6. Lineární ODR n-tého řádu

A. Homogenní LODRn

Příklad 6.1. Řešte diferenciální rovnici

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Řešení. Charakteristická rovnice je tvaru $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ a má dva různé reálné kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Odtud tedy dostáváme, že funkce

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{x}, \qquad y_2(x) = \mathrm{e}^{-2x}$$

jsou lineárně nezávislá řešení dané rovnice. Obecné řešení pak má tvar

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 6.2. Řešte počáteční problém

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2.$$

Řešení. Charakteristickou rovnici $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$ lze přepsat pomocí vzorce na tvar $(\lambda + 1)^3 = 0$ a má tedy trojnásobný kořen $\lambda_{1,2,3} = -1$. Proto je obecné řešení dané rovnice tvaru

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{-x} + C_3 x^2\,\mathrm{e}^{-x}, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

K tomu, abychom mohli dosadit druhou a třetí počáteční podmínku, je třeba dvakrát derivovat obecné řešení, tedy

$$\begin{aligned} y' &= -C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2(1-x)\,\mathrm{e}^{-x} + C_3(2x - x^2)\,\mathrm{e}^{-x}\,, \\ y'' &= C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2(-2+x)\,\mathrm{e}^{-x} + C_3(2 - 4x + x^2)\,\mathrm{e}^{-x}\,. \end{aligned}$$

Dosazením počátečních podmínek pak máme

$$0 = y(0) = C_1, \quad 0 = y'(0) = -C_1 + C_2, \quad 2 = y''(0) = C_1 - 2C_2 + 2C_3,$$

tj.

$$C_1 = C_2 = 0, \quad C_3 = 1.$$

Příslušné partikulární řešení je pak tvaru

$$y = x^2\,\mathrm{e}^{-x}, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 6.3. Určete řešení počátečního problému

$$y^{(4)} - y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 0\,.$$

Řešení. Charakteristická rovnice $\lambda^4 - 1 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\lambda_{3,4} = \pm \mathrm{i}$. Odtud dostáváme obecné řešení dané rovnice ve tvaru

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x, \qquad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\,.$$

Dosazením počátečních podmínek do obecného řešení a jeho derivací

$$\begin{aligned} y' &= C_1\,\mathrm{e}^{x} - C_2\,\mathrm{e}^{-x} - C_3 \sin x + C_4 \cos x, \\ y'' &= C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_1\,\mathrm{e}^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x, \\ y''' &= C_1\,\mathrm{e}^{x} - C_2\,\mathrm{e}^{-x} + C_3 \sin x - C_4 \cos x \end{aligned}$$

dostáváme $C_1 = C_2 = 1/2$, $C_3 = C_4 = 0$. Řešením daného počátečního problému je proto funkce

$$y = \frac{1}{2}(\,\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) = \cosh x, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 6.4. Určete obecné řešení diferenciální rovnice

$$4y'' - 8y' + 5y = 0.$$

Řešení. Charakteristická rovnice $4\lambda^2 - 8\lambda + 5 = 0$ má dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{2}i$. Požadovaná lineárně nezávislá řešení tedy jsou tvaru $y_1 = \mathrm{e}^{x} \cos \frac{x}{2}$, $y_2 = \mathrm{e}^{x} \sin \frac{x}{2}$, a odtud plyne obecné řešení

$$y = \mathrm{e}^{x}\left(C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2}\right), \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 6.5. Určete obecné řešení diferenciální rovnice

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

Řešení. Charakteristickou rovnici $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ řešíme např. substitucí $\lambda^2 = z$ a obdržíme dvojici dvojnásobných komplexně sdružených čísel $\lambda_{1,2} = i$, $\lambda_{3,4} = -i$. Odtud $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, $y_3 = x \cos x$, $y_4 = x \sin x$, a obecné řešení je tedy tvaru

$$y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x, \qquad C_1,\, C_2,\, C_3,\, C_4 \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 6.6. Určete řešení počátečního problému

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad (\omega \neq 0), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Řešení. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ má řešení $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, tedy $y_1 = \cos \omega x$, $y_2 = \sin \omega x$. Obecné řešení pak má tvar

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Dosazením počátečních podmínek určíme $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, tj. hledané řešení je funkce

$$y = \cos \omega x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

B. Nehomogenní LODRn - metoda variace konstant

Příklad 6.7. Určete obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Řešení. Rovnici řešíme metodou variace konstant ve dvou krocích.

I. Vyřešíme přidruženou rovnici homogenní

$$y'' + y = 0.$$

Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm i$, a obecné řešení příslušné homogenní rovnice je proto tvaru

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

II. Řešení původní nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x, \qquad C_1(x),\, C_2(x) = ?$$

Abychom tyto neznámé funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$ určili, vyřešíme nejprve soustavu pro $C_1'(x)$, $C_2'(x)$:

$$\begin{aligned} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x &= 0\,, \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x) \cos x &= \frac{1}{\cos x}\,. \end{aligned}$$

Tuto soustavu můžeme řešit užitím Gaussovy eliminační metody nebo Cramerova pravidla. Užijeme-li Cramerova pravidla, dostáváme

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -\operatorname{tg} x, \qquad C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = 1,$$

tj.

