3. Parciální a směrové derivace, gradient

Definice 3.1. Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ reálná funkce n reálných proměnných, $a = [a_1, \ldots, a_n]$, $1 \le i \le n$. Položme $f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, kde $f_i(x_i) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ (pozn. funkce f_i se nazývá i-tá parciální funkce) a $Df_i = \{x_i \in \mathbf{R} : [a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n] \in Df\}$.

Číslo $f'_{x_i}(a) := f'_i(a)$ se nazývá parciální derivace funkce f v bodě a podle proměnné x_i. Buď Df'_{x_i} množina všech $a \in R^n$, pro něž $f'_{x_i}(a)$ existuje.

Funkce $f'_{x_i} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ přiřazující každému $x \in Df'_{x_i}$ číslo $f'_{x_i}(x)$ se nazývá **parciální derivace** funkce f podle x_i. Místo f'_{x_i} lze ekvivalentně psát $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Poznámka 3.2. Již samotná definice poskytuje návod, jak parciální derivace počítat. Parciální derivaci funkce podle pevně zvolené proměnné vypočítáme tak, že funkci derivujeme jen podle této proměnné, přičemž ostatní proměnné považujeme za konstanty. Princip výpočtu uvedeme na následujícím příkladu.

Příklad 3.3. Spočtěte parciální derivace f'_x a f'_y funkce $f(x, y) = x^2y + \ln\left(\frac{x}{y}\right)$.

Řešení. Využijeme známých vzorců pro derivování funkce jedné proměnné a dále použijeme návodu v předchozí poznámce.

$$f'_x(x,y) = 2xy + \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = 2xy + \frac{1}{x} \qquad \text{a} \qquad f'_y(x,y) = x^2 + \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \frac{-x}{y^2} = x^2 - \frac{1}{y}.$$

Definice 3.4. Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $a \in Df$. Nechť $\forall i = 1, \ldots, n$ existuje $f'_{x_i}(a)$.

Vektor **grad** $f(a) = (f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_n}(a))$ se nazývá gradient funkce f v bodě a.

Vektor grad $f = (f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n})$ nazýváme **gradient funkce** f.

Poznámka 3.5. Symbolem V_n označme **euklidovský vektorový prostor** dimenze n nad $\mathbf{R}$. Prvky $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V_n$ nazýváme vektory. Jsou to $n-$tice reálných čísel zapsaných v kulaté závorce. Z vektorové algebry připomeňme, že rozdíl $x - y$ bodů $x, y \in \mathbf{R}^n$ interpretujeme jako vektor a součet $x + v$ bodu $x \in \mathbf{R}^n$ a vektoru $v \in V_n$ jako bod. Platí $[x_1, \ldots, x_n] + (v_1, \ldots, v_n) = [x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n]$.

Vektory $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1) \in V_n$ se nazývají **orty**. Orty jsou ortogonální, tzn. kolmé vektory, jejichž velikost je rovna 1.

Podobně jako u funkcí jedné reálné proměnné zavádíme pojem derivace vyšších řádů. Definici zavedeme pomocí principu matematické indukce.

Definice 3.6. Buď $m \ge 1$ libovolné, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pak funkce

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} \left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{m-1}}} \right)$$

se nazývá ***m*-tá parciální derivace** podle proměnných $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ v tomto pořadí.

Nultou parciální derivaci chápeme jako f.

Výraz $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}$ je zvykem zapisovat rovněž ve tvaru $f^{(m)}_{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}}$.

Poznámka 3.7. Druhou derivací funkce n-proměnných $f(x)$ chápeme matici

$$f'' = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}, & \dots, & f''_{x_1x_n} \\ & \vdots & \\ f''_{x_nx_1}, & \dots, & f''_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Gradient funkce f se v tomto kontextu někdy chápe jako první derivace funkce f. Píšeme tedy $f' = \mathbf{grad}\, f$.

Příklad 3.8. Spočtěte parciální derivace druhého řádu $f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}$ a f''_{yx} funkce $f(x,y) = x^2y + \ln\left(\frac{x}{y}\right)$.

