

## 8. Okrajový problém pro LODR2

### A. ZÁKLADNÍ POZNATKY O SOUSTAVÁCH ODR1

V kapitole 6 jsme zavedli pojem lineární diferenciální rovnice  $n$ -tého řádu, která je pro  $n = 2$  tvaru

$$A_2(x)y'' + A_1(x)y' + A_0(x)y = f(x). \quad (8.1)$$

Dosud jsme se v našich úvahách zabývali pouze problémy počátečními; s rovnicí (8.1) jsme totiž uvažovali pouze počáteční podmínky

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad (8.2)$$

kde  $x_0$  je libovolný vnitřní bod daného intervalu a  $y_0, y_1$  jsou libovolná reálná čísla.

Tyto podmínky, jednoznačně vymezující hledané řešení, jsou tedy dány v jednom bodě (nejčastěji se jedná o předepsání polohy a rychlosti v počátečním časovém okamžiku). Často je však třeba řešit diferenciální rovnice s podmínkami, které předepisují hodnoty řešení v různých bodech. Hledáme-li např. průhyb nosníku, řešíme příslušnou diferenciální rovnici s podmínkami, které charakterizují uložení nosníku na jeho koncích. Tyto podmínky pak nazýváme *okrajovými podmínkami*.

**Definice 8.1. (Typy okrajových podmínek)** Nejjednodušším typem okrajových podmínek jsou tzv. *Dirichletovy podmínky*

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b,$$

kde  $a, b$  jsou zpravidla koncové body intervalu, v němž hledáme řešení a  $y_a, y_b$  jsou daná čísla. Jiným typem okrajových podmínek jsou tzv. *Neumannovy podmínky*

$$y'(a) = y_a, \quad y'(b) = y_b.$$

Uvedené podmínky lze také kombinovat; např. jako

$$y(a) = y_a, \quad y'(b) = y_b.$$

Obecně lze všechny tyto podmínky popsat vztahy

$$\begin{aligned} \alpha y(a) + \beta y'(a) &= y_a, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) &= y_b, \end{aligned} \quad (8.3)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  jsou daná čísla vyhovující podmínkám  $|\alpha| + |\beta| \neq 0, |\gamma| + |\delta| \neq 0$  (tj. alespoň jedno z čísel  $\alpha, \beta$  a alespoň jedno z čísel  $\gamma, \delta$  je různé od nuly).

**Definice 8.2. (Okrajový problém)** Úlohu určit funkci  $y = y(x)$  vyhovující pro  $x \in (a, b)$  rovnici (8.1) a splňující okrajové podmínky (8.3) nazýváme *okrajovým problémem*. Je přitom přirozené předpokládat, že funkce  $y$  je spojitá v uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$  (tedy včetně krajních bodů.)

Jestliže  $y_a = y_b = 0$ , pak podmínky (8.3) nazveme *homogenními okrajovými podmínkami*; v opačném případě (tj. je-li alespoň jedna z hodnot  $y_a, y_b$  různá od nuly) hovoříme o *nehomogenních okrajových podmínkách*.

Poznamenejme, že okrajový problém lze zavést i pro obecnou ODR $n$ . Veškeré další úvahy však budeme pro jednoduchost provádět pouze pro výše zmíněnou LODR2.

V souvislosti se zavedenými pojmy vzniká otázka, zda má opodstatnění se okrajovými problémy dále zabývat. Mohlo by se zdát, že vše funguje stejně jako v případě počátečních problémů: Je-li rovnice (8.1) rovnicí s konstantními koeficienty, určíme obecné řešení této rovnice a následně dosazením okrajových podmínek specifikujeme konstanty  $C_1, C_2$  z obecného řešení, čímž dostáváme jednoznačně určené řešení příslušného okrajového problému. Je-li rovnice (8.1) rovnicí s nekonstantními koeficienty, převedeme ji na soustavu dvou

LODR1 a tu řešíme numerickými postupy (kapitola 7, oddíl G). Tato analogie však pro okrajové problémy neplatí.