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x = \int \frac{-\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x = \ln|\cos x| + C_1\,, \\ C_2(x) &= \int \mathrm{d}x = x + C_2\,. \end{aligned}$$

Dosazením dostáváme obecné řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} y &= (\ln|\cos x| + C_1) \cos x + (x + C_2) \sin x \\ &= C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Příklad 6.8. Určete obecné řešení rovnice

$$y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x \operatorname{arctg} x\,.$$

Řešení. I. Řešíme přidruženou homogenní rovnici

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ má dvojnásobný reálný kořen $\lambda_{1,2} = 1$ a odtud

$$y_h = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2 x\,\mathrm{e}^x.$$

II. Obecné řešení původní nehomogenní rovnice hledejme ve tvaru

$$y = C_1(x)\,\mathrm{e}^x + C_2(x) x\,\mathrm{e}^x, \qquad C_1(x),\, C_2(x) = ?$$

Soustava pro neznámé $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ má tvar

$$\begin{aligned} C_1'(x)\,\mathrm{e}^x + C_2'(x) x\,\mathrm{e}^x &= 0\,, \\ C_1'(x)\,\mathrm{e}^x + C_2'(x)(1+x)\,\mathrm{e}^x &= \mathrm{e}^x \operatorname{arctg} x\,. \end{aligned}$$

Odečtením první rovnice od druhé máme $C_2'(x)\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \operatorname{arctg} x$, tj. $C_2'(x) = \operatorname{arctg} x$. Dosazením vypočteného $C_2'(x)$ do první rovnice pak máme $C_1'(x) = -x \operatorname{arctg} x$. Odtud integrací per partes

$$\begin{aligned}
C_2(x) &= \int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x \\
&= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_2, \\
C_1(x) &= -\int x \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2} \\
&= -\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C_1 \,.
\end{aligned}$$

Dosazením pak máme

$$\begin{aligned}
y &= \left(\frac{-x^2}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C_1\right)\mathrm{e}^x + \left(x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_2\right) x\,\mathrm{e}^x \\
&= C_1\,\mathrm{e}^x + C_2 x\,\mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}^x}{2}\left(x^2 \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x + x - x\ln(1+x^2)\right), \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Příklad 6.9. Určete obecné řešení rovnice

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}\,.$$

Řešení. I. Homogenní rovnice je tvaru $y'' + 4y = 0$ a její charakteristická rovnice $\lambda^2 + 4 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Tedy

$$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

II. Obecné řešení nehomogenní rovnice hledejme ve tvaru

$$y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x, \qquad C_1(x), C_2(x) = ?$$

Soustava pro $C_1'(x)$, $C_2'(x)$:

$$\begin{aligned}
C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x &= 0\,, \\
C_1'(x)(-2\sin 2x) + C_2'(x) 2\cos 2x &= \frac{1}{\sin^2 x}\,.
\end{aligned}$$

Řešení této soustavy určíme např. Cramerovým pravidlem ve tvaru

$$\begin{aligned}
C_1'(x) &= -\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2}\frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x\,, \\
C_2'(x) &= \frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}\frac{1-\sin^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin^2 x} - 1\,.
\end{aligned}$$

Odtud integrací

$$\begin{aligned}
C_1(x) &= -\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\sin x| + C_1\,, \\
C_2(x) &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg} x - x + C_2\,.
\end{aligned}$$

Obecné řešení:

$$y = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x - \ln|\sin x|\cos 2x - \left(x + \frac{1}{2}\operatorname{cotg} x\right)\sin 2x, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 6.10. Určete obecné řešení rovnice

$$y'' + y = \operatorname{tg} x\,.$$

Řešení. I. Obecné řešení příslušné homogenní rovnice je tvaru

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

II. Proveďme variaci konstant, tj.

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x, \qquad C_1(x), C_2(x) =?$$

Soustava pro $C_1'(x)$, $C_2'(x)$:

$$\begin{aligned} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x &= 0\,, \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x) \cos x &= \operatorname{tg} x\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = -\frac{1-\cos^2 x}{\cos x} = \cos x - \frac{1}{\cos x}\,, \\ C_2'(x) &= \sin x\,. \end{aligned}$$

Nejprve ukážeme způsob výpočtu $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$. V souladu s goniometrickými substitucemi zavedeme substituci $t = \sin x$ (tj. $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$; navíc $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$). Odtud

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$

Integrand druhého integrálu rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1+t)(1-t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t},$$

přičemž po vynásobení $1 - t^2$ obdržíme rovnost

$$1 = A(1-t) + B(1+t) \quad \Rightarrow \quad A = B = \frac{1}{2}.$$

Pokračujeme tedy v integraci a máme

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$$

(integrační konstantu prozatím nepíšeme).

Získaný integrál upravíme rozšířením čitatele i jmenovatele výrazem $1 + \sin x$, tedy na základě vlastností logaritmů dostáváme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)^2\right| = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|.$$

Proto

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int \cos x\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \sin x - \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C_1, \\ C_2(x) &= \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C_2. \end{aligned}$$

Dosazením $C_1(x)$, $C_2(x)$ máme

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

C. Nehomogenní LODRn - metoda neurčitých koeficientů

Příklad 6.11. Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + 2y = 2x.$$

Řešení. Uvedená rovnice je nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty a pravou stranou $f(x) = 2x$.

I. Řešíme přidruženou homogenní rovnici

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Protože charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

má dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$, odpovídající lineárně nezávislá řešení této homogenní rovnice jsou $y_1 = \mathrm{e}^x \cos x$, $y_2 = \mathrm{e}^x \sin x$. Odtud

$$y_h = C_1 \mathrm{e}^x \cos x + C_2 \mathrm{e}^x \sin x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

II. Ježto řešíme diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, jejíž pravá strana je $f(x) = 2x$, tedy polynom 1. stupně, k nalezení nějakého partikulárního řešení y_p dané rovnice lze použít metodu neurčitých koeficientů. Partikulární řešení y_p dané rovnice budeme hledat ve tvaru

$$y_p = Ax + B, \qquad A, B = ?$$

Opakovanou derivací y_p a následným dosazením do řešené rovnice dostáváme

$$0 - 2A + 2(Ax + B) = 2x, \qquad \text{tj.} \qquad 2Ax - 2A + 2B = 2x.$$

Porovnáním koeficientů u mocnin x^1 a x^0 pak vypočteme $A = 1$, $B = 1$. Odtud tedy $y_p = x + 1$.

