# 4. Diferenciál a Taylorova věta

**Definice 4.1.** Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $a \in Df$. Řekneme, že $f$ je **diferencovatelná v bodě** $a$, když $\forall h \in V_n$ takový, že $a + h \in Df$ platí $f(a+h) - f(a) = \mathbf{grad} f(a) \cdot h + |h| \cdot \tau(h)$, kde $\lim\limits_{h \to o} \tau(h) = 0$. Funkce $\tau(h)$ se nazývá nulová funkce. Číslo

$$\mathrm{d}f_h(a) = \mathbf{grad} f(a) \cdot h = (f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_n}(a)) \cdot (h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(a) h_i$$

se nazývá totální diferenciál funkce $f$ v bodě $a$ při přírůstku $h$ a zobrazení $\mathrm{d}f(a) : V_n \to \mathbf{R}$ se nazývá **diferenciál funkce** $f$ **v bodě** $a$.

**Poznámka 4.2.**

1. Každá funkce $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ má v $a \in Df$ nejvýše jeden totální diferenciál $\mathrm{d}f(a)$.
2. $\mathrm{d}f(a)$ je lineární funkce. Pro libovolné $h_1, h_2 \in V_n$ a $c \in R$ platí $\mathrm{d}f(a)(h_1 + h_2) = \mathrm{d}f(a)(h_1) + \mathrm{d}f(a)(h_2)$ a $\mathrm{d}f(a)(c \cdot h) = c \cdot \mathrm{d}f(a)(h)$.
3. V literatuře se používají často různá označení. Následující zápisy znamenají totéž: $d_h f(a) = \mathrm{d}f(a)(h) = \mathrm{d}f(a, h)$.

**Příklad 4.3.** Buďte $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $f_i(x) = f_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ funkce pro $i = 1, \ldots, n$. Spočtěme $\mathrm{d}f_i(x)$.

*Řešení.* Předně platí, že $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0, & \text{pro } i \neq j, \\ 1, & \text{pro } i = j. \end{cases}$ Odtud plyne $\mathrm{d}f_i(x)(h) = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) h_i = h_i$. Protože $\mathrm{d}f_i(x) = \mathrm{d}x_i$, platí $\mathrm{d}x_i = h_i$. Pak lze psát $h = (h_1, \ldots, h_n) = (\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n) = \mathrm{d}x$ a diferenciál funkce $f$ v obecném bodě $x = [x_1, \ldots, x_n]$ při přírůstku $h$ lze zapsat ve tvaru $\mathrm{d}_h f(x) = \mathrm{d}f(a)(h) =$
$= \left( \frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right) f(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} \mathrm{d}x_n \right) f(x)$.

**Věta 4.4.** Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, a \in Df$.

i) Nechť $f$ je diferencovatelná v bodě $a$. Pak $f$ je v tomto bodě spojitá.

ii) Nechť existují $f'_{x_i}$ pro $i = 1, \ldots, n$ v nějakém okolí $K(a, \delta)$ a $f'_{x_i}$ jsou spojité v $a$. Pak $f$ je diferencovatelná v $a$.

**Definice 4.5.** Buď $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definovaná vztahem $g(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b$, kde $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbf{R}$. Pak $Gg$ se nazývá **nadrovina** v $\mathbf{R}^{n+1}$. (Speciálně pro $n = 2$ je $Gg$ rovina.)

Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ a $a \in Df$ bod takový, že existuje okolí $K(a, \delta) \subseteq Df$. Řekneme, že nadrovina $Gg$ je **tečná nadrovina** ke grafu $Gf$ v bodě $[a, f(a)]$, když

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{|x - a|} = 0.$$

**Věta 4.6.** Graf funkce $f$ má v bodě $[a, f(a)]$ tečnou nadrovinu právě tehdy, když $f$ je diferencovatelná v bodě $a$.

Pak **rovnice tečné nadroviny** v $\mathbf{R}^{n+1}$ má tvar

$$x_{n+1} = f(a) + f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + f'_{x_n}(a)(x_n - a_n),$$

kde $a = [a_1, \ldots, a_n]$. Rovnici lze zapsat ve tvaru $f'_{x_1}(a)x_1 + \cdots + f'_{x_n}(a)x_n - x_{n+1} + c = 0$, kde $c \in \mathbf{R}$.