**Existence a jednoznačnost řešení okrajových problémů.** Vyšetříme několik okrajových problémů pro rovnici

$$y'' + y = 0. \quad (8.4)$$

Obecné řešení rovnice (8.4) je dáno vztahem

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad (8.5)$$

a je tedy definováno pro všechna reálná  $x$ . V další části předepíšeme různé okrajové podmínky Dirichletova typu a budeme zkoumat řešitelnost příslušných okrajových problémů.

a) Nejprve vyřešíme rovnici (8.4) s okrajovými podmínkami

$$y(0) = 1, \quad y(\pi/2) = 0. \quad (8.6)$$

Dosazením podmínek (8.6) do obecného řešení (8.5) obdržíme  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$ . Okrajový problém (8.4), (8.6) tedy má jediné řešení  $y = \cos x$ .

b) Nyní volíme okrajové podmínky

$$y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0. \quad (8.7)$$

Podobně jako v části a) dospějeme k soustavě  $C_1 = 1$ ,  $-C_1 = 0$ , která nemá řešení, a proto ani okrajový problém (8.4), (8.7) nemá řešení.

c) Řešíme rovnici (8.4) s homogenními okrajovými podmínkami

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \quad (8.8)$$

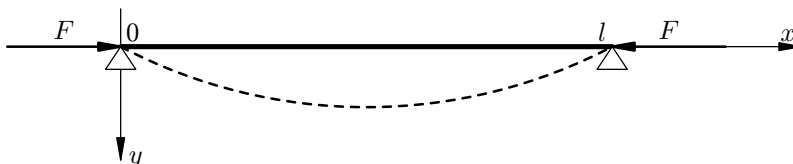
Tyto podmínky vedou na soustavu  $C_1 = 0$ ,  $-C_1 = 0$ , která má nekonečně mnoho řešení:  $C_1 = 0$ ,  $C_2$  libovolné. Proto má i okrajový problém (8.4), (8.8) nekonečně mnoho řešení tvaru  $y = C_2 \sin x$ ,  $C_2$  je libovolné.

**Existence a jednoznačnost řešení počátečních problémů.** Předcházející příklady ukazují, že ani ve velmi jednoduchém lineárním případě nemusí mít okrajový problém žádné řešení, příp. jich může mít nekonečně mnoho. S podobnými výsledky jsme se při řešení diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami nesetkali. Skutečně, v případě počátečních problémů pro LODRn platí následující obecná věta o existenci a jednoznačnosti řešení, kterou zformulujeme pro případ  $n = 2$ :

Jsou-li funkce  $A_2(x)$ ,  $A_1(x)$ ,  $A_0(x)$ ,  $f(x)$  spojité na daném intervalu a  $A_2(x)$  zde nikde nenabývá nulové hodnoty, pak existuje právě jedno řešení rovnice (8.1) splňující počáteční podmínky (8.2).

Vraťme se ještě k předcházejícímu příkladu. Na jeho základě může vzniknout dojem, že případy, kdy řešení daného okrajového problému neexistuje, příp. není určeno jednoznačně, nepopisují žádný rozumný fyzikální jev či technický problém, a jsou proto nezajímavé. Na následujícím příkladu (který je z početního hlediska téměř totožný s předcházejícím) budeme demonstrovat skutečnost, že tomu tak není a že právě tyto „problematické“ případy jsou velmi důležité.

**Příklad 8.3. (Problém vzpěrné pružnosti)** Uvažujme pružnou dokonale přímou tyč délky  $l$ , která je na koncích prostě uložena a namáhána na vzpěr silou  $F$  působící v ose tyče.



Obr. 8.1: Vzpěrná pružnost

**Řešení.** Na obr. 8.1 je vyznačena volba systému souřadnic  $x$ ,  $y$ , kde  $y = y(x)$  je průhyb. Zvyšujeme-li postupně sílu  $F$  až do určité meze, zůstává tyč stále přímá. Jakmile osová síla  $F$  dosáhne této meze, tyč se nuceně vychýlí. V této souvislosti se budeme zajímat nejen o nalezení průhybové křivky, ale především o stanovení

zmíněné mezní hodnoty  $F$ . Tato hodnota se v teorii pružnosti nazývá *kritická hodnota* síly  $F$  a značí se zpravidla symbolem  $F_{\text{kr}}$ .