Obecné řešení y dané nehomogenní rovnice je pak tvaru

$$y = y_h + y_p = C_1 \mathrm{e}^x \cos x + C_2 \mathrm{e}^x \sin x + x + 1, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 6.12. Nalezněte obecné řešení rovnice

$$y'' + y = 2 \sin x.$$

Řešení. I. Charakteristická rovnice má v tomto případě tvar

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

a tedy komplexně sdružené kořeny $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Řešení příslušné homogenní LODR2 je proto tvaru

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

II. Nalezneme y_p. Protože pravá strana $f(x) = 2 \sin x$, navrhneme předběžně tvar pro y_p jako

$$A \cos x + B \sin x.$$

Oba tyto členy jsou však obsaženy v tvaru pro y_h, a proto celý předpokládaný tvar pro y_p násobíme faktorem x: tedy

$$y_p = x(A \cos x + B \sin x) = Ax \cos x + Bx \sin x, \qquad A, B = ?$$

Nyní již y_h a y_p nemají společný žádný člen, tedy tento tvar je definitivní. Dále

$$y_p' = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x,$$

takže

$$y_p'' = -2A\sin x - Ax\cos x + 2B\cos x - Bx\sin x\,.$$

Dosazením výrazů pro y_p'' a y_p do řešené rovnice dostaneme

$$-2A\sin x + 2B\cos x = 2\sin x\,.$$

Tedy $A = -1$, $B = 0$ a hledané partikulární řešení má tvar

$$y_p = -x\cos x\,.$$

Pak obecné řešení je tvaru

$$y = y_h + y_p = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x, \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 6.13. Řešte rovnici

$$y'' + 4y' + 4y = 2\,\mathrm{e}^{-2x}\,.$$

Řešení. I. Homogenní rovnice

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

má charakteristickou rovnici $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ s dvojnásobným kořenem $\lambda_{1,2} = -2$. Tedy

$$y_h = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{-2x}\,.$$

II. Přistoupíme k určení y_p. Protože $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$, budeme řešení y_p předpokládat nejprve ve tvaru $y_p = A\,\mathrm{e}^{-2x}$. Tento člen je však obsažen v y_h jako $C_1\,\mathrm{e}^{-2x}$ (označení konstanty zde není podstatné). Vynásobíme proto tento tvar faktorem x, čímž dostáváme $Ax\,\mathrm{e}^{-2x}$. I tento výraz je však zahrnut v y_h (jako $C_2 x\,\mathrm{e}^{-2x}$). Opakované násobení x dává

$$y_p = Ax^2\,\mathrm{e}^{-2x}, \qquad A = ?$$

Teprve toto vyjádření y_p lze považovat za konečné (tento člen již není součástí y_h). Odtud derivací dostáváme

$$y_p' = 2Ax\,\mathrm{e}^{-2x} - 2Ax^2\,\mathrm{e}^{-2x} = A(2x - 2x^2)\,\mathrm{e}^{-2x},$$

$$y_p'' = A(2 - 4x)\,\mathrm{e}^{-2x} - 2A(2x - 2x^2)\,\mathrm{e}^{-2x} = A(2 - 8x + 4x^2)\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Dosazením y_p, y_p', y_p'' do dané rovnice máme

$$A(2 - 8x + 4x^2)\,\mathrm{e}^{-2x} + 4A(2x - 2x^2)\,\mathrm{e}^{-2x} + 4x^2\,\mathrm{e}^{-2x} = 2\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Po zkrácení nenulovou funkcí e^{-2x} máme

$$A(2 - 8x + 4x^2 + 8x - 8x^2 + 4x^2) = 2 \qquad \text{tj.} \qquad 2A = 2, \quad A = 1.$$

Odtud $y_p = x^2\,\mathrm{e}^{-2x}$ a obecné řešení je tvaru

$$y = y_h + y_p = \mathrm{e}^{-2x}(C_1 + C_2 x + x^2), \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 6.14. Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y''' - 4y'' + 4y' = 2x + \mathrm{e}^{2x} - \cos 2x.$$

Řešení. Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici 3. řádu s konstantními koeficienty a pravou stranou $f(x) = 2x + \mathrm{e}^{2x} - \cos 2x$.

I. Nalezneme řešení homogenní rovnice

$$y''' - 4y'' + 4y' = 0.$$

Charakteristickou rovnici

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

řešíme vytknutím λ a dostáváme reálné kořeny $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 2$. Tedy $y_1 = 1$, $y_2 = \mathrm{e}^{2x}$, $y_3 = x\,\mathrm{e}^{2x}$ a odtud

$$y_h = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{2x} + C_3 x\,\mathrm{e}^{2x}.$$

II. Protože $f(x) = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)$, kde $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $f_3(x) = \cos 2x$, lze pomocí principu superpozice řešit danou rovnici postupně s pravými stranami $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, čímž obdržíme partikulární řešení y_{p_1}, y_{p_2}, y_{p_3}. Hledané partikulární řešení y_p pak bude tvaru $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} - y_{p_3}$.

a) Hledáme partikulární řešení y_{p_1} diferenciální rovnice

$$y''' - 4y'' + 4y' = 2x$$

s pravou stranou $f_1(x) = 2x$. K tomuto účelu použijeme metodu neurčitých koeficientů. Ježto $f_1(x)$ je polynom 1. stupně, zkusíme předpokládat hledané řešení ve tvaru $y_{p_1} = Ax + B$. Je ovšem snadné vidět, že druhý člen tohoto tvaru (totiž konstanta B) je obsažen v řešení y_h (zde vystupuje jako člen také konstanta, označená jako C_1). Proto tento tvar vynásobíme x a dostáváme

$$y_{p_1} = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx, \qquad A,\, B = ?$$

