2. Limita a spojitost

Definice 2.1. Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ reálná funkce n reálných proměnných.

Pak množina $(Df)' = \{x \in \mathbf{R}^n; \forall \varepsilon > 0 : (K(x, \varepsilon) - \{x\}) \cap Df \neq \emptyset\}$ se nazývá **derivace množiny** Df.

Řekneme, že f **má v bodě** $x_0 \in (Df)'$ **limitu** $a \in \mathbf{R}$, když $\forall K(a, \varepsilon) \exists K(x_0, \delta)$ tak, že $\forall x \in (K(x_0, \delta) - \{x_0\}) \cap Df : f(x) \in K(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Poznámka 2.2. Buď $\mathbf{R}_* = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Pojem limity lze rozšířit na případ $x_0 \in \mathbf{R}_*^n, a \in \mathbf{R}_*$.

Je-li $a \in \{-\infty, \infty\}$, nazývá se **limita nevlastní**.

Pokud se v n-tici $x_0 \in \mathbf{R}_*^n$ vyskytne aspoň jednou nevlastní bod ∞ nebo $-\infty$, mluvíme o limitě v nevlastním bodě.

Definice limity nepožaduje, aby $x_0 \in Df$.

Věta 2.3. Funkce $f : \mathbf{R}^n \to R$ má v bodě $x_0 \in (Df)'$ **nejvýše jednu** limitu $a \in \mathbf{R}$.

Důkaz: Sporem. Buďte $a, b \in \mathbf{R}, a \neq b$ dvě různé limity funkce f v bodě x_0. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}d(a, b)$. Pak $\varepsilon > 0$ a podle definice limity $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ tak, že $\forall x \in (K(x_0, \delta_1) - \{x_0\}) \cap Df$ platí, že $f(x) \in K(a, \varepsilon)$, což znamená, že $d(a, f(x)) < \varepsilon$ a $\forall x \in (K(x_0, \delta_2) - \{x_0\}) \cap Df$ platí, že $f(x) \in K(b, \varepsilon)$, tj. $d(b, f(x)) < \varepsilon$. Zvolme $x \in K(x_0, \min\{\delta_1, \delta_2\}) - \{x_0\}$. Pak $d(a, b) \leq d(a, f(x)) + d(b, f(x)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, což je spor, neboť $d(a, b) = 2\varepsilon$.

Definice 2.4. Buď $x_0 \in (Df)'$. Má-li f v x_0 limitu a, píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

Poznámka 2.5. Nejčastější úloha o limitách bývá formulována slovním obratem: Vyšetřete limitu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Co se má provést?

Pokud $x_0 \notin (Df)'$, řekneme, že symbol $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ není definován. V opačném případě mohou nastat právě dvě navzájem se vylučující možnosti.

1. f nemá limitu. Též říkáme, že neexistuje limita f v x_0.
2. f má v x_0 limitu. Tato limita je pak podle Věty 2.3 určena jednoznačně. Určení limity funkce více proměnných je obecně velmi obtížné. V některých jednodušších případech mohou při výpočtu pomoci následující věty.

Věta 2.6. Nechť existují limity $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$. Pak platí

i) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$;

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = ab$;

iii) Pro $b \neq 0 : \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

Věta 2.7. Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ a existuje $K(x_0, \delta) - \{x_0\}$ tak, že funkce $g(x)$ je na $K(x_0, \delta) - \{x_0\}$ **ohraničená**. Pak pro limitu součinu platí $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Věta 2.8. 1. Nechť $\exists K(x_0, \delta)$ tak, že $\forall x \in K(x_0, \delta) - \{x_0\}$ platí, že $f(x) > 0$.
Pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
2. Nechť $\exists K(x_0, \delta)$ tak, že $\forall x \in K(x_0, \delta) - \{x_0\}$ platí, že $f(x) < 0$.
Pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Věta 2.9. Buď $f : \mathbf{R}^n \to R$ racionální lomená funkce, $x_0 \in Df$. Pak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(x_0)$.