K tomu, abychom mohli příslušnou diskusi provést, je třeba nejprve sestavit diferenciální rovnici pro hledaný průhyb tyče. Po provedení jistých zjednodušení lze tuto rovnici psát ve tvaru

$$y'' + a^2 y = 0, \quad a^2 = \frac{F}{EI}, \quad x \in (0, l), \quad (8.9)$$

kde  $E$  je modul pružnosti v tahu a  $I$  moment setrvačnosti průřezu tyče vzhledem k ohybové ose (obě veličiny předpokládáme konstantní po celé délce tyče). K této rovnici ještě přistupují homogenní okrajové podmínky

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad (8.10)$$

neboť v koncových bodech tyče je průhyb nulový.

Nyní vyřešíme okrajový problém (8.9), (8.10). Obecné řešení rovnice (8.9) je tvaru

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Dosazením okrajových podmínek (8.10) do obecného řešení dostáváme homogenní soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} C_1 &= 0, \\ C_1 \cos al + C_2 \sin al &= 0, \end{aligned}$$

kteřá má vždy nulové řešení (tj.  $C_1 = C_2 = 0$ ). Aby tato soustava měla i nenulové řešení (neboť hledáme podmínky pro nenulový průhyb tyče), musí být  $\sin al = 0$ .

Je-li tedy  $al = k\pi$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , tj.  $a = k\pi/l$ , bude mít okrajový problém (8.9), (8.10) také nenulová řešení; budou jimi funkce

$$y = C_2 \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots$$

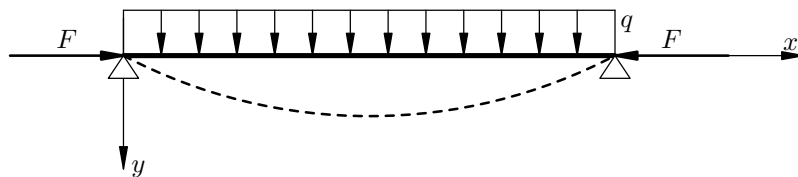
Kritickými silami jsou zřejmě hodnoty  $F = EI(k\pi/l)^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Nejmenší kritickou silou, při níž dojde k průhybu tyče, tedy je

$$F_{\text{kr}} = EI \left( \frac{\pi}{l} \right)^2.$$

Všimněme si dále, že odpovídající průhybové čáry jsou dány nejednoznačně, neboť konstanta  $C_2$  je libovolná.

Rozšířme nyní naši úlohu v tom smyslu, že tyč bude vertikálně zatížena rovnoměrným zatížením  $q$  (viz obr. 8.2). Bez uvedení bližšího odvození píšeme diferenciální rovnici průhybové čáry ve tvaru

$$y'' + a^2 y = bx^2 + cx, \quad \text{kde } a^2 = \frac{F}{EI}, \quad b = \frac{q}{2EI}, \quad c = -\frac{ql}{2EI}. \quad (8.11)$$



Obr. 8.2: Rovnoměrné zatížení

Protože okrajové podmínky (8.10) zůstávají nezměněny, řešíme okrajový problém (8.11), (8.10).

Rovnice (8.11) je nehomogenní LODR2 s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou ve tvaru polynomu druhého stupně. Pomocí metody neurčitých koeficientů stanovíme obecné řešení (8.11) ve tvaru

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{b}{a^2} x^2 + \frac{c}{a^2} x - \frac{2b}{a^4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Dosazením podmínek (8.10) zjistíme, že je-li  $al \neq k\pi$ , pak obdržíme jednoznačně určené vyjádření průhybové čáry ve tvaru

$$y = \frac{b}{a^2} x^2 + \frac{c}{a^2} x + \frac{2b}{a^4} (\cos ax - 1) + \frac{2b}{a^4} \frac{1 - \cos al}{\sin al} \sin ax. \quad (8.12)$$

Je-li však  $al = k\pi$ , pak okrajový problém (8.11), (8.10) nemá žádné řešení. Všimněme si přitom, že vztah  $al = k\pi$  odpovídá případu, kdy osová síla  $F$  nabývá svých kritických hodnot.