Poněvadž Ax^2 ani Bx již nejsou součástí y_h, lze tento tvar považovat za správný. Derivací dostáváme

$$y'_{p_1} = 2Ax + B, \qquad y''_{p_1} = 2A, \qquad y'''_{p_1} = 0.$$

Dosazením pak máme

$$0 - 8A + 4(2Ax + B) = 2x, \qquad \text{tj.} \qquad 8Ax - 8A + 4B = 2x.$$

Porovnáním koeficientů u x^1 a x^0 pak dostáváme $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$. Tedy

$$y_{p_1} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

b) Hledáme partikulární řešení y_{p_2} diferenciální rovnice

$$y''' - 4y'' + 4y' = \mathrm{e}^{2x}$$

s pravou stranou $f_2(x) = \mathrm{e}^{2x}$. Opět můžeme využít metody neurčitých koeficientů, protože $f_2(x) = \mathrm{e}^{2x}$. Hledané řešení tedy zkusíme předpokládat ve tvaru $y_{p_2} = A\,\mathrm{e}^{2x}$. Tento člen je však obsažen v y_h jako $C_1\,\mathrm{e}^{2x}$. Vynásobíme-li tento tvar faktorem x, dostáváme $Ax\,\mathrm{e}^{2x}$. I tento výraz je ovšem zahrnut v řešení y_h (jako $C_2 x\,\mathrm{e}^{2x}$). Opětovné násobení x dává

$$y_{p_2} = Ax^2\,\mathrm{e}^{2x}, \qquad A = ?$$

Teprve toto vyjádření lze považovat za konečné (daný člen již není součástí y_h). Derivací tohoto tvaru a následnou úpravou postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
y'_{p_2} &= A(2x\,\mathrm{e}^{2x} + x^2 2\,\mathrm{e}^{2x}) = 2A(x^2 + x)\,\mathrm{e}^{2x},\\
y''_{p_2} &= 2A[(2x+1)\,\mathrm{e}^{2x} + (x^2 + x)2\,\mathrm{e}^2 x] = 2A(2x^2 + 4x + 1)\,\mathrm{e}^{2x},\\
y'''_{p_2} &= 2A[(4x+4)\,\mathrm{e}^{2x} + (2x^2 + 4x + 1)2\,\mathrm{e}^{2x}] = 4A(2x^2 + 6x + 3)\,\mathrm{e}^{2x}.
\end{aligned}$$

Dosazením máme

$$4A(2x^2 + 6x + 3)\,\mathrm{e}^{2x} - 8A(2x^2 + 4x + 1)\,\mathrm{e}^{2x} + 8A(x^2 + x) = \mathrm{e}^{2x}.$$

Po vykrácení e^{2x} a vytknutí neznámé A na levé straně dostáváme $A = \frac{1}{4}$. Tedy

$$y_{p_2} = \frac{1}{4}x^2\,\mathrm{e}^{2x}.$$

c) Hledáme partikulární řešení y_{p_3} diferenciální rovnice

$$y''' - 4y'' + 4y' = \cos 2x$$

s pravou stranou $f_3(x) = \cos 2x$. Podle metody neurčitých koeficientů lze hledané řešení předpokládat ve tvaru

$$y_{p_3} = A\cos 2x + B\sin 2x \qquad A,\ B = ?$$

Všimněme si, že tentokrát nemusíme tento tvar násobit x, neboť žádný ze sčítanců se v y_h nevyskytuje. Derivací dostáváme

$$y'_{p_3} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x, \qquad y''_{p_3} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x,$$
$$y'''_{p_3} = 8A\sin 2x - 8B\cos 2x.$$

Dosazením máme

$$8A\sin 2x - 8B\cos 2x + 16A\cos 2x + 16B\sin 2x - 8A\sin 2x + 8B\cos 2x = \cos 2x,$$

$$16B\sin 2x + 16A\cos 2x = \cos 2x.$$

Porovnáním koeficientů u $\sin 2x$ a $\cos 2x$ pak dostáváme $B = 0,\ A = \frac{1}{16}$. Tedy

$$y_{p_3} = \frac{1}{16}\cos 2x.$$

Hledané partikulární řešení y_p dané rovnice je proto tvaru

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} - y_{p_3} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{16}\cos 2x$$

a pro obecné řešení y této diferenciální rovnice pak platí

$$y = y_h + y_p = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{2x} + C_3 x\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{4}x\left(x + 2 + x\,\mathrm{e}^{2x}\right) - \frac{1}{16}\cos 2x, \qquad C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 6.15. Nalezněte obecné řešení

$$y'' - y' - 2y = \cosh 2x.$$

Řešení. I. Homogenní rovnice $y'' - y' - 2y = 0$ má obecné řešení

$$y_h = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

II. Pravou stranu $f(x)$ píšeme ve tvaru

$$f(x) = \cosh 2x = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}:$$

a)$f_1(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}$, odkud $y_{p_1} = Ax\,\mathrm{e}^{2x}$, $A = ?$ Výpočtem $y'_{p_1} = A(1+2x)\,\mathrm{e}^{2x}$, $y''_{p_1} = A(4+4x)\,\mathrm{e}^{2x}$ a dosazením do rovnice

$$y'' - y' - 2y = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}$$

máme $3A = \frac{1}{2}$, tj. $A = \frac{1}{6}$ a $y_{p_1} = \frac{1}{6}x\,\mathrm{e}^{2x}$.
b)$f_2(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}$, odkud $y_{p_2} = A\,\mathrm{e}^{-2x}$, $A = ?$ Protože $y'_{p_2} = -2A\,\mathrm{e}^{-2x}$, $y''_{p_2} = 4A\,\mathrm{e}^{-2x}$, dostáváme po dosazení do

$$y'' - y' - 2y = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x},$$

$4A = \frac{1}{2}$, tj. $A = \frac{1}{8}$ a $y_{p_2} = \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-2x}$. Obecné řešení dané rovnice je pak tvaru

