

1. Základní vlastnosti funkcí více proměnných

Příklad 1. Vyjádřete objem z kužele jako funkci jeho strany x a výšky y .

$$[z = \frac{\pi r^2 y}{3} = \frac{1}{3}\pi(x^2 - y^2)y]$$

Příklad 2. Vyjádřete rychle obsah S trojúhelníku jako funkci jeho tří stran x, y, z .

$$[S = \frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)}]$$

Poznámka: Tedy jestliže označíme $s = \frac{x+y+z}{2}$, potom $S = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$. Odvodili jsme notoricky známý Heronův vzorec.

Příklad 3. Je dána složená funkce $z = u^w + w^{u+v}$, kde $u = x + y$, $v = x - y$, $w = xy$. Vyjádřete bezodkladně z jako funkci proměnných x a y .

$$[z = (x + y)^{xy} + (xy)^{2x}]$$

Příklad 4. Laskavě nakreslete definiční obor funkce $z = f(x, y)$.

- | | |
|---|--|
| a) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2};$ | l) $f(x, y) = \frac{10x}{\sqrt{x^2+y^2-9}};$ |
| b) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y};$ | m) $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2};$ |
| c) $f(x, y) = \frac{5x-7}{2x^2+3y^2-12};$ | n) $f(x, y) = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)};$ |
| d) $f(x, y) = \frac{x^2-2y}{y^2-2x};$ | o) $f(x, y) = \sqrt{\sin(y-x)};$ |
| e) $f(x, y) = \frac{2}{x^2-y^2-1};$ | p) $f(x, y) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{y^2-9};$ |
| f) $f(x, y) = \cotg(x+y);$ | q) $f(x, y) = \ln(x \ln(y-x));$ |
| g) $f(x, y) = \sqrt{3x-y};$ | r) $f(x, y) = \ln(y^2 - 4x + 8);$ |
| h) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y-x}};$ | s) $f(x, y) = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y};$ |
| i) $f(x, y) = \ln(x+y);$ | t) $f(x, y) = \ln(xy);$ |
| j) $f(x, y) = \arcsin(x-y);$ | u) $f(x, y) = \sqrt{x-\sqrt{y}};$ |
| k) $f(x, y) = \arccos(1-x^2-y^2);$ | v) $f(x, y) = \arcsin \frac{y-1}{x};$ |
| | w) $f(x, y) = \ln x - \ln \sin y.$ |

Příklad 5. Nakreslete graf funkce $z = f(x, y)$.

- $f(x, y) = x;$
- $f(x, y) = |x|;$
- $f(x, y) = \sin x;$
- $f(x, y) = 1 - x - y;$
- $f(x, y) = x - y;$
- $f(x, y) = x + y;$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2};$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 9};$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4};$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2};$
- $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2};$
- $f(x, y) = x^2 + y^2;$
- $f(x, y) = x^2 - y^2;$
- $f(x, y) = \sqrt{xy}.$