjednodušený model pohybu matematického kyvadla o délce $l = 9{,}81\,[m]$. Naším úkolem je určit přibližnou hodnotu úhlové výchylky φ v čase $t = 1\,[s]$, přičemž počáteční stav kyvadla (tj. počáteční výchylka a počáteční úhlová rychlost) je určen danými počátečními podmínkami.

Nejdříve přepíšeme tuto úlohu na počáteční problém pro soustavu dvou ODR1. Položíme $y = \varphi$, $z = \dot\varphi$ a dostáváme:

$$\left.\begin{aligned} \dot y &= z \\ \dot z &= -\sin y \end{aligned}\right\}, \qquad y(0) = \frac{\pi}{4},\ z(0) = 0\,.$$

Dále zvolíme $h = 10^{-1}\,[s]$, tedy $x_0 = 0$, $x_1 = 10^{-1}$, $x_2 = 10^{-2}, \ldots, x_{10} = 1$. Pak podle (7.42) platí

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + 0{,}1Z_i, \\ Z_{i+1} &= Z_i - 0{,}1\sin Y_i, \end{aligned}$$

přičemž klademe $Y_0 = \pi/4$, $Z_0 = 0$. Odtud postupným výpočtem hodnot Y_1, Z_1, Y_2, $Z_2, \ldots$ nakonec obdržíme

$$Y_{10} = 0{,}4781, \qquad Z_{10} = -0{,}6434\,.$$

Všimněme si, že jsme kromě přibližné hodnoty úhlové výchylky v daném čase $t = 1$ ($Y_{10} = 0,4781$) vypočetli také přibližnou hodnotu úhlové rychlosti ve stejném časovém okamžiku ($Z_{10} = -0,6434$).

Řešení ODR pomocí mocninných řad. Princip metody spočívá v tom, že řešení dané rovnice hledáme ve tvaru mocninné řady se středem v bodě, v jehož okolí je toto řešení definováno (nejčastěji se jedná o bod, v němž je předepsána počáteční podmínka, příp. počáteční podmínky). Ilustrujme tuto metodu na následujícím příkladu.

Příklad 7.22. Pomocí rozvoje do mocninné řady určeme řešení počátečního problému

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 1\,. \tag{7.43}$$

Řešení. Počáteční podmínky jsou předepsány v bodě $x_0 = 0$, a proto hledejme řešení y problému (7.43) ve tvaru mocninné řady

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots\,, \qquad a_k = ? \tag{7.44}$$

K určení koeficientů a_k této řady je třeba podle vztahu

$$a_k = \frac{y^{(k)}(0)}{k!} \tag{7.45}$$

určit hodnotu funkce y a všech jejích derivací v bodě $x_0 = 0$. Podle počátečních podmínek platí $y(0) = y'(0) = 1$, a odtud dále podle (7.43) $y''(x) = -y(x)$, tj. $y''(0) = -1$.

Hodnoty $y^{(k)}(0)$ pro $k = 2, 3, \dots$ nyní určíme opakovanou derivací zadané rovnice a následným dosazením bodu $x_0 = 0$. Proveďme tedy alespoň první dva výpočty: $y'''(0) = -y'(0) = -1$, $y^{(4)}(0) = -y''(0) = 1$. Z provedených výpočtů tedy podle (7.45) dostáváme

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{-1}{2!} = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{-1}{3!} = -\frac{1}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}.$$

Úspěšnost této metody tedy zřejmě závisí na možnosti vyjádřit hodnotu $y^{(k)}(0)$ pro libovolné přirozené k. Toto vyjádření je však proveditelné pouze ve speciálních případech, a proto se obvykle spokojíme s výpočtem $y^{(k)}(0)$ (a tedy i koeficientů a_k) pro konečný počet hodnot k. Dosazením takto určených koeficientů do (7.44) a následným zanedbáním všech zbývajících členů řady, jejichž koeficienty nebyly vypočteny, získáme (Taylorův) polynom představující přibližné řešení daného problému.

V našem případě tedy dostáváme přibližné vyjádření řešení y ve tvaru

$$y \approx P_4(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\,.$$

Otázkou odhadu chyby této náhrady se zde zabývat nebudeme. Intuitivně je však zřejmé, že tento odhad je ovlivněn jednak stupněm příslušného Taylorova polynomu a jednak hodnotou x (tedy vzdáleností daného bodu od středu mocninné řady (7.44), v němž je předepsána počáteční podmínka).

Vraťme se však v daném příkladu ještě jednou k výpočtu koeficientů a_k mocninné řady (7.44). Počáteční problém (7.43) je velmi speciální a vyjádření libovolné derivace svého řešení v počátečním bodě umožňuje. Zobecněním předcházejících výpočtů proto snadno zjistíme, že řešení y počátečního problému (7.43) lze psát ve tvaru nekonečné řady

$$y = 1 + x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots\,.$$

Nyní lehce ověříme, že uvedená řada konverguje absolutně pro každé $x \in (-\infty, \infty)$, a podle našich poznatků (kapitola Číselné řady, oddíl D) ji můžeme libovolně přerovnat. Platí proto vyjádření

$$y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\,.$$

Řady uvedené v předcházejícím vyjádření jsou ale rozvoje funkcí $\cos x$, $\sin x$. Platí tedy snadno ověřitelný závěr, že řešení problému (7.43) je funkce $y = \cos x + \sin x$.

Shrnutí poznatků

Se soustavami ODR1 se setkáváme především v rovinných a prostorových úlohách souvisejících s mechanikou. Mezi soustavami ODR1 pro n neznámých funkcí a ODRn existuje úzká souvislost, což platí obzvlášť pro rovnice lineární.

Struktura množiny řešení homogenní soustavy LODR1 je proto zcela analogická struktuře množiny řešení homogenní LODR vyšších řádů. Speciálně, známe-li fundamentální systém řešení, pak obecné řešení je určeno lineární kombinací funkcí (vektorů) z fundamentálního systému. Fundamentální systém je tvořen tolika vektory, kolik je neznámých funkcí v dané soustavě. Vektory tvořící fundamentální systém jsme schopni určit exaktně pouze v případě, jsou-li koeficienty dané soustavy konstanty.

Nehomogenní soustavy LODR1 mají stejnou strukturu i metody řešení jako nehomogenní LODRn. Řešíme je tedy buďto univerzální metodou variace konstant, nebo početně výhodnější metodou neurčitých koeficientů (lze-li tato metoda v závislosti na tvaru pravé strany soustavy použít). Je také možné použít metodu eliminační, převádějící řešenou soustavu na odpovídající nehomogenní LODRn. Všechny tyto metody umíme využít pouze v případě, jedná-li se o nehomogenní soustavu LODR1 s konstantními koeficienty.

Nehomogenní soustavy LODR1 s nekonstantními koeficienty, a obecně nelineární soustavy ODR1 pak musíme řešit numericky. Stejným způsobem postupujeme i v případě obecné ODRn, kterou pro účel numerického řešení obvykle přepíšeme na soustavu ODR1. Jinou možností, jak alespoň přibližně určit řešení počátečního problému pro ODRn, je hledat toto řešení ve tvaru mocninné řady.