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{6}x\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-2x}, \qquad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 6.16. Nalezněte obecné řešení

$$2y'' + 5y' = \cos^2 x.$$

Řešení. I. Homogenní rovnice $2y'' + 5y' = 0$ má obecné řešení

$$y_h = C_1 + C_2 \,\mathrm{e}^{-5x/2}, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

II. $f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, tedy:
a)$f_1(x) = \frac{1}{2}$, odkud $y_{p_1} = Ax$, $A = ?$ Vypočteme $y'_{p_1} = A$, $y''_{p_1} = 0$ a dosazením do

$$2y'' + 5y' = \frac{1}{2}$$

máme $5A = \frac{1}{2}$, tj. $A = \frac{1}{10}$ a $y_{p_1} = \frac{x}{10}$.
b)$f_2(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$, odkud $y_{p_2} = A\cos 2x + B\sin 2x$, $A, B = ?$ Vypočtěme $y'_{p_2} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$, $y''_{p_2} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$ a dosazením do

$$2y'' + 5y' = \frac{1}{2}\cos 2x$$

máme $A = -\frac{1}{41}$, $B = \frac{5}{164}$ a $y_{p_2} = -\frac{1}{41}\cos 2x + \frac{5}{164}\sin 2x$. Obecné řešení dané rovnice je tedy tvaru

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1 + C_2 \,\mathrm{e}^{-5x/2} + \frac{x}{10} - \frac{1}{41}\cos 2x + \frac{5}{164}\sin 2x, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 6.17. Nalezněte obecné řešení

$$y'' + y' - 2y = \sqrt{\mathrm{e}^x} - 2\,\mathrm{e}^x + 1.$$

Řešení. I. Homogenní rovnice $y'' + y' - 2y = 0$ má obecné řešení

$$y_h = C_1 \,\mathrm{e}^x + C_2 \,\mathrm{e}^{-2x}, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

II. $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^x} - 2\,\mathrm{e}^x + 1 = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\,\mathrm{e}^x + 1$:
a)$f_1(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, odkud $y_{p_1} = A\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, $A = ?$ Dále $y'_{p_1} = \frac{1}{2}A\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, $y''_{p_1} = \frac{1}{4}A\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ a dosazením do

$$y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$$

máme $A = -\frac{4}{5}$, tedy $y_{p_1} = -\frac{4}{5}\sqrt{\mathrm{e}^x}$.
b)$f_2(x) = -2\,\mathrm{e}^x$, odkud $y_{p_2} = Ax\,\mathrm{e}^x$, $A = ?$ Dále $y'_{p_2} = A(1+x)\,\mathrm{e}^x$, $y''_{p_2} = A(2+x)\,\mathrm{e}^x$, tedy dosazením do

$$y'' + y' - 2y = -2\,\mathrm{e}^x$$

máme $A = -\frac{2}{3}$, proto $y_{p_2} = -\frac{2}{3}x\,\mathrm{e}^x$.
c)$f_3(x) = 1$, odkud $y_{p_3} = A$, $A = ?$ Protože $y'_{p_3} = y''_{p_3} = 0$, dosazením do

$$y'' + y' - 2y = 1$$

dostáváme $A = -\frac{1}{2}$, tedy $y_{p_3} = -\frac{1}{2}$. Hledané obecné řešení je pak tvaru

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = C_1 \,\mathrm{e}^x + C_2 \,\mathrm{e}^{-2x} - \frac{4}{5}\sqrt{\mathrm{e}^x} - \frac{2}{3}x\,\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 6.18. Určete řešení počátečního problému

$$y'' + y = \sin\omega x \quad (\omega > 0), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Řešení. I. Obecné řešení homogenní rovnice $y'' + y = 0$ je tvaru

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

II. $f(x) = \sin \omega x$; při tvaru pro y_p je třeba rozlišit případ $\omega = 1$ a případ $\omega \neq 1$.

a) Je-li $\omega = 1$, pak $f(x) = \sin x$, tj. $y_p = Ax \cos x + Bx \sin x$, $A, B =$? Zcela analogickým postupem jako v příkladu 6.12 určíme obecné řešení jako $y_p = -\frac{1}{2} x \cos x$.

b) Je-li $\omega \neq 1$, pak $y_p = A \cos \omega x + B \sin \omega x$, $A, B =$? Dále určíme $y_p' = -A\omega \sin \omega x + B\omega \cos \omega x$, $y_p'' = -A\omega^2 \cos \omega x - B\omega^2 \sin \omega x$ a dosazením do dané rovnice máme $A = 0$, $B = \frac{1}{1-\omega^2}$, tj.

$$y_p = \frac{1}{1-\omega^2} \sin \omega x.$$

V případě $\omega = 1$ je tedy obecné řešení tvaru

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}$$

a dosazením počátečních podmínek dostáváme $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{2}$, tedy funkce

$$y = \frac{1}{2} \left(\sin x - x \cos x \right), \qquad x \in \mathbb{R}$$

je hledané partikulární řešení.

V případě $\omega \neq 1$ je obecné řešení tvaru

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{1-\omega^2} \sin \omega x, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Dosazením počátečních podmínek dostáváme $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{\omega}{1-\omega^2}$, tedy hledané partikulární řešení je tvaru

$$y = \frac{1}{\omega^2 - 1} \left(\omega \sin x - \sin \omega x \right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

D. Aplikace LODRn

Příklad 6.19. (Kmitání hmotného bodu) Uvažujme hmotný bod o hmotnosti m, na který působí síly F_1, F_2, F_3. Síla F_1 je přitom úměrná výchylce y z rovnovážné polohy $y = 0$ a působí proti směru výchylky, síla F_2 je úměrná rychlosti bodu a síla F_3 je vnější periodicky se měnící síla. Určete pohybovou rovnici daného bodu.

