Matice a determinanty

7. listopadu 2007

- Příklad 1.
- Příklad 2.
- Příklad 3.
- Příklad 4.

Příklad 1. Vynásobte matice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 1.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Násobíme první řádek a první sloupec, násobíme čísla na odpovídajících pozicích, dohromady sčítáme: $2 \cdot 0 + 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 = 2$.

Příklad 1.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Příklad 1.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Příklad 1.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 16 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Příklad 1.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 16 & -8 & \\ & & \end{pmatrix}$$

Příklad 1.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 16 & -8 & -8 \\ & & \end{pmatrix}$$

Příklad 1.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 16 & -8 & -8 \\ 13 & & \end{pmatrix}$$

Příklad 1.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 16 & -8 & -8 \\ 13 & -2 & \end{pmatrix}$$

Příklad 1.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 16 & -8 & -8 \\ 13 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Příklad 2. Spočtěte determinant matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 2.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 4$$

Příklad 2.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 4 + 0$$

Příklad 2.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 4 + 0 + 0$$

Příklad 2.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 4 + 0 + 0 - (6)$$

Příklad 2.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 4 + 0 + 0 - (6 + 0)$$

Příklad 2.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 4 + 0 + 0 - (6 + 0 + 0) = -2$$

Příklad 3. Spočtěte determinant matice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 3.

Řešení: První řádek opíšeme, upravíme druhý řádek:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \cdot 3 \\ \cdot 2 \\ \text{necháme} \\ \text{necháme} \end{array} \Big) + = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ \color{red}0 & \color{red}1 & \color{red}1 & \color{red}2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Řádek, který jsme upravovali, jsme násobili 2, je tedy třeba výsledek násobit $\frac{1}{2}$.

Příklad 3.

Řešení: Třetí řádek začíná nulou, upravíme čtvrtý řádek:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \cdot(-2) \\ \text{necháme} \\ \text{necháme} \\ \text{přičteme} \end{array} \Bigg) + \; = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

První řádek násobíme (-2) a přičítáme ke čtvrtému.

Příklad 3.

Řešení: V nové matici upravíme třetí řádek:

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{necháme} \\ \cdot(-2) \\ \text{přičteme} \\ \text{necháme} \end{array} \;)+\; = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Druhý řádek násobíme (-2) a přičítáme ke třetímu.

Příklad 3.

Řešení: Upravíme čtvrtý řádek:

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \text{necháme} \\ \bullet \\ \text{necháme} \\ \text{přičteme} \end{array} \Bigg)+ \;= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Druhý řádek přičítáme ke čtvrtému.

Příklad 3.

Řešení: Protože ve třetím řádku je více nul než ve čtvrtém, vyměníme je:

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{necháme} \\ \text{necháme} \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \Big) \text{ vyměníme} \quad = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Výměna řádků má za následek změnu znaménka, proto výsledek násobíme (-1).

Příklad 3.

Řešení: : Výsledek lze tedy psát:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot 4 = -2$$

Matice je ve schodovitém tvaru, její determinant je pak součin prvků na hlavní diagonále.

Příklad 4. Spočtěte inverzní matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.

Řešení: Výpočet provedeme pomocí algebraicky adjungované matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Prvek a_{11}^* je determinant z označených prvků matice A opatřený znaménkem $+$ (součet pozic $1, 1$ je sudý).

Příklad 4.

Řešení: Výpočet provedeme pomocí algebraicky adjungované matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Prvek a^*_{12} je determinant z označených prvků matice A opatřený znaménkem $-$ (součet pozic $1, 2$ je lichý).

Příklad 4.

Řešení: Výpočet provedeme pomocí algebraicky adjungované matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Prvek a^*_{13} je determinant z označených prvků matice A opatřený znaménkem $+$.

Příklad 4.

Řešení: Výpočet provedeme pomocí algebraicky adjungované matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 4 & & \\ & & \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Prvek a^*_{21} je determinant z označených prvků matice A opatřený znaménkem $-$.

Příklad 4.

Řešení: Výpočet provedeme pomocí algebraicky adjungované matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & \\ & & \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Prvek a^*_{22} je determinant z označených prvků matice A opatřený znaménkem $+$.

Příklad 4.

Řešení: Výpočet provedeme pomocí algebraicky adjungované matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & -2 \\ & & \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Prvek a^*_{23} je determinant z označených prvků matice A opatřený znaménkem $-$.

Příklad 4.

Řešení: Výpočet provedeme pomocí algebraicky adjungované matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & & \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Prvek a^*_{31} je determinant z označených prvků matice A opatřený znaménkem $+$.

Příklad 4.

Řešení: Výpočet provedeme pomocí algebraicky adjungované matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Prvek a^*_{32} je determinant z označených prvků matice A opatřený znaménkem $-$.

Příklad 4.

Řešení: Výpočet provedeme pomocí algebraicky adjungované matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Prvek a^*_{33} je determinant z označených prvků matice A opatřený znaménkem $+$.

Příklad 4.

Řešení: Výpočet provedeme pomocí algebraicky adjungované matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Matici jsme transponovali. Zbývá určit determinant.

Příklad 4.

Řešení: Výpočet provedeme pomocí algebraicky adjungované matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 11$$

Determinant určíme pomocí Sarrusova pravidla.

Příklad 4.

Řešení: Výpočet provedeme pomocí algebraicky adjungované matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Podle vzorce $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$