7. Integrál přes n-rozměrný interval

Definice 7.1. Buď $A = \langle a_1, b_1\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ n-rozměrný uzavřený interval a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce ohraničená na $A \subseteq Df$. Definujme

- $|A| = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$ **objem** A.
- $d(A) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$ **průměr** A.
- Pro $i = 1, \dots, n$ buď $D_i : a_i = x_i^{(0)} < x_i^{(1)} < \cdots < x_i^{(m_i)} = b_i$ tzv. **dělení** $\langle a_i, b_i\rangle$.
- Pak $D = [D_1, \dots, D_n]$ se nazývá **dělení** A.

Dále postupujme následovně:

1. Dělení D rozloží A na $m = m_1 \cdot \cdots \cdot m_n$ n-rozměrných intervalů
$$A_{k_1,\dots,k_n} = \left\langle x_1^{(k_1-1)}, x_1^{(k_1)} \right\rangle \times \cdots \times \left\langle x_n^{(k_n-1)}, x_n^{(k_n)} \right\rangle,$$
kde $1 \le k_i \le m_i$ a $i = 1, \dots, n$. Označme tyto intervaly pro zjednodušení $A^{(1)}, \dots, A^{(m)}$.
2. V každém intervalu $A^{(j)}$ pro $j = 1, \dots, m$ zvolme bod (tj. reprezentanta intervalu A_j) $y_j \in A^{(j)}$.
3. Položme $\|D\| = \max\{d(A^{(j)}); j = 1, \dots, m\}$. $\|D\|$ je tzv. **norma dělení** D.
4. Nyní každému $k \in \mathbb{N}$ přiřaďme dělení $D(k)$ intervalu A. Posloupnost $\{D(k)\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá **nulová posloupnost**, když $\|D(k)\| \to 0$.
5. Definujme $S_f(D) = \sum_{j=1}^{m} f(y_j)|A^{(j)}|$. Číslo $S_f(D)$ se nazývá **integrální součet** funkce f pro dělení D intervalu A a pro danou volbu reprezentantů y_j.

Definice 7.2. Řekneme, že ohraničená funkce f je Riemannovsky integrovatelná na A a číslo $a \in R$ nazveme **n-rozměrný Riemannův integrál funkce f na množině A**, když pro každou nulovou posloupnost $D(k)$ dělení intervalu A a pro každou volbu reprezentantů v těchto děleních platí

$$\lim_{k\to\infty} S_f(D(k)) = a.$$

Poznámka 7.3. Riemannův n-rozměrný integrál f na A budeme označovat

$$\int_A f(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n, \qquad \text{nebo také} \qquad \overbrace{\int \cdots \int}^{n-\text{krát}}_A f(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n.$$

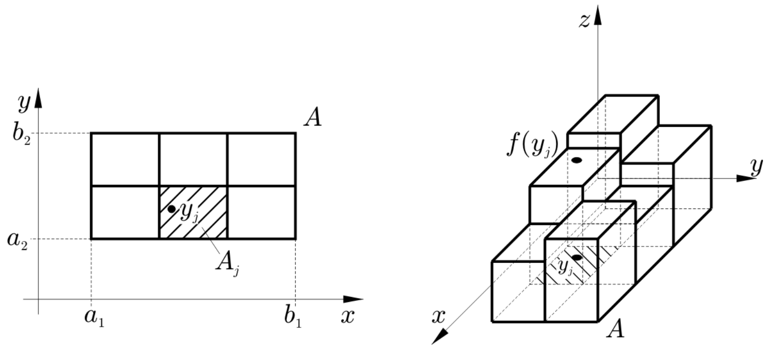
Poznámka 7.4. Speciálně dvojrozměrný a trojrozměrný integrál funkce f na A budeme označovat

$$\iint_A f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{a} \quad \iiint_A f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Poznámka 7.5.

1. Místo dvojrozměrný a trojrozměrný říkáme rovněž **dvojný** a **trojný**.
2. Historickou motivací k zavedení vícerozměrných integrálů byl výpočet objemů těles.

Objasněme podrobněji hlavní myšlenku konstrukce a pro názornost uveďme Obrázek 7.1 pro případ $n = 2$.