Řešení.

a) Harmonické kmitání. Nechť na hmotný bod působí pouze pružinová síla $F_1 = -ky$, $k > 0$. Podle druhého Newtonova zákona je pohyb bodu popsán diferenciální rovnicí

$$m\ddot{y} = -ky\,,$$

nebo-li

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0, \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} > 0\,. \tag{6.1}$$

V dynamice se konstanta k nazývá tuhost pružiny a pohyb popsaný rovnicí (6.1) *vlastní netlumené kmitání* (nebo také *harmonické kmitání*). Rovnice (6.1) je homogenní LODR2, přičemž její charakteristická rovnice je tvaru

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0\,.$$

Odtud dostáváme kořeny $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\omega_0$. Obecné řešení rovnice (6.1) je pak tvaru

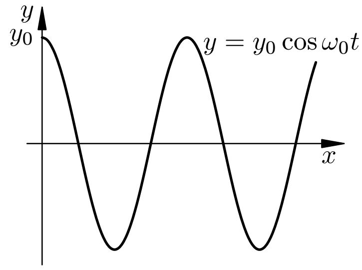
$$y = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t = C \sin(\omega_0 t + \varphi)\,,$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (resp. $C \geq 0$, $-\pi \leq \varphi < \pi$) jsou konstanty dané počátečními podmínkami pohybu. Poznamenejme, že obě vyjádření obecného řešení jsou ekvivalentní, a to na základě vztahů

$$C_1 = C \sin \varphi, \qquad C_2 = C \cos \varphi \,.$$

Harmonický pohyb bývá obvykle popisován pomocí vztahu obsahujícího konstanty C, φ, přičemž C je amplituda, φ fázový posun a ω_0 kruhová frekvence. Veličina $T = 2\pi/\omega_0$ pak udává dobu jedné periody pohybu.

Je-li nyní bod na počátku pohybu v poloze y_0 a má nulovou počáteční rychlost, pak realizujeme počáteční podmínky $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = 0$. Odpovídající partikulární řešení má tvar $y = y_0 \cos \omega_0 t$ (viz obr. 6.1).



Obr. 6.1: Harmonické kmitání

b) Tlumené kmitání. Je-li pohyb hmotného bodu brzděn další silou F_2, která je úměrná rychlosti bodu (tj. $F_2 = -l\dot{y}$, $l > 0$), pak diferenciální rovnice pohybu je

$$m\ddot{y} = -ky - l\dot{y},$$

tj.

$$\ddot{y} + 2b\dot{y} + \omega_0^2 y = 0, \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad b = \frac{l}{2m}\,. \tag{6.2}$$

Pohyb popsaný rovnicí (6.2) se nazývá *vlastní tlumené kmitání.* Řešení zřejmě závisí na kořenech charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2 = 0\,, \tag{6.3}$$

které určíme jako $\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$. Dostáváme tedy tři kvalitativně odlišné případy:

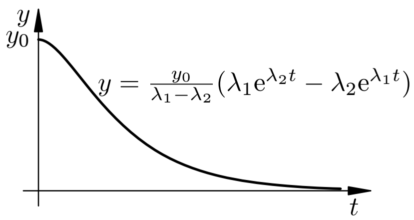
i) Je-li $b > \omega_0$, pak rovnice (6.3) má dva různé reálné kořeny $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, a obecné řešení rovnice (6.2) je proto tvaru

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \qquad \text{(tzv. } \textit{nadkritický útlum}\text{)}\,.$$

Volíme-li počáteční podmínky $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = 0$, pak dostáváme partikulární řešení

$$y = \frac{y_0}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} - \lambda_2\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t})\,,$$

znázorněné na obr. 6.2.



Obr. 6.2: Nadkritický útlum

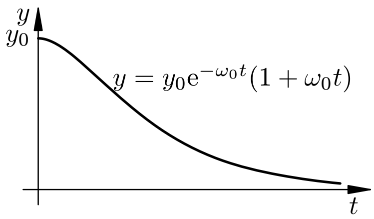
ii) Je-li $b = \omega_0$, pak obecné řešení rovnice (6.2) je tvaru

$$y = \mathrm{e}^{-\omega_0 t}(C_1 t + C_2) \qquad \text{(tzv. } \textit{kritický útlum}\text{)}\,.$$

Při počátečních podmínkách $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = 0$ dostáváme řešení

$$y = y_0\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}(1 + \omega_0 t)\,,$$

znázorněné na obr. 6.3.



Obr. 6.3: Kritický útlum

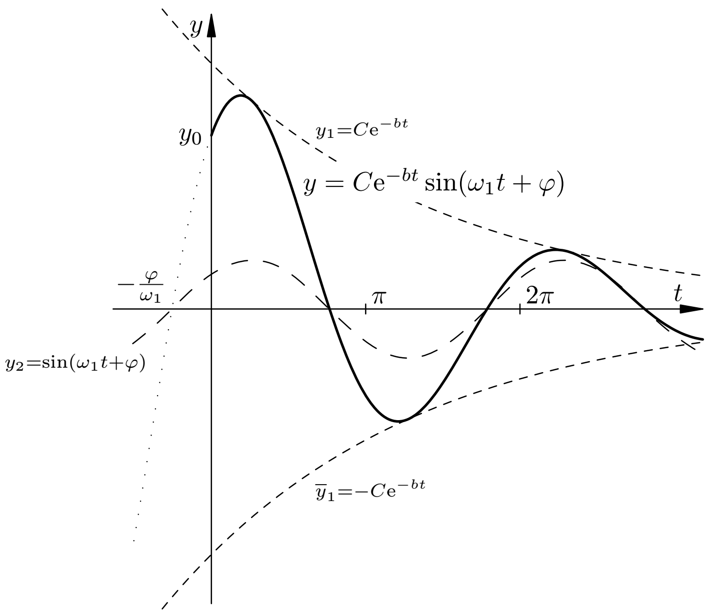
iii) Je-li $b < \omega_0$ a označíme-li $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$, je obecné řešení (6.2) tvaru

$$y = \mathrm{e}^{-bt}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) = C\,\mathrm{e}^{-bt} \sin(\omega_1 t + \varphi) \quad (\text{tzv. } \textit{oscilatorický útlum}) .$$

Perioda $T = 2\pi/\omega_1$ je přitom nyní delší než u netlumeného kmitání. Volíme-li opět $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = 0$, pak dosazením těchto podmínek do obecného řešení lze konstanty C, φ specifikovat pomocí vztahů

$$C \cos \varphi = \frac{y_0 b}{\omega_1}, \qquad C \sin \varphi = y_0 .$$

Uvedené vyjádření pro y je tedy rovnicí harmonického pohybu, kde amplituda $C\,\mathrm{e}^{-bt}$ je funkcí času a s rostoucím časem klesá (viz obr. 6.4).