**Definice 4.7.** Vektor $\mathbf{n}$ definovaný vztahem $\mathbf{n} = (f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_n}(a), -1) \in V_{n+1}$ se nazývá **normálový vektor** tečné nadroviny funkce $f$ v bodě $[a, f(a)]$. Přímka v $\mathbf{R}^{n+1}$ definovaná vektorovou rovnicí

$$[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] = [a_1, \ldots, a_n, f(a_1, \ldots a_n)] + t\big(f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_n}(a), -1\big), t \in \mathbf{R},$$

se nazývá **normála** grafu $Gf$ v bodě $[a, f(a)]$.

**Poznámka 4.8.**

1. Diferenciálu $d_h f(a)$ lze využít k přibližnému vyjádření přírůstku funkce. Platí

$$d_h f(a) \approx f(a + h) - f(a).$$

2. **Diferenciál vyjadřuje přírůstek na tečné nadrovině.**
3. Výraz $f(x, y)\mathrm{d}x + g(x, y)\mathrm{d}y$ je totální diferenciál nějaké funkce $\Leftrightarrow f'_y = g'_x$.

**Příklad 4.9.** Spočtěte diferenciál funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x + \ln y)$ v bodě $a = [0, 1]$ při přírůstku $h = (-0.2, 0.1)$.

*Řešení.* Spočteme nejprve parciální derivace funkce $f$. Platí

$$f'_x = \frac{1}{1 + (x + \ln y)^2}, f'_x(a) = 1, \quad f'_y = \frac{1}{y(1 + (x + \ln y)^2)}, f'_y(a) = 1.$$

Odtud a z obecného tvaru diferenciálu plyne $d_h f(a) = f'_x(a)h_1 + f'_y(a)h_2 = 1 \cdot (-0.2) + 1 \cdot 0.1 = -0.1$.

**Příklad 4.10.** Určete rovnici tečné roviny a normály k paraboloidu $f(x, y) = x^2 + y^2$ v bodě $[-2, 1, ?]$.

*Řešení.* Dopočítáme chybějící souřadnici. Platí: $? = f(-2, 1) = 5$. Dále spočteme parciální derivace $f'_x = 2x$, $f'_x(-2, 1) = -4$, $f'_y = 2y$, $f'_y(-2, 1) = 2$. Dosadíme do rovnice tečné roviny. Dostáváme $z - 5 = = -4(x + 2) + 2(y - 1)$. Odtud $4x - 2y + z + 5 = 0$. Normálový vektor je $n = (4, -2, 1)$. Rovnice normály má tvar $[x, y, z] = [-2, 1, 5] + t(4, -2, 1)$, kde $t \in \mathbf{R}$.

**Definice 4.11.** Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$, $k \geq 2$. Řekneme, že funkce $f$ je **$k$-krát diferencovatelná** v $a$, když existuje okolí $K(a, \delta)$ v němž jsou diferencovatelné všechny parciální derivace řádu $0 \leq m \leq k-2$ a v bodě $a$ jsou diferencovatelné všechny parciální derivace řádu $k-1$. **Diferenciál $k$-tého řádu** funkce $f$ je pak zobrazení $\mathrm{d}^k f(x) : V_n^k \to \mathbf{R}$ definované vztahem

$$\mathrm{d}^k f(x)(u_1, \dots, u_n) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} u_{11} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} u_{1n} \right) \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_1} u_{k1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} u_{kn} \right) f(x),$$

kde $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{in}) \in V_n$.

Speciálně pro $u_1 = \dots = u_k = h = (h_1, \dots, h_n) \in V_n$ píšeme

$$\mathrm{d}_h^k f(x) = \mathrm{d}^k f(x)(h, \dots h) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_1} h_n \right)^k f(x).$$

**Poznámka 4.12.** K exaktnímu vyjádření $\mathrm{d}_h^k f(x)$ lze použít tzv. **multinomickou větu**.
Buďte $n \geq 2, k \in \mathbf{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$. Pak platí

$$(a_1 + \dots + a_n)^k = \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \binom{k}{k_1, \dots, k_n} a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n}, \quad \text{kde} \binom{k}{k_1, \dots, k_n} = \frac{k!}{k_1! \dots k_n!}.$$

Součet probíhá přes všechny rozklady (kompozice) čísla $k$ na právě $n$ sčítanců, v nichž závisí na pořadí sčítanců.