Obr. 7.1: Myšlenka Definice 7.1 pro $n = 2$

Integrální součet $S_f(D)$ přibližně vyjadřuje hodnotu integrálu z f na A. Čím je dělení D jemnější, tím přesněji $S_f(D)$ vyjadřuje integrál. Předpoklad konvergence posloupnosti norem dělení k nule znamená, že zjemňování je rozloženo po A rovnoměrně. Číslo $S_f(D)$ pak vyjadřuje součet objemů $n+1$ rozměrných kvádrů nad dělením D s výškami závislými na volbě reprezentantů. Po limitním přechodu pak získáme objem $n + 1$ rozměrného tělesa nad podstavou A, které je shora ohraničeno grafem funkce f.

Definice 7.6. Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq Df$ ohraničená množina. Funkce definovaná vztahem

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \in \mathbb{R}^n - \Omega, \\ 1, & \text{pro } x \in \Omega, \end{cases}$$

se nazývá **charakteristická funkce množiny** Ω.

Zřejmě pro ohraničenou množinu Ω vždy existuje n-rozměrný uzavřený interval A tak, že $\Omega \subseteq A$.

Řekneme, že f je **Riemannovsky integrovatelná (RI) na** Ω, když funkce $\chi_\Omega \cdot f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je Riemannovsky integrovatelná na A. Pak klademe

$$\int_\Omega f(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \int_A \chi_\Omega(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n.$$

Poznámka 7.7. Definice je korektní, protože integrál z funkce f nezávisí na volbě A.

1. Existuje-li $\int_\Omega \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$, pak se Ω nazývá **měřitelná v Jordanově smyslu** a $|\Omega| = \int_\Omega \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$ se nazývá **míra** Ω.

2. Pro $n = 2$ je míra obsah, pro $n = 3$ objem.

Věta 7.8.

1. Buďte $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ měřitelné množiny, které nemají společné vnitřní body. Pak
$$|\Omega_1 \cup \Omega_2| = |\Omega_1| + |\Omega_2|.$$
2. Buď f spojitá na měřitelné množině Ω. Pak f je Riemannovsky integrovatelná na Ω.
3. Buď f ohraničená na Ω a nechť pro množinu A všech bodů nespojitosti f platí $|A| = 0$. Pak f je Riemannovsky integrovatelná na Ω.
4. Nechť f, g jsou Riemannovsky integrovatelné na Ω a pro každý bod $[x_1, \dots, x_n] \in \Omega$ platí $f(x_1, \dots$ $\dots, x_n) \leq g(x_1, \dots, x_n)$. Pak
$$\int_\Omega f(x_1, \dots, x_n) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \leq \int_\Omega g(x_1, \dots, x_n) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n.$$
Speciálně, když pro každé $[x_1, \dots, x_n] \in \Omega$ platí $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$, pak
$$\int_\Omega f(x_1, \dots, x_n) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \geq 0.$$

Věta 7.9.

1. Nechť $\forall [x_1, \dots, x_n] \in \Omega$ platí $c_1 \leq f(x_1, \dots, x_n) \leq c_2$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a f je Riemannovsky integrovatelná na měřitelné množině Ω. Pak
$$c_1|\Omega| \leq \int_\Omega f(x_1, \dots, x_n) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \leq c_2|\Omega|.$$
2. Buď f spojitá funkce na uzavřené měřitelné množině Ω. Pak uvnitř Ω existuje bod $[a_1, \dots, a_n] \in \Omega$ tak, že platí
$$\int_\Omega f(x_1, \dots, x_n) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = f(a_1, \dots, a_n)|\Omega|.$$
Číslo $f(a_1, \dots, a_n)$ se nazývá **střední hodnota f na Ω** a platí
$$f(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x_1, \dots, x_n) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n.$$

Věta 7.10. Buďte $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce Riemannovsky integrovatelné na měřitelné množině Ω a $c_i \in \mathbb{R}$ libovolné konstanty, kde $i = 1, \dots, m$. Pak funkce $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i f_i(x_1, \dots, x_n)$ je Riemannovsky integrovatelná na Ω a platí
$$\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x_1, \dots, x_n) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \int\limits_\Omega f_i(x_1, \dots, x_n) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n.$$

8. Integrál přes elementární oblast

Definice 8.1. Množina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá **elementární oblast typu** $(x_1, \ldots, x_n)$, když každý bod $[x_1, \ldots, x_n] \in \Omega$ splňuje nerovnosti

$$a_1 \leq x_1 \leq a_2$$
$$g_1(x_1) \leq x_2 \leq h_1(x_1)$$
$$g_2(x_1, x_2) \leq x_3 \leq h_2(x_1, x_2)$$
$$\vdots$$
$$g_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leq x_n \leq h_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

kde $a_1, a_2 \in R$, $a_1 < a_2$ a pro každé $i = 1, \ldots, n-1$ jsou $g_i, h_i : \mathbb{R}^i \to \mathbb{R}$ spojité funkce splňující podmínku $g_i < h_i$ pro vnitřní body Ω.