Řešení. Využijeme výsledků z Příkladu 3. Platí $f'_x(x,y) = 2xy + \frac{1}{x}$ a $f'_y(x,y) = x^2 - \frac{1}{y}$. Druhé parciální derivace funkce f spočteme tak, že první parciální derivaci znovu parciálně zderivujeme podle zvolené proměnné. Platí

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_x) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + \frac{1}{x}) = 2y - \frac{1}{x^2}, f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - \frac{1}{y}) = \frac{1}{y^2},$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_x) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + \frac{1}{x}) = 2x, f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_y) = 2x.$$

Odtud plyne, že matice druhé derivace je tvaru

$$f'' = \begin{bmatrix} 2y - \frac{1}{x^2}, & 2x \\ 2x, & \frac{1}{y^2} \end{bmatrix}.$$

Při výpočtu druhých parciálních derivací jsme narazili na důležitou skutečnost. Zjistili jsme, že $f''_{xy} = f''_{yx}$. Následující věta zaručuje, že nalezenou vlastnost mají všechny funkce, jejichž parciální derivace jsou spojité. Věta 3.9 se často nazývá Schwarzova věta, nebo též věta o zaměnitelnosti parciálních derivací. Matice f'' je v případě zaměnitelnosti symetrická podle hlavní diagonály.

Věta 3.9. (Schwarzova věta) Nechť všechny parciální derivace m-tého řádu funkce $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ jsou spojité v bodě $a \in Df$. Pak jsou všechny parciální derivace až do řádu m včetně záměnné v bodě a, tj. v libovolné parciální derivaci m-tého řádu v bodě a nezávisí na pořadí derivování.

Poznámka 3.10. Derivace do řádu $m-1$ včetně jsou záměnné dokonce v nějakém okolí bodu a. Obecně existuje n^m parciálních derivací m-tého řádu funkce n proměnných. Splnění předpokladů Schwarzovy věty 3.9 redukuje tento počet na $\begin{pmatrix} n+m-1 \\ m \end{pmatrix}$.

Definice 3.11. Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $a \in Df$, $u \in V_n$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Pro každé $t \in \mathbf{R}$ položme $g(t) := f(a + tu)$. Pak

$$f'_u(a) := g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$$

se nazývá **derivace funkce f v bodě a ve směru vektoru u.**

Příklad 3.12. Spočtěte derivaci funkce $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ v bodě $a = [1,1]$ ve směru vektoru $u = (2,1)$.

Řešení. Využijeme definičního vztahu. Platí

$$g(t) = f(a + tu) = f([1, 1] + t(2, 1)) = f(1 + 2t, 1 + t) = \frac{(1 + 2t)^2 - (1 + t)^2}{(1 + 2t)^2 + (1 + t)^2} = \frac{3t^2 + 2t}{5t^2 + 6t + 2}.$$

$$g'(t) = \frac{(6t + 2)(5t^2 + 6t + 2) - (3t^2 + 2t)(10t + 6)}{(5t^2 + 6t + 2)^2}, \qquad f'_u(a) = g'(0) = \frac{2 \cdot 2 - 0 \cdot 6}{2^2} = 1.$$

Věta 3.13. Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $a \in Df$, $u, v \in V_n$. Pak

1. $f'_{e_i}(a) = f'_{x_i}(a)$.
2. Nechť existuje $f'_u(a)$. Pak pro libovolné $c \in \mathbf{R}$ existuje $f'_{cu}(a)$ a platí $f'_{cu}(a) = cf'_u(a)$.
3. Nechť $f'_u(x)$ je spojitá v $K(x, \delta)$ a existuje $f'_v(x)$. Pak existuje $f'_{u+v}(x)$ a platí $f'_{u+v}(x) = f'_u(x) + f'_v(x)$.
4. $f'_u(a) = \mathbf{grad}\, f(a) \circ u = (f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_n}(a)) \circ (u_1, \dots, u_n)$.

Poznámka 3.14. Platí $f'_u(a) = |\mathbf{grad}\, f(a)| \cdot |u| \cdot \cos\varphi$, $\varphi \in \langle 0, \pi\rangle$, kde φ je úhel vektorů $\mathbf{grad}\, f(a), u$.
Tedy $f'_u(a)$ je maximální, když $\varphi = 0$.
Odtud plyne, že vektor $\mathbf{grad}\, f(a)$ určuje směr jímž f v a nejrychleji roste.

Příklad 3.15. Spočtěte derivaci funkce $f(x, y) = x^2y + \ln(\frac{x}{y})$ v bodě $a = [2, 3]$ ve směru $u = (1, -2)$.

Řešení. Pro gradient funkce f platí $\mathbf{grad}\, f = (2xy + \frac{1}{x}, x^2 - \frac{1}{y})$ a $\mathbf{grad}\ f(a) = (\frac{25}{2}, \frac{11}{3})$. Tedy $f'_u(a) = \mathbf{grad}\ f(a) \cdot u = (\frac{25}{2}, \frac{11}{3}) \cdot (1, -2) = \frac{31}{6}$.