Obr. 6.4: Oscilatorický útlum

c) Vynucené kmitání. Působí-li nyní na pohyb hmotného bodu periodicky se měnící síla $F_3 = P \sin \omega t$, pak tento pohyb nazýváme *vynuceným kmitáním*. Pro *netlumené vynucené kmitání* tedy platí diferenciální rovnice

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{P}{m} \sin \omega t . \tag{6.4}$$

Řešení této nehomogenní LODR2 lze nalézt snadno metodou neurčitých koeficientů. Příslušná homogenní LODR2 je rovnice (6.1), a odtud podle předcházející části

$$y_h = C \sin(\omega_0 t + \varphi) .$$

Pro $\omega \neq \omega_0$ předpokládáme partikulární řešení y_p ve tvaru

$$y_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \qquad A, B = ?$$

Po dosazení derivací

$$\dot{y}_p = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t, \qquad \ddot{y}_p = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t$$

do (6.4) dostáváme

$$A(-\omega^2+\omega_0^2)\cos\omega t + B(-\omega^2+\omega_0^2)\sin\omega t = \frac{P}{m}\sin\omega t\,.$$

Porovnání koeficientů:

$$\begin{array}{lllll} \cos\omega t: & A(-\omega^2+\omega_0^2)=0 & \Rightarrow & A=0, \\ \sin\omega t: & B(-\omega^2+\omega_0^2)=\frac{P}{m} & \Rightarrow & B=\frac{P}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\,. \end{array}$$

Odtud pro $\omega\neq\omega_0$ dostáváme řešení (6.4) ve tvaru

$$y = y_h + y_p = C\sin(\omega_0 t+\varphi) + B\sin\omega t\,, \tag{6.5}$$

kde konstanty C, φ jsou dány počátečními podmínkami a

$$B = \frac{P}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\,. \tag{6.6}$$

Pro $\omega=\omega_0$ (případ tzv. *rezonance*) je třeba výše navržený tvar pro y_h násobit proměnnou t, a proto předpokládáme

$$y_p = Dt\cos\omega_0 t + Et\sin\omega_0 t, \qquad D, E=?$$

Odtud

$$\begin{aligned} \dot y_p &= (D+E\omega_0 t)\cos\omega_0 t + (-D\omega_0 t + E)\sin\omega_0 t, \\ \ddot y_p &= (-D\omega_0^2 t + 2E\omega_0)\cos\omega_0 t + (-2D\omega_0 - E\omega_0^2 t)\sin\omega_0 t \end{aligned}$$

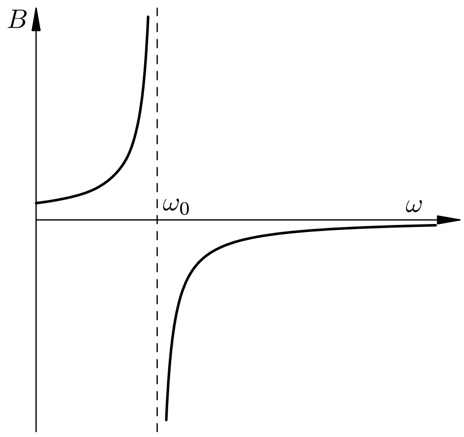
a po dosazení do (6.4)

$$(-D\omega_0^2 t + 2E\omega_0)\cos\omega_0 t + (-2D\omega_0 - E\omega_0^2 t)\sin\omega_0 t + \omega_0^2[Dt\cos\omega_0 t + Et\sin\omega_0 t] = \frac{P}{m}\sin\omega_0 t\,.$$

Odtud úpravou a porovnáním koeficientů dostáváme $E=0$, $D=-P/(2m\omega_0)$. Pro $\omega=\omega_0$ je tedy řešení tvaru

$$y = C\sin(\omega_0 t+\varphi) - \frac{P}{2m\omega_0}t\cos\omega_0 t\,.$$

Všimněme si, že toto řešení (popisující případ $\omega=\omega_0$) je neohraničenou funkcí, a to na rozdíl od vztahu (6.5) (popisujícího případ $\omega\neq\omega_0$). Závislost B na ω je podle vztahu (6.6) znázorněna na obr. 6.5 jako tzv. *rezonanční křivka*.



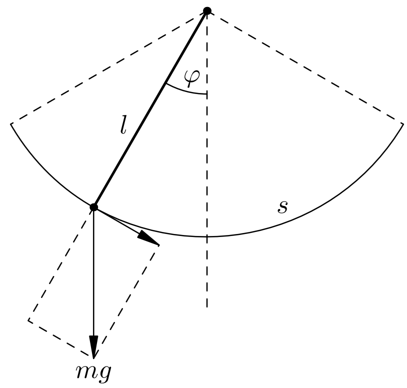
Obr. 6.5: Rezonanční křivka

Snadno se přesvědčíme, že diferenciální rovnice pro *vynucené tlumené kmitání* je tvaru

$$\ddot y + 2b\dot y + \omega_0^2 y = \frac{P}{m}\sin\omega t\,.$$

Analýzu řešení této rovnice lze promyslet analogicky, jak jsme učinili v předcházejících případech.