Buď σ permutace množiny $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Pokud v předchozích nerovnostech píšeme $\sigma(x_i)$ místo x_i, pak Ω se nazývá **elementární oblast typu** $(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))$.

Poznámka 8.2.

1. Místo elementární se též někdy říká **normální**.
2. Tatáž množina může být různých typů.
3. Speciálně n-rozměrný uzavřený interval je elementární oblast všech možných typů.

Příklad 8.3.

1. Kruh $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ je elementární oblast typu (x, y) ale i typu (y, x). Platí $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$ a $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -1 \leq y \leq$ $\leq 1, -\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}$.
2. Mezikruží Ω, kde $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ není elementární oblastí žádného typu, ale lze ji na elementární rozdělit.

Definice 8.4. Množina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá **regulární**, je-li sjednocením konečného počtu elementárních oblastí libovolného typu, které mají společné nejvýše svoje hranice.

Věta 8.5. Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ elementární oblast. Pak Ω je měřitelná.

Důsledek. Každá regulární množina je měřitelná.

Věta 8.6. Buď $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_i$ regulární oblast, složená z elementárních oblastí Ω_i, které mají společné nejvýše svoje hranice. Pak

$$\int\limits_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\Omega_i} f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Věta 8.7. Fubiniho věta Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ elementární oblast typu $(x_1, \dots, x_n)$ a nechť funkce f je Riemannovsky integrovatelná na Ω. Pak

$$\int\limits_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \int\limits_{a_1}^{a_2} \Bigg(\int\limits_{g_1(x_1)}^{h_1(x_1)} \Big(\dots \big(\int\limits_{g_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1})}^{h_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_n \big) \dots \Big)\mathrm{d}x_2 \Bigg)\mathrm{d}x_1.$$

Pro typ $\big(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)\big)$ platí analogické tvrzení.

Důsledek. (Dirichletova věta) Buď $\Omega = \langle a_1, b_1\rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n\rangle$ n-rozměrný uzavřený interval a nechť funkce f je Riemannovsky integrovatelná na Ω. Pak

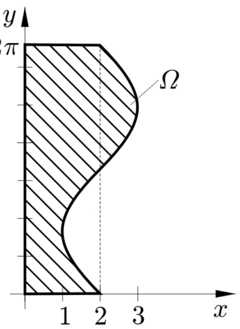
$$\int\limits_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \int\limits_{a_1}^{b_1} \Big(\dots \big(\int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_n \big) \dots \Big)\mathrm{d}x_1.$$

Je-li navíc funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ ve tvaru součinu $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_n(x_n)$, pak integrál lze počítat podle vztahu

$$\int\limits_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \int\limits_{a_1}^{b_1} f_1(x_1)\mathrm{d}x_1 \cdot \dots \cdot \int\limits_{a_n}^{b_n} f_n(x_n)\mathrm{d}x_n.$$

Příklad 8.8. Spočtěte dvojrozměrný integrál $\iint\limits_{\Omega} \frac{x}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x = 0, y = 0,\ y = 2\pi$, $x = 2 + \sin y$.

Řešení. Nejprve nakreslíme oblast Ω. Vztahy $x = 0, y = 0, y = 2\pi$ určují přímky, které v rovině spolu s křivkou $x = 2 + \sin y$ vymezují obor Ω. Viz Obrázek 8.1.



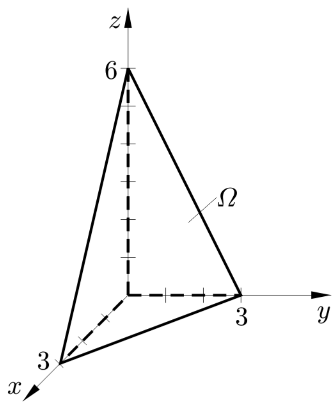
Obr. 8.1: $\Omega : x = 0, y = 0, y = 2\pi, x = 2 + \sin y$

Oblast Ω je typu (y, x), ale není typu (x, y). Nerovnosti charakterizující obor Ω jako oblast typu (y, x) jsou tvaru $0 \le y \le 2\pi, 0 \le x \le 2 + \sin y$. Aplikujeme Fubiniho větu.