Získané výsledky lze nyní interpretovat takto: Je-li hodnota osově síly  $F$  menší než kritická hodnota  $F_{kr}$ , pak  $0 < al < \pi$  a průhyb tyče je dán jednoznačně vztahem (8.12). Blíží-li se  $F$  k  $F_{kr}$ , pak se hodnota  $al$  blíží k  $\pi$ , a tedy  $\sin al$  se blíží (kladnými hodnotami) k nule. Pak ovšem roste pravá strana vztahu (8.12) (a tím i hledaný průhyb) nade všechny meze a při  $F = F_{kr}$  se stává průhyb nekonečný, tyč praskne.

## B. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ OKRAJOVÝCH PROBLÉMŮ PRO LODR2

V aplikacích se často setkáváme s okrajovými problémy pro lineární rovnice s nekonstantními koeficienty (průhyb, resp. stabilita tyče proměnného průřezu apod.), či obecněji s rovnicemi nelineárními. Tyto rovnice je proto třeba řešit numericky. Pro účel numerického řešení okrajových problémů však nelze využít metod, se kterými jsme se seznámili v rámci numerického řešení počátečních problémů pro ODRn. Důvod je jasný: po přepisu např. ODR2 na soustavu dvou ODR1 vyžaduje příslušná metoda dvě startovací hodnoty pro dvě neznámé funkce (okrajové podmínky však nabízí pouze jednu tuto hodnotu). Navíc druhá okrajová podmínka předepisuje hodnotu jedné neznámé funkce v konečném časovém okamžiku; splnění této podmínky nelze metodami pro numerické řešení počátečních problémů vyhovět.

V další části budeme uvažovat LODR2 s nekonstantními koeficienty ve tvaru

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \quad (8.13)$$

s Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$y(0) = y_0, \quad y(l) = y_l. \quad (8.14)$$

Předpokládejme dále, že okrajový problém (8.13), (8.14) je jednoznačně řešitelný (lze ukázat, že tento předpoklad je splněn např. tehdy, jsou-li funkce  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $f(x)$  spojité na  $\langle 0, l \rangle$ , přičemž zde platí  $b(x) \leq 0$ ). Na okrajovém problému (8.13), (8.14) budeme ilustrovat myšlenku jedné z nejjednodušších metod pro řešení okrajových problémů, tzv. *diferenční metody*.

**Princip diferenční metody.** Metoda spočívá v tom, že derivace hledané funkce  $y$  nahradíme v rovnici (8.13) příslušnými diferenčními podíly.

Uvažujme proto rozdělení intervalu  $\langle 0, l \rangle$  na  $n$  stejně velkých dílků délky  $h = l/n$  body

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h, \dots, \quad x_i = ih, \dots, \quad x_n = nh = l.$$

Dělicí body  $x_i$  nazveme *uzly* a množinu uzlů  $\{x_0, \dots, x_n\}$  nazveme *sítí*. Z tohoto důvodu je diferenční metoda nazývána často také *metodou sítě*. Podobně jako u numerického řešení počátečních problémů budeme i nyní hledat přibližné hodnoty neznámé funkce  $y$  ve vybraných uzlech dané sítě (přesněji ve vnitřních uzlech, neboť přesná hodnota řešení v krajních uzlech je předepsána vztahy (8.14)).

Ve vnitřních uzlech sítě tedy platí

$$y''(x_i) + a(x_i)y'(x_i) + b(x_i)y(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (8.15)$$

Označíme  $y_i = y(x_i)$ ,  $y'_i = y'(x_i)$ ,  $y''_i = y''(x_i)$ ,  $a_i = a(x_i)$ ,  $b_i = b(x_i)$ ,  $f_i = f(x_i)$  a derivace na levé straně (8.15) nahradíme diferenčními podíly takto:

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''_i \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}. \quad (8.16)$$

Nyní zaměníme výrazy  $y_{i-1}$ ,  $y_i$ ,  $y_{i+1}$  jejich přibližnými hodnotami  $Y_{i-1}$ ,  $Y_i$ ,  $Y_{i+1}$  a znaménko přibližné rovnosti v (8.16) nahradíme znaménkem rovnosti. Pak dosazením do (8.15) dostáváme

$$\frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{h^2} + a_i \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2h} + b_i Y_i = f_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (8.17)$$

přičemž z okrajových podmínek (8.14) plyne  $Y_0 = y_0$ ,  $Y_n = y_l$ .