Příklad 2.10. Vyšetříme limitu $\lim\limits_{[x,y] \to [0,0]} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Řešení. Označme $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Pak $Df = \mathbf{R}^2 - \{[0, 0]\}$ a $o = [0, 0] \in (Df)'$. Symbol $\lim\limits_{x \to o} f(x)$ je tedy definován. Dokažme, že f nemá limitu v bodě $[0, 0]$. Sporem. Připusťme, že funkce f má v bodě $[0, 0]$ limitu a. Pak podle definice pro $K(a, \frac{1}{4})$ existuje $K(o, \delta)$ tak, že $\forall x \in K(o, \delta) - \{o\}$ platí $f(x) \in K(a, \frac{1}{4})$. Uvažme body $b_1 = [\frac{\delta}{2}, 0]$, $b_2 = [\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]$. Zřejmě platí, že $b_1, b_2 \in K(o, \delta)$ neboť $d(o, b_1) = \sqrt{(0 - \frac{\delta}{2})^2 + (0 - 0)^2} = \frac{\delta}{2} < \delta$ a $d(o, b_2) = \sqrt{(0 - \frac{\delta}{2})^2 + (0 - \frac{\delta}{2})^2} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta$. Tedy $f(b_1) \in K(a, \frac{1}{4})$, $f(b_2) \in K(a, \frac{1}{4})$. Ale $f(b_1) = 0$ a $f(b_2) = \frac{1}{2}$. Odtud plyne, že $a \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $a \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, což je spor, neboť $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \cap (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = \emptyset$.

Definice 2.11. Buď $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ funkce dvou proměnných, $x_0 = [a, b]$.
Pak limity $L_1 = \lim\limits_{x \to a} \left(\lim\limits_{y \to b} f(x, y) \right)$ a $L_2 = \lim\limits_{y \to b} \left(\lim\limits_{x \to a} f(x, y) \right)$ se nazývají **postupné limity**.

Následující věta popisuje vztah postupných limit k limitě $L = \lim\limits_{[x,y] \to [a,b]} f(x, y)$.

Věta 2.12.

1. Nechť existují limity L_1, L_2 a $L_1 = L_2$. Pak L nemusí existovat.
2. Nechť existuje L. Pak L_1, L_2 nemusí existovat.
3. Existují-li L, L_1, L_2, pak nutně $L = L_1 = L_2$.
4. Nechť existují L_1, L_2 a $L_1 \neq L_2$. Pak L neexistuje.

Pro ilustraci uveďme příklad situace (2) z předchozího tvrzení.

Buď $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ taková, že $Df = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x \leq y \leq 2x\}$, $Hf = \{1\}$, tj. $f(x, y) = 1$ na Df.
Zřejmě $[0, 0] \in (Df)'$ a $\lim\limits_{[x,y] \to [0,0]} f(x, y) = 1$, viz Věta 2.9. Dvojnásobné limity L_1, L_2 ale neexistují. Podle definice limity funkce jedné proměnné si snadno rozmyslíte proč. Poznamenejme, že $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ má v $x_0 \in \mathbf{R}$ limitu $a \in \mathbf{R}$ právě tehdy, když $\forall K(a, \varepsilon) \exists K(x_0, \delta) - \{x_0\}$ tak, že $K(x_0, \delta) - \{x_0\} \subseteq Df$ a $\forall x \in K(x_0, \delta) - \{x_0\} : f(x) \in K(a, \varepsilon)$.

Poznámka 2.13. Jak již bylo řečeno, vyšetřování limit funkcí více proměnných je obecně velmi obtížné. Uveďme nyní několik možností, jak při vyšetřování limit postupovat. Pro jednoduchost se omezíme na funkce dvou proměnných. Pro více proměnných se postupuje analogicky. Idea je založena na aplikaci Věty2.3.

1. **Metoda svazku přímek**

   Místo limity L vyšetřujeme limitu L^*, kde

   $$L^* = \lim_{x \to x_0} f(x, k(x - x_0) + y_0).$$

   Závisí-li limita L^* na směrnici k, pak L neexistuje. Nezávisí-li na k, nelze o existenci limity L nic usoudit.

