1. Funkce více proměnných

Definice 1.1. **Reálná funkce n-reálných proměnných $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$** je zobrazení, které každému $x \in \mathbf{R}^n$ přiřadí nejvýše jedno $f(x) \in \mathbf{R}$.

Prvky $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbf{R}^n$ se nazývají **body** n-rozměrného prostoru $\mathbf{R}^n$.

Množina $Df = \{x \in \mathbf{R}^n; \exists y \in \mathbf{R} : f(x) = y\}$ se nazývá **definiční obor** funkce f.

Množina $Hf = \{y \in \mathbf{R}; \exists x \in Df : f(x) = y\}$ se nazývá **obor hodnot** funkce f.

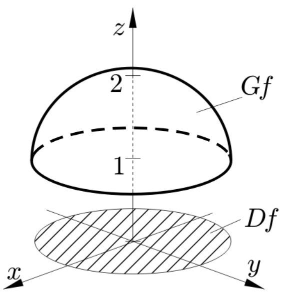
Množina $Gf = \{[x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)] \in \mathbf{R}^{n+1}; [x_1, \dots x_n] \in Df\}$ se nazývá **graf** funkce f.

Poznámka 1.2.

1. Místo $f([x_1, \dots, x_n])$ budeme pro jednoduchost psát pouze $f(x_1, \dots, x_n)$.
2. Z předchozí definice grafu plyne, že funkční hodnotu chápeme jako $n + 1$ souřadnici, tj. $x_{n+1} = f(x_1, \dots x_n)$.
3. Místo x_1, x_2, x_3 budeme psát x, y, z.
4. Pro $n = 2$ si lze graf f představovat jako rovinu, nebo její část, zakřivenou v $\mathbf{R}^3$, tj. jako plochu.
5. Pro $n > 2$ ztrácíme možnost názorné představy. V případě funkce tří proměnných je grafem funkce část čtyřrozměrného prostoru. Z analogie můžeme ale usuzovat, že grafem funkce tří proměnných je trojrozměrný prostor, který je zakřiven v $\mathbf{R}^4$. Jediným grafem funkce tří proměnných, který dokážeme znázornit, je graf funkce $f(x, y, z) = 0$. Grafem f je celý trojrozměrný prostor $\mathbf{R}^3$.

Příklad 1.3. Buď $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ funkce dvou proměnných definovaná vztahem $f(x, y) = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Namalujte graf funkce f.

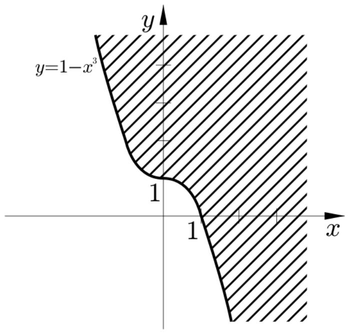
Řešení. Vyšetřeme nejprve definiční obor. Zřejmě $[x, y] \in Df \Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$. Tedy $Df = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Geometricky je definiční obor kruh se středem v počátku a poloměrem 1. Jednoduchou úvahou lze zjistit, že $Hf = \langle 1, 2\rangle$. Dále $Gf = \{[x, y, 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}] \in \mathbf{R}^3 : [x, y] \in Df\}$. Platí $z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Odtud $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$. Z analytické geometrie plyne, že graf funkce f je horní polovina kulové plochy o poloměru 1 se středem v bodě $[0, 0, 1]$. Graf je znázorněn v kartézské soustavě souřadnic (O, x, y, z) na Obrázku 1.1.



Obr. 1.1: Graf funkce $f(x, y) = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Příklad 1.4. Vyšetřete a nakreslete definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{\ln{(x^3 + y)}}$.

Řešení. Zřejmě platí, že $[x, y] \in Df \Leftrightarrow \ln{(x^3 + y)} \geq 0 \Leftrightarrow x^3 + y \geq 1$. Tedy $Df = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2 : y \geq 1 - x^3\}$. Nakreslíme obrázek. Viz Obrázek 1.2.



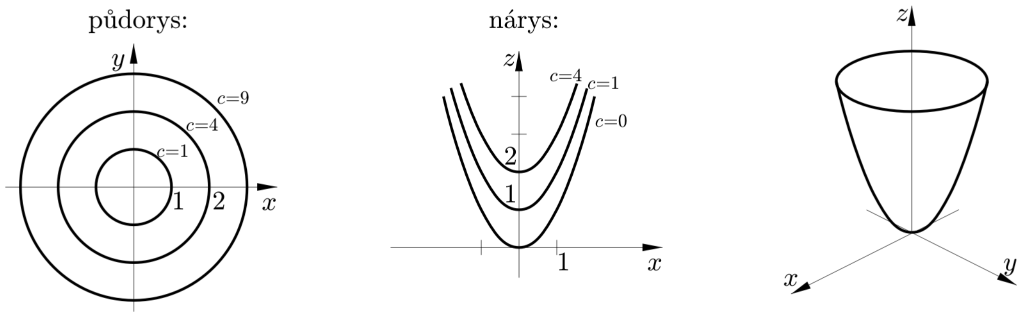
Obr. 1.2: Def. obor funkce $f(x,y) = \sqrt{\ln(x^3+y)}$

Metoda řezů

Graf funkce dvou proměnných je podmnožina trojrozměrného prostoru $\mathbf{R}^3$. Základní geometrickou představu o grafech funkcí $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, lze získat v kartézské soustavě souřadnic (O, x, y, z) pomocí řezů grafu Gf systémem rovin $g_c(x,y) = c$, tj. $z = c$, kde $c \in \mathbf{R}$. Řezy jsou tedy průniky grafů Gf a Gg_c. Podobně lze použít další systémy rovin, např. $x = c$ nebo $y = c$.

Příklad 1.5. Pomocí metody řezů vyšetřete a nakreslete graf funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Řešení. Řezy rovinami $z = c$ jsou pro $c > 0$ kružnice $x^2 + y^2 = c$ o poloměru $\sqrt{c}$. Pro $c = 0$ je řez bod $[0,0]$. Pro $c < 0$ jsou řezy prázdné množiny. Dále řezy rovinami $y = c$ jsou paraboly $z = x^2 + c^2$ s vrcholem ve výšce c^2. Odtud a ze symetrie funkce f již plyne, že graf funkce f vznikne rotací paraboly $z = x^2$ kolem osy z. Grafem f je tzv. rotační paraboloid. Viz Obrázek 1.3.



Obr. 1.3: Graf $f(x,y) = x^2 + y^2$ určený metodou řezů

Definice 1.6. Buďte $x, y \in \mathbf{R}^n$. Potom číslo $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ se nazývá **vzdálenost bodů x, y**.
Buď $x_0 \in \mathbf{R}^n, \delta > 0, \delta \in \mathbf{R}$. Pak množina $K(x_0, \delta) = \{x \in \mathbf{R}^n, d(x, x_0) < \delta\}$ se nazývá **δ–okolí bodu x_0**.

Poznámka 1.7.

1. δ-okolí bodu x_0 je otevřená koule v $\mathbf{R}^n$. Má střed v x_0 a poloměr δ.
2. Pro $n = 1$ dostáváme $K(x_0, \delta) = \{x \in R, |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
3. Platí
   i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
   ii) $d(x,y) = d(y,x)$;
   iii) $d(x,y) + d(y,z) \leq d(x,z)$, tzv. **trojúhelníková nerovnost**.

Definice 1.8. Buď $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$. Pak $x_0 \in \mathbf{R}^n$ se nazývá **vnitřní bod** množiny Ω, když existuje $K(x_0, \delta)$ tak, že $K(x_0, \delta) \subseteq \Omega$. Množina Ω, jejíž každý bod je vnitřní se nazývá **otevřená množina**.

Bod $x_0 \in \mathbf{R}^n$ se nazývá **hraniční bod** množiny Ω, když pro každé $\delta > 0$ platí $K(x_0, \delta) \cap \Omega \neq \emptyset \wedge$ $\wedge\, K(x_0, \delta) \cap (\mathbf{R}^n - \Omega) \neq \emptyset$.

Označme $h(\Omega)$ množinu všech hraničních bodů množiny Ω. Množina $h(\Omega)$ se nazývá **hranice množiny** Ω.

Množina Ω se nazývá **uzavřená množina**, když $h(\Omega) \subseteq \Omega$.

Množina Ω se nazývá **ohraničená množina**, když existuje $\delta > 0$ tak, že $\Omega \subseteq K(o, \delta)$, kde $o = [0, \dots, 0] \in \mathbf{R}^n$.