**Poznámka 4.13.** Pro $n = 2$ dostáváme známou **binomickou větu**

$$(a_1 + a_2)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_1^i a_2^{k-i}.$$

**Poznámka 4.14.** Někdy diferenciálem $k$-tého řádu funkce $f$ v bodě $x$ nazýváme pouze zobrazení $D^k f(x) : V_n \to \mathbf{R}$, $D^k f(x)(h) = \mathrm{d}^k f(x)(h_1, \dots, h_2) = \mathrm{d}_h^k f(x)$.

**Věta 4.15.** Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, a \in Df$. Nechť $f$ má v nějakém $K(a, \delta)$ parciální derivace řádu $k$, které jsou spojité v $a$. **Pak existuje** $\mathrm{d}^k f(a)$.

**Věta 4.16.** Nechť funkce $u(x, y), v(x, y)$ mají parciální derivace prvního řádu v bodě $[x_0, y_0]$. Nechť $u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0)$. Je-li funkce $f(u, v)$ diferencovatelná v bodě $[u_0, v_0]$, pak **složená funkce** $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ má parciální derivace prvního řádu v $[x_0, y_0]$ a platí

$$F'_x(x_0, y_0) = f'_u(u_0, v_0) u'_x(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0) v'_x(x_0, y_0),$$

$$F'_y(x_0, y_0) = f'_u(u_0, v_0) u'_y(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0) v'_y(x_0, y_0).$$

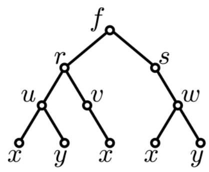
**Příklad 4.17.** Buď $f = f(u(x, y), v(x, y))$. Spočtěte $f''_{xy}$.

*Řešení.* Nejprve určíme $f'_x$. Platí $f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x$.
Nyní $f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_x) = \frac{\partial}{\partial y}(f'_u u'_x + f'_v v'_x) = \frac{\partial}{\partial y}(f'_u)u'_x + f'_u u''_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}(f'_v)v'_x + f'_v v''_{xy} = (f''_{uu}u'_y + f''_{uv}v'_y)u'_x +$
$+ f'_u u''_{xy} + (f''_{vu}u'_y + f''_{vv}v'_y)v'_x + f'_v v''_{xy} = f''_{uu}u'_x u'_y + f''_{uv}u'_x v'_y + f''_{vu}u'_y v'_x + f''_{vv}v'_x v'_y + f'_u u''_{xy} + f'_v v''_{xy}$.

**Poznámka 4.18.** K nalezení parciální derivace složené funkce ve zcela obecné situaci poskytneme aspoň návod. Předpokládejme, že $f$ je několikanásobně složená a má $n$ proměnných. Postupujeme tak, že nejprve analyzujeme strukturu složení funkce $f$. To provedeme tak, že nakreslíme schéma složení, tzv. **strom**. Strom se skládá z uzlů a hran. Uzly reprezentují proměnné a funkce, hrany závislosti mezi nimi. Uzly znázorníme v obrázku body nebo kolečky, hrany úsečkami, které uzly spojují. Kolik vede různých cest od uzlu $f$ k $x_i$, tolik bude mít derivace $f'_{x_i}$ sčítanců. Každý sčítanec je součinem tolika činitelů, kolik hran je na cestě z $f$ do $x_i$.

**Příklad 4.19.** Analyzujte strukturu složení funkce $f(x, y) = \sqrt[3]{x^y + \ln^2 x} \cdot \operatorname{arctg}(1 + \frac{x}{y})$, nakreslete odpovídající strom a spočtěte $f'_x, f'_y$.

*Řešení.* Označme $f(r, s) = r \cdot s$, $r(u, v) = \sqrt[3]{u + v^2}$, $s(w) = \operatorname{arctg}\ w$, $u(x, y) = x^y$, $v(x) = \ln x$, $w(x, y) = 1 + \frac{x}{y}$.
Nakreslíme schéma složení, viz Obrázek 4.1.