2. **Metoda svazku parabol**

   Místo limity L vyšetřujeme limitu L^{**}, kde

   $$L^{**} = \lim_{x \to x_0} f(x, k(x - x_0)^2 + y_0).$$

   Závisí-li limita L^{**} na směrnici k, pak L neexistuje. Nezávisí-li na k, nelze o existenci limity L nic usoudit.

3. **Metoda polárních souřadnic**

   Provedeme transformaci funkce f do polárních souřadnic. Dosadíme za $x = x_0 + \rho \cos \varphi$ a za $y = y_0 + \rho \sin \varphi$. Místo limity L pak vyšetřujeme limitu L^{***}, kde

   $$L^{***} = \lim_{\rho \to 0^+} f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi).$$

   Závisí-li limita L^{***} na úhlu φ, pak L neexistuje. Nezávisí-li na φ, nelze o existenci limity L nic usoudit. Speciálně, je-li po transformaci $L^{***} = \lim\limits_{\rho \to 0^+} g(\rho) h(\varphi)$, kde $\lim\limits_{\rho \to 0^+} g(\rho) = 0$ a $h(\varphi)$ je ohraničená na $\langle 0, 2\pi)$, pak $L = 0$.

Příklad 2.14. Vyšetřete limitu $\lim\limits_{[x,y] \to [0,0]} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$.

Řešení. Obě postupné limity L_1, L_2 existují a jsou rovny nule. O existenci limity nelze na tomto základě nic usoudit. Použijeme metodu svazku přímek. Platí

$$L^* = \lim_{x \to 0, y = kx} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot k^2 x^2}{x^4 + k^4 x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{k^2}{1 + k^4} = \frac{k^2}{1 + k^4}.$$

Protože limita L^* závisí na k, zadaná limita L neexistuje.

Příklad 2.15. Vyšetřete limitu $\lim\limits_{[x,y] \to [0,0]} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

Řešení. Obě postupné limity L_1, L_2 existují a jsou rovny nule. Podobně neúspěšně dopadne vyšetření metodou svazku přímek i metodou svazku parabol. Platí $L^* = L^{**} = 0$. O existenci limity nelze na tomto základě nic usoudit. Použijeme metodu transformace do polárních souřadnic. Platí

$$L^{***} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\rho^3 \cos^3 \varphi + \rho^3 \sin^3 \varphi}{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\rho^3 (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}{\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{\rho \to 0^+} \rho (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) = 0.$$

Protože je funkce $h(\varphi) = \cos^3\varphi + \sin^3\varphi$ ohraničená a funkce $g(\rho) = \rho$ má limitu 0, zadaná limita L existuje a je rovna 0.

Definice 2.16. Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, x_0 \in Df$. Řekneme, že f **je spojitá v** x_0, když $\forall K(f(x_0), \varepsilon) \exists K(x_0, \delta)$ tak, že $\forall x \in K(x_0, \delta) \cap Df : f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$.

Řekneme, že f **je spojitá na množině** $\Omega \subseteq Df$, je-li spojitá v každém bodě $x \in \Omega$.

Věta 2.17. Buď $x_0 \in Df \cap (Df)'$. Pak f je **spojitá** v $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Věta 2.18. Buď $x_0 \in Df \wedge x_0 \notin (Df)'$. Pak f je spojitá v x_0.

Důkaz: Protože $x_0 \notin (Df)'$ existuje $K(x_0, \delta)$ tak, že $(K(x_0, \delta) - \{x_0\}) \cap Df = \emptyset$. Zřejmě $\forall K(f(x_0), \varepsilon)$ platí $\forall x \in K(x_0, \delta) \cap Df = \{x_0\}$ platí $f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$, tj. $f(x_0) \in K(f(x_0), \varepsilon)$.

Věta 2.19. Buďte $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ spojité v $x_0 \in Df$.

1. Pak $f \pm g, f \cdot g$ jsou spojité v x_0.
2. Je-li $g(x_0) \neq 0$, pak rovněž $\frac{f}{g}$ je spojitá v x_0.