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{x}{3}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{2+\sin y} \frac{x}{3}\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{x^2}{6} \right]_0^{2+\sin y} \mathrm{d}y = \frac{1}{6} \int\limits_0^{2\pi} (2 + \sin y)^2 \mathrm{d}y = \frac{1}{6} \int\limits_0^{2\pi} (4 + \sin y + \sin^2 y)\, \mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{6} \left[4y - 4\cos y + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin 2y \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}.$$

Příklad 8.9. Spočtěte trojrozměrný integrál $\iiint_{\Omega} y\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde Ω je určena vztahy $x, y, z \ge 0,\ 2x + 2y + {} + z \le 6$.

Řešení. Nejprve nakreslíme oblast Ω. Vztahy $x = 0, y = 0, z = 0, 2x + 2y + z = 6$ určují roviny, které v trojrozměrném prostoru vymezují čtyřstěn. Viz Obrázek 8.2.



Obr. 8.2: $\Omega : x, y, z \geq 0, 2x + 2y + z \leq 6$

Čtyřstěn je oblast libovolného typu. Provedeme zápis pomocí nerovností. Typ oblasti zvolíme (x, y, z). Platí $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3 - x, 0 \leq z \leq 6 - 2x - 2y$. Nyní můžeme aplikovat Fubiniho větu.

$\iiint_\Omega y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^3 \Big(\int\limits_0^{3-x} \big(\int\limits_0^{6-2x-2y} y \,\mathrm{d}z\big)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 \big(\int\limits_0^{3-x} \Big[yz\Big]_0^{6-2x-2y} \mathrm{d}y\big)\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 \Big(\int\limits_0^{3-x} y(6-2x-2y) \,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x =$

$= 2\int\limits_0^3 \Big(\int\limits_0^{3-x} y(3 - x) - y^2\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^3 \Big[\frac{y^2}{2}(3 - x) - \frac{y^3}{3}\Big]_0^{3-x}\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^3 \frac{(3-x)^2}{6} - \frac{(3-x)^2}{6}\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^3 \frac{(3-x)^2}{6}\mathrm{d}x =$

$= \frac{1}{3}\Big[-\frac{(3-x)^4}{4}\Big]_0^3 = \frac{27}{4}.$

Pro ilustraci rozepíšeme ještě daný čtyřstěn jako oblast typu (y, z, x). Nerovnosti jsou tvaru $0 \leq y \leq \leq 3, 0 \leq z \leq 6-2y, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}(6-2y-z)$. Aplikace Fubiniho věty má pak tvar $\int\limits_0^3 \Big(\int\limits_0^{6-2y} \big(\int_0^{(6-2y-z)/2} y \,\mathrm{d}x\big)\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}y$.

9. Transformace integrálů

Definice 9.1. Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ uzavřená a ohraničená množina. Pak Ω se nazývá **n-rozměrná oblast**.

Definice 9.2. Buď $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zobrazení, kde $F = [f_1, \dots, f_n]$, přičemž $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$. Nechť $\Omega^* \subseteq DF$ je oblast a nechť ke každému bodu $[y_1, \dots, y_n] \in \Omega^*$ je rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(y_1, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \tag{9.1}$$

přiřazen bod $[x_1, \dots, x_n] = \big[f_1(y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(y_1, \dots, y_n)\big] \in \mathbb{R}^n$ tak, že platí:

a) Je-li $F(\Omega^*) = \Omega$, pak Ω je oblast v $\mathbb{R}^2$.

b) Zobrazení F je na $\Omega^* - h(\Omega^*)$ injektivní (prosté).

c) Je-li $\Omega_1^* \subseteq \Omega^*$ oblast, pak $F(\Omega_1^*)$ je oblast a platí $F(\Omega_1^*) \subseteq \Omega$.

Pak řekneme, že transformační rovnice (9.1) transformují oblast Ω na oblast Ω^*.
Zobrazení F se pak nazývá **transformace** a determinant

$$J(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}, & \dots & , \frac{\partial f_n}{\partial y_1} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_n}, & \dots & , \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \tag{9.2}$$

se nazývá **Jakobián transformace F**.