Obr. 4.1: Schéma složení funkce $f(x, y) = \sqrt[3]{x^y + \ln^2 x} \cdot \operatorname{arctg}(1 + \frac{x}{y})$

Graf na obrázku se nazývá strom. Z jeho struktury získáme vzorce pro hledané parciální derivace. Platí

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}, \quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Odtud plyne

$$f'_x = \frac{1}{3}\frac{yx^{y-1} + \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{(x^y + \ln x)^2}} \cdot \operatorname{arctg}(1 + \frac{x}{y}) + \sqrt[3]{x^y + \ln^2 x} \cdot \frac{1}{1 + (1 + \frac{x}{y})^2} \cdot \frac{1}{y},$$

$$f'_y = \frac{1}{3}\frac{x^y \ln x}{\sqrt[3]{(x^y + \ln x)^2}} \cdot \operatorname{arctg}(1 + \frac{x}{y}) + \sqrt[3]{x^y + \ln^2 x} \cdot \frac{1}{1 + (1 + \frac{x}{y})^2} \cdot \frac{-x}{y^2}.$$

**Definice 4.20.** Buďte $a \in \mathbf{R}^n, h \in V_n, h \neq 0$. Množina $\{x \in \mathbf{R}^n, x = a + th, t \in \langle 0, 1\rangle\}$ se nazývá úsečka v $\mathbf{R}^n$ o krajních bodech $a, a + h$.

**Věta 4.21.** **Taylorova věta** Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \Omega \subseteq Df$ otevřená množina. Nechť $m \in N$ a pro libovolné $x \in \Omega$ existuje $\mathrm{d}_h^{m+1} f(x)$. Buď $a \in \Omega, h = (h_1, \dots, h_n) \in V_n$ a nechť úsečka $a, a + h$ leží v $\Omega$. Pak existuje $t \in \mathbf{R}$, $0 < t < 1$ tak, že platí

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}_h f(a) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}_h^2 f(a) + \cdots + \frac{1}{m!}\mathrm{d}_h^m f(a) + \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}_h^{m+1} f(a + th).$$

**Poznámka 4.22.**

1. Polynom $T_m(x) = f(a) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}_h f(a) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}_h^2 f(a) + \cdots + \frac{1}{m!}\mathrm{d}_h^m f(a)$ se nazývá **Taylorův polynom** $m$-tého řádu funkce $f$ v bodě $a$.
2. Funkce $R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}_h^{m+1} f(a + th)$ **Taylorův zbytek**.
3. Formule uvedená v Taylorově větě se nazývá Taylorův vzorec nebo též Taylorova formule.
4. Pro $a = [0, \ldots, 0]$ mluvíme o **Maclaurinově vzorci**.
5. Věta platí i za slabšího předpokladu, když $\mathrm{d}_h^{m+1} f(x)$ existuje v každém bodě $x$ úsečky $a, a+h$. Zbytek $R_m(x)$ vyjadřuje chybu, které se dopustíme, nahradíme-li funkci $f$ na $\Omega$ polynomem $T_m(x)$. Chybu $R_m(x)$ nedokážeme přesně spočítat, ale v řadě případů ji dokážeme uspokojivě odhadnout. Při konstrukci polynomu $T_m(x)$ používáme vztah $\mathrm{d}x = h = x - a$.

**Příklad 4.23.** Spočtěte Taylorův polynom $T_2(x, y)$ funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x + \ln y)$ v bodě $a = [0, 1]$.

*Řešení.* Parciální derivace prvního řádu známe z Příkladu 4.9. Dále víme, že $\mathrm{d}x = x$ a $\mathrm{d}y = y - 1$. Tedy první diferenciál funkce $f$ v $a$ má tvar $d_h f(a) = f'_x(a)\mathrm{d}x + f'_y(a)\mathrm{d}y = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y = x + y - 1$.

Pro parciální derivace druhého řádu platí:

$$f''_{xx} = \frac{-2(x + \ln y)}{(1 + (x + \ln y)^2)^2}, f''_{xy} = \frac{-2(x + \ln y)}{y(1 + (x + \ln y)^2)^2}, f''_{yy} = \frac{-(1 + x + \ln y)^2}{y^2(1 + (x + \ln y)^2)^2},$$
$$f''_{xx}(a) = 0, f''_{xy}(a) = 0, f'_{yy}(a) = -1.$$

Druhý diferenciál funkce $f$ v bodě $a$ je tvaru

$$\mathrm{d}_h f(a) = f''_{xx}(a)\mathrm{d}x^2 + 2f'_{xy}(a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{yy}(a)\mathrm{d}y^2 = -\mathrm{d}y^2 = -(y - 1)^2.$$

Diferenciály dosadíme do Taylorovy formule $T_2(x, y) = f(a) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}_h f(a) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}_h^2 f(a)$ a provedeme úpravu. Platí $T_2(x, y) = -\frac{3}{2} + x + 2y - \frac{1}{2}y^2$.