Soustava (8.17) obsahuje  $n-1$  lineárních rovnic pro  $n-1$  neznámých  $Y_1, \dots, Y_{n-1}$ . Protože matice soustavy je třídiagonální, lze řešení soustavy získat např. Gaussovou eliminační metodou upravenou pro třídiagonální matice.

**Příklad** Okrajový problém

$$y'' - (1 + x^2)y = x, \quad (8.18)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \quad (8.19)$$

vyřešíme přibližně diferenční metodou s délkou kroku  $h = 0,2$ .

*Řešení:* Především poznamenejme, že okrajový problém (8.18), (8.19) je jednoznačně řešitelný, neboť funkce  $b(x) = -(1 + x^2)$ ,  $f(x) = x$  jsou v intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  spojité a funkce  $b(x)$  je v tomto intervalu záporná.

Interval  $\langle 0, 1 \rangle$  rozdělíme dělicími body

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0,2, \quad x_2 = 0,4, \quad x_3 = 0,6, \quad x_4 = 0,8, \quad x_5 = 1$$

na pět podintervalů délky  $h = 0,2$ . Hodnotu přibližného řešení v bodech  $x_i$  označíme  $Y_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 5$ ). V krajních bodech  $x_0 = 0$  a  $x_5 = 1$  volíme podle (11.19)  $Y_0 = 0$  a  $Y_5 = 0$  (tyto hodnoty jsou tedy stanoveny přesně). Diskretizací rovnice (8.18) dostáváme pomocí náhrady (8.16) vztahy

$$\frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{(0,2)^2} - (1 + (x_i)^2)Y_i = x_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Tuto lineární soustavu čtyř rovnic pro čtyři neznámé lze přepsat na tvar

$$\begin{pmatrix} -2,0416 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2,0464 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2,0544 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2,0656 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0080 \\ 0,0160 \\ 0,0240 \\ 0,0320 \end{pmatrix}.$$

Vyřešením této soustavy pak dostáváme

$$Y_1 = -0,0279, \quad Y_2 = -0,0490, \quad Y_3 = -0,0564, \quad Y_4 = -0,0428.$$

**Konvergence diferenční metody.** Diferenční metodou jsme tedy získali aproximaci řešení daného okrajového problému v určitých bodech (uzlech) uvažovaného intervalu. K tomu, abychom získali aproximaci řešení v celém intervalu, lze pomocí interpolace sestavit funkci procházející body  $(x_i, Y_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Pak vzniká přirozená otázka, totiž, jak mnoho se liší tato funkce od přesného řešení  $y$ . Lze zřejmě očekávat, že shoda bude tím lepší, čím jemnější dělení daného intervalu zvolíme. Tyto úvahy úzce souvisí s otázkou přesnosti jednotlivých aproximací  $Y_i$ . Bez odvození poznamenejme, že řešíme-li konkrétní okrajový problém (8.13), (8.14) pomocí schématu (8.17), pak existuje konstanta  $K > 0$ , nezávislá na  $h$ , taková, že

$$|y_i - Y_i| \leq Kh^2, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

kde krok  $h$  je dostatečně malý.

Je třeba ještě upozornit na skutečnost, že přesnost aproximací  $Y_i$  lze ovlivnit rovněž volbou jiné diferenční náhrady derivací, než představují vztahy (8.16). Přitom je ovšem rozumné vždy požadovat, aby tyto náhrady byly stejného řádu přesnosti.

## SHRNUTÍ POZNATKŮ

Okrajovým problémem rozumíme úlohu určit řešení dané rovnice vyhovující jistým okrajovým podmínkám. Okrajové problémy pro LODR2 (a obecně pro ODRn) nemusejí být jednoznačně řešitelné, a to ani v případě velmi jednoduchých rovnic. Právě případy, kdy řešení tohoto problému neexistuje, příp. není určeno jednoznačně, mají zásadní význam při získávání různých kritických hodnot (např. pro zatížení nosných sloupů). Nezbytnost numerického řešení okrajových problémů je dána stejnými okolnostmi jako v případě problémů počátečních. Numerické metody jsou však pro oba typy problémů odlišné, byť některé z nich mají řadu společných rysů (např. numerická náhrada derivace řešení v uzlových bodech).