Věta 9.3. **(Věta o transformaci integrálu)** Nechť rovnice (9.1) transformují oblast Ω na oblast Ω^*, $f_1, \dots, f_n$ mají spojité parciální derivace na Ω^* a pro každý bod $[y_1, \dots, y_n] \in \Omega^* - h(\Omega^*)$ platí $J(y_1, \dots, y_n) \neq 0$. Dále nechť f je spojitá na oblasti Ω. Pak platí

$$\int\limits_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int\limits_{\Omega^*} f\big(f_1(y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(y_1, \dots, y_n)\big) \cdot J(y_1, \dots, y_n) \mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_n.$$

Důsledek. Nechť platí předpoklady Věty 9.3. Potom

1. pro $n = 2$ platí: Je-li $x = f_1(u, v), y = f_2(u, v)$, pak

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega^*} f\big(f_1(u, v), f_2(u, v)\big) \cdot J(u, v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v;$$

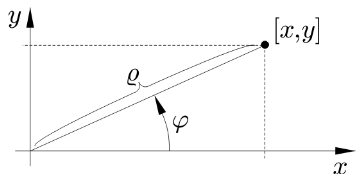
2. pro $n = 3$ platí: Je-li $x = f_1(u, v, w), y = f_2(u, v, w), z = f_3(u, v, w)$, pak

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} f\big(f_1(u, v, w), f_2(u, v, w), f_3(u, v, w)\big) \cdot J(u, v, w) \mathrm{d}u \mathrm{d}v \mathrm{d}w.$$

Definice 9.4. Buď $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformace, která je definovaná rovnicemi

$$\begin{aligned} x =& f_1(\varrho, \varphi) = \varrho \cos \varphi, \\ y =& f_2(\varrho, \varphi) = \varrho \sin \varphi, \end{aligned} \tag{9.3}$$

přičemž $DF = \langle 0, \infty) \times \langle 0, 2\pi)$. Pak F se nazývá **transformace do polárních souřadnic**. Rovnice transformují $\mathbb{R}^2$ na množinu $\langle 0, \infty) \times \langle 0, 2\pi)$. Význam ϱ, φ zachycuje následující Obrázek 9.1.



Obr. 9.1: Polární souřadnice

Věta 9.5. **Transformace do polárních souřadnic má Jakobián $J = J(\varrho, \varphi) = \varrho$.**

Důkaz: $J(\varrho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\varrho \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{vmatrix} = \varrho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \varrho.$

Poznámka 9.6. Buďte $x_0, y_0, a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. Rovnice

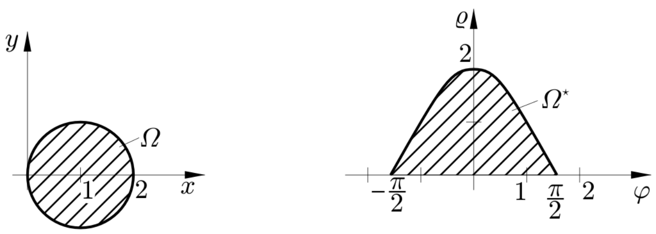
$$\begin{aligned} x &= x_0 + a\varrho \cos \varphi, \\ y &= y_0 + b\varrho \sin \varphi \end{aligned} \tag{9.4}$$

se nazývají transformační rovnice do **zobecněných polárních souřadnic.**

Jakobián této transformace je $J = J(\varrho, \varphi) = ab\varrho$.

Příklad 9.7. Spočtěte dvojrozměrný integrál $\iint\limits_{\Omega} x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\Omega : x^2 + y^2 \leq 2x$.

Řešení. Nejprve nakreslíme oblast Ω. Vztah $x^2 + y^2 \leq 2x$ upravíme na tvar $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Odtud je již zřejmé, že oblast Ω je kruh o poloměru 1 se středem v bodě $[1, 0]$. Viz Obrázek 9.2.



Obr. 9.2: Transformace do polárních souřadnic

Existuje více postupů, jak daný integrál vypočítat. Ukažme si dva postupy.

1. způsob řešení: V případě, že oblast Ω je kruh nebo jeho část, je výhodné provést transformaci do polárních souřadnic. Rovnice

$$x^2 + y^2 = 2x$$

hranice oblasti přejde transformací v rovnici

$$\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi = 2\varrho \cos \varphi,$$

tj.

$$\varrho = 2\cos\varphi.$$

Transformací se oblast Ω změní v oblast Ω^*. Přitom $\Omega^* : -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ a $0 \leq \varrho \leq 2\cos\varphi$. Viz Obrázek 9.2. Použijeme Větu 9.3 o transformaci. Platí

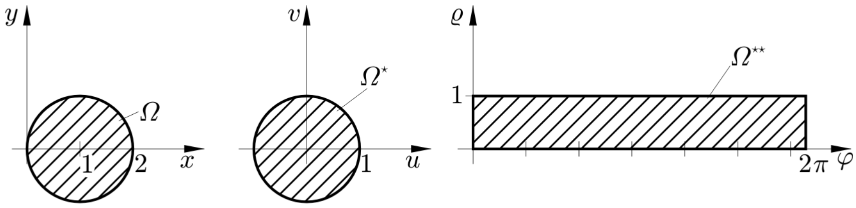
$$\iint\limits_{\Omega} x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega^*} \varrho\cos\varphi \cdot \varrho \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \iint\limits_{\Omega^*} \varrho^2\cos\varphi \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi.$$

Poslední integrál dopočítáme podle Fubiniho věty.

$$\iint\limits_{\Omega^*} \varrho^2\cos\varphi \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{0}^{2\cos\varphi} \varrho^2\cos\varphi \,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3}\varrho^3\cos\varphi \right]_0^{2\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3}\cos^4\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{8}{3}\left[\frac{1}{4}\cos^3 x \cdot \sin x + \frac{3}{8}\cos x \cdot \sin x + \frac{3}{8}x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\cdot\frac{3}{8}\pi = \pi.$$

2. způsob řešení: V následujícím řešení nejprve provedeme transformaci, která posune střed kruhu do počátku systému souřadnic. Teprve pak provedeme transformaci do polárních souřadnic. Viz Obrázek 9.3. V tomto případě se vyhneme integrálu z funkce $\cos^4 x$, který vyžaduje delší samostatný výpočet.



Obr. 9.3: Posunutí a transformace do polárních souřadnic

Chceme, aby se rovnice $(x-1)^2+y^2 = 1$ změnila v rovnici $u^2+v^2 = 1$. Je zřejmé, že stačí položit $u = x-1$ a $v = y$. Odtud plyne, že

$$x = u + 1,$$
$$y = v.$$

Jakobián této transformace je

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Platí

$$\iint\limits_{\Omega} x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega^*} (u+1) \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint\limits_{\Omega^{**}} (\varrho\cos\varphi + 1)\cdot\varrho \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \iint\limits_{\Omega^{**}} \varrho^2\cos\varphi \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi + \iint\limits_{\Omega^{**}} \varrho \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi =$$

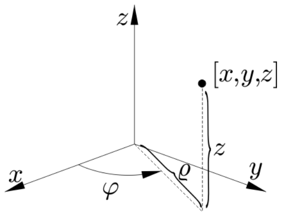
$$= \int\limits_0^1 \varrho^2 \mathrm{d}\varrho \cdot \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi + \int\limits_0^1 \varrho \,\mathrm{d}\varrho \cdot \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^1 \cdot [\sin\varphi]_0^{2\pi} + \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = \pi.$$

Definice 9.8. Buď $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformace, která je definovaná rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= f_1(\varrho,\varphi,z) = \varrho\cos\varphi, \\ y &= f_2(\varrho,\varphi,z) = \varrho\sin\varphi, \\ z &= f_3(\varrho,\varphi,z) = z, \end{aligned} \tag{9.5}$$

přičemž $DF = \langle 0,\infty) \times \langle 0, 2\pi) \times R$. Pak F se nazývá transformace do **válcových (cylindrických) souřadnic**.

Rovnice transformují $\mathbb{R}^3$ na množinu $\langle 0,\infty) \times \langle 0,2\pi) \times \mathbb{R}$. Význam ϱ, φ, z zachycuje následující Obrázek 9.4.



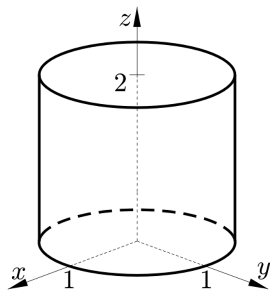
Obr. 9.4: Válcové souřadnice

Věta 9.9. Transformace do válcových souřadnic má Jakobián $J = J(\varrho, \varphi, z) = \varrho$.

Důkaz: $$J(\varrho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\varrho\sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \varrho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \varrho.$$

Příklad 9.10. Spočtěte trojrozměrný integrál $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde Ω je určena vztahy $x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2$.