Příklad 6.20. (Matematické kyvadlo) Mějme kuličku o hmotnosti m zavěšenou na nehmotném a neroztažitelném vlákně délky l. Popište pohyb kuličky, přičemž tento pohyb vyjádřete jako funkci okamžité úhlové výchylky φ v závislosti na čase t, tj. $\varphi=\varphi(t)$.



Obr. 6.6: Matematické kyvadlo

Řešení. Gravitační sílu rozložíme do směru tečny a normály. Její složka ve směru normály nepůsobí, protože vlákno je neroztažitelné. Složka gravitační síly ve směru tečny je $-mg\sin\varphi$ (působí proti směru výchylky). Dále předpokládejme, že odpor prostředí je zanedbatelný. Podle obr. 6.6 je $s = l\varphi$, tedy $\ddot{s} = l\ddot{\varphi}$, a odtud podle druhého Newtonova zákona platí

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi\,,$$

nebo-li

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0\,. \tag{6.7}$$

Tato rovnice je nelineární ODR2, a je proto třeba ji řešit numericky. Dobrou informaci o přibližném chování řešení nám však může dát i metoda rozvoje řešení do mocninné řady.

Pro ilustraci této metody doplňme rovnici (6.7) o počáteční podmínky

$$\varphi(0) = \frac{\pi}{4}, \qquad \dot{\varphi}(0) = 0,$$

které zachycují skutečnost, že počáteční výchylka kyvadla je $\pi/4$ a kyvadlo je uvolněno s nulovou počáteční rychlostí. Hledejme řešení φ ve tvaru řady

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots, \qquad a_k = ?.$$

Protože $a_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}$, dostáváme $a_0 = \pi/4$, $a_1 = 0$. Dosazením $t = 0$ do rovnice (6.7) máme $\ddot{\varphi}(0) = -\frac{g}{l}\sin\varphi(0) = -\frac{g}{l}\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{g\sqrt{2}}{2l}$, tj. $a_2 = -\frac{g\sqrt{2}}{4l}$. Derivováním rovnice (6.7) podle t pak obdržíme vztah $\varphi^{(3)} + \frac{g}{l}(\cos\varphi)\dot{\varphi} = 0$, tedy $\varphi^{(3)}(0) = 0$, tj. $a_3 = 0$. Opakovanou derivací dostáváme

$$\varphi^{(4)} + \frac{g}{l}\left[(-\sin\varphi)\dot{\varphi}^2 + (\cos\varphi)\ddot{\varphi}\right] = 0,$$

tedy $\varphi^{(4)}(0) = -\frac{g}{l}(\cos\varphi(0))\ddot{\varphi}(0) = \frac{g^2}{2l^2}$, tj. $a_4 = \frac{g^2}{48l^2}$. Tento postup je k dosažení větší přesnosti možné dále opakovat. V našem případě platí náhrada

$$\varphi(t) \approx \frac{\pi}{4} - \frac{g\sqrt{2}}{4l}t^2 + \frac{g^2}{48l^2}t^4.$$

Poznamenejme ještě, že uvažujeme-li pouze malé výchylky φ od vertikální osy, lze provést tzv. linearizaci a tuto nelineární rovnici nahradit na základě vztahu $(\sin\varphi)/\varphi \to 1$ pro $\varphi \to 0$ rovnicí

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0,$$

což je homogenní lineární ODR2 s konstantními koeficienty. Její obecné řešení je tvaru

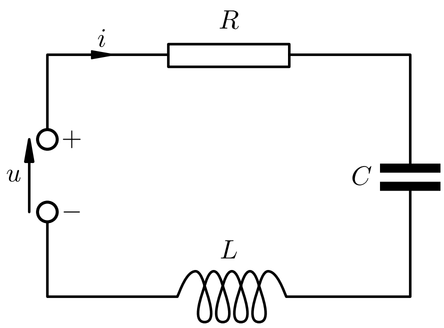
$$\varphi(t) = C_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

přičemž po dosazení počátečních podmínek dostáváme $C_1 = \pi/4, C_2 = 0$, tedy $\varphi(t) = \frac{\pi}{4}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$. Rozvojem tohoto řešení do mocninné řady

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{g}{2l}t^2 + \frac{g^2}{4l^2}t^4 - \dots\right)$$

získáme bližší představu o míře přesnosti uvedené náhrady.

Příklad 6.21. (R-L-C elektrický obvod) Najděme funkci $i = i(t)$ popisující závislost intenzity elektrického proudu protékajícího elektrickým obvodem (viz obr. 6.7), který se skládá z ohmického odporu R, kondenzátoru s kapacitou C a cívky s indukčností L v sériovém zapojení, je-li tento obvod připojen na zdroj střídavého napětí $u = U \sin \omega t$ (U je amplituda a ω kruhová frekvence).



Obr. 6.7: R-L-C elektrický obvod

Řešení. Příslušnou diferenciální rovnici lze odvodit takto: Napětí na odporu R je podle Ohmova zákona rovno Ri, napětí na kondenzátoru q/C, kde q je náboj na kondenzátoru. Podle Faradayova indukčního zákona se v cívce indukuje napětí

$$U_{\text{ind}} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},$$

takže podle druhého Kirchhoffova zákona

$$Ri + \frac{1}{C}q = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + U \sin \omega t\,.$$

Pro proud procházející kondenzátorem platí $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, takže derivováním poslední rovnice dostaneme

$$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + U\omega \cos \omega t\,,$$

nebo-li

$$Li'' + Ri' + \frac{1}{C}i = U\omega \cos \omega t\,,$$

což je nehomogenní LODR2 pro hledanou funkci $i = i(t)$. Tuto rovnici lze opět snadno řešit metodou neurčitých koeficientů.