Řešení. Nejprve nakreslíme oblast Ω. Vztah $x^2+y^2 \leq 1$ určuje válec o poloměru 1. Viz Obrázek 9.5. Výška válce je dána vztahy $0 \leq z \leq 2$. Omezení $x \geq 0, y \geq 0$ vyčlení z válce čtvrtinu.



Obr. 9.5:

Zjištění, že oblast Ω je čtvrtina válce nás vede k nápadu transformovat danou oblast do válcových souřadnic. Zřejmě

$$\varrho \in \langle 0, 1\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle,$$
$$z \in \langle 0, 2\rangle.$$

Tedy transformací se oblast Ω změní v kvádr $\Omega^* = \langle 0,1\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0, 2\rangle$. Použijeme Větu 9.3 o transformaci. Platí

$$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} z\sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi}\cdot\varrho\ \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} z\varrho^2\ \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z.$$

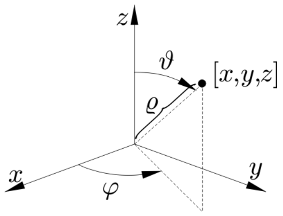
Integrační obor Ω^* je trojrozměrný interval a proto můžeme použít Dirichletovu větu 8. Navíc integrand je ve tvaru součinu a proto použijeme její speciální verzi.

$$\iiint\limits_{\Omega^*} z\varrho^2\ \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 \varrho^2\ \mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \cdot \int\limits_0^2 z\ \mathrm{d}z = \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2 = \frac{\pi}{3}.$$

Definice 9.11. Buď $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ transformace, která je definovaná rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= f_1(\varrho,\varphi,\vartheta)= \varrho\cos\varphi\sin\vartheta,\\ y &= f_2(\varrho,\varphi,\vartheta)= \varrho\sin\varphi\sin\vartheta,\\ z &= f_3(\varrho,\varphi,\vartheta)= \varrho\cos\vartheta, \end{aligned} \tag{9.6}$$

přičemž $DF=\langle 0,\infty)\times\langle 0,2\pi)\times\times\langle 0,\pi\rangle$. Pak F se nazývá transformace do **kulových (sférických) souřadnic**. Rovnice transformují $\mathbb{R}^3$ na množinu $\langle 0,\infty)\times\langle 0,2\pi)\times\langle 0,\pi\rangle$. Význam $\varrho,\varphi,\vartheta$ zachycuje následující Obrázek 9.6.



Obr. 9.6: Kulové (sférické) souřadnice

Věta 9.12. Transformace do kulových souřadnic má Jakobián $J=J(\varrho,\varphi,\vartheta)=-\varrho^2\sin\vartheta$.

Důkaz:

$$J(\varrho,\varphi,\vartheta)=\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & \sin\varphi\sin\vartheta & \cos\vartheta\\ -\varrho\sin\varphi\sin\vartheta & \varrho\cos\varphi\sin\vartheta & 0\\ \varrho\cos\varphi\cos\vartheta & \varrho\sin\varphi\cos\vartheta & -\varrho\sin\vartheta \end{vmatrix}=$$

$$=-\varrho^2\cos^2\varphi\sin^3\vartheta-\varrho^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta\sin\vartheta-\varrho^2\cos^2\varphi\cos^2\vartheta\sin\vartheta-\varrho^2\sin^2\varphi\sin^3\vartheta=$$
$$=-\varrho^2\sin^3\vartheta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)-\varrho^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=$$
$$=-\varrho^2\sin^3\vartheta-\varrho^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta=-\varrho^2\sin\vartheta(\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta)=-\varrho^2\sin\vartheta.$$

Příklad 9.13. Spočtěte trojrozměrný integrál $\iiint\limits_{\Omega} x^2+y^2+z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde Ω je určena vztahy x^2+y^2+ $+z^2\le 1, z\ge 0$.

Řešení. Vztah $x^2+y^2+z^2\le 1$ určuje kouli o poloměru jedna se středem v počátku. Protože $z\ge 0$ je Ω polokoule. Je-li oblast Ω částí koule, je výhodné provést transformaci do kulových souřadnic. Zřejmě

$$\begin{aligned}\varrho&\in\langle 0,1\rangle,\\ \varphi&\in\langle 0,2\pi\rangle,\\ \vartheta&\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle.\end{aligned}$$

Transformací se oblast Ω změní v kvádr $\Omega^*=\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$. Podle Věty 9.3 o transformaci platí

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2+y^2+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega^*}(\varrho^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta+\varrho^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta+\varrho^2\cos^2\vartheta)\cdot\varrho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi d\vartheta.$$

Upravíme integrand a provedeme výpočet. Integrační obor Ω^* je trojrozměrný interval a proto můžeme použít Dirichletovu větu 8. Navíc po úpravě je integrand ve tvaru součinu a proto použijeme její speciální verzi. Platí

$$\iiint\limits_{\Omega^*}\varrho^4\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi d\vartheta=\int\limits_0^1\varrho^4\,\mathrm{d}\varrho\cdot\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\,d\vartheta=\left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^1\cdot[\varphi]_0^{2\pi}\cdot[-\cos\vartheta]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi}{5}.$$

10. Aplikace vícerozměrných integrálů

Věta 10.1. Buď $|\Omega|$ **obsah rovinné oblasti** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (obrazce). Pak

$$S(\Omega) = |\Omega| = \iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Věta 10.2. Buď $|\Omega|$ **objem prostorové oblasti** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ (tělesa). Pak

$$V(\Omega) = |\Omega| = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Věta 10.3. Buď $f(x,y) \geq 0$ spojitá funkce na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak **objem kolmého válce** ohraničeného podstavou Ω v rovině xy a plochou Gf je roven

$$V\big(\Omega, f(x,y)\big) = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Věta 10.4. Buďte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f'_x, f'_y$ spojité funkce na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak **obsah plochy** $S = Gf$ nad oblastí Ω je roven

$$S\big(\Omega, f(x,y)\big) = |S| = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Věta 10.5. Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ oblast, $\varrho(x,y) \geq 0$ hustota v bodě $[x,y] \in \Omega$, ϱ spojitá na Ω. Nechť $m(\Omega)$ označuje **hmotnost dvojrozměrné oblasti** Ω. Pak platí

$$m(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \varrho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Věta 10.6. Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ oblast, $\varrho(x,y,z) \geq 0$ hustota v bodě $[x,y,z] \in \Omega$, ϱ spojitá na Ω. Nechť $m(\Omega)$ označuje **hmotnost trojrozměrné oblasti** Ω. Pak

$$m(\Omega) = \iiint_{\Omega} \varrho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Věta 10.7. Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ oblast, $\varrho(x, y) \geq 0$ hustota v bodě $[x, y] \in \Omega$, ϱ spojitá na Ω. Pak **statické momenty rovinné oblasti** Ω vzhledem k souřadnicovým osám x, y jsou

$$S_x(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} y\varrho(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$S_y(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} x\varrho(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

a pro **těžiště** T **rovinné oblasti** Ω platí

$$T(\Omega) = \left[\frac{S_y(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_x(\Omega)}{m(\Omega)}\right].$$

Poznámka 10.8. Místo slova těžiště je lépe použít termínu **hmotný střed**. Uvedené vztahy platí totiž za předpokladu, že tíhové pole je homogenní.

Věta 10.9. Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ oblast, $\varrho(x, y, z) \geq 0$ hustota v bodě $[x, y] \in \Omega$, ϱ spojitá na Ω. Pak statické momenty oblasti Ω vzhledem k souřadnicovým rovinám xy, xz, yz jsou

$$S_{xy}(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} z\int \varrho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$S_{xz}(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} y\int \varrho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$S_{yz}(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} x\varrho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

a pro těžiště T oblasti Ω platí

$$T(\Omega) = \left[\frac{S_{yz}(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_{xz}(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_{xy}(\Omega)}{m(\Omega)}\right].$$

Věta 10.10. Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ oblast, $\varrho(x, y) \geq 0$ hustota v bodě $[x, y] \in \Omega$, ϱ spojitá na Ω. Pak kvadratické momenty (momenty setrvačnosti) oblasti Ω vzhledem k osám x, y, z jsou

$$I_x(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} y^2\varrho(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_y(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} x^2\varrho(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_z(\Omega) = I_x(\Omega) + I_y(\Omega).$$

Věta 10.11. Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ oblast, $\varrho(x,y,z) \geq 0$ hustota v bodě $[x,y,z] \in \Omega$, ϱ spojitá na Ω. Pak kvadratické momenty (momenty setrvačnosti) Ω vzhledem k osám x, y, z jsou

$$I_x(\Omega) = \iiint_\Omega (y^2+z^2)\varrho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$
$$I_y(\Omega) = \iiint_\Omega (x^2+z^2)\varrho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$
$$I_z(\Omega) = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\varrho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Příklad 10.12. Určete velikost povrchu plochy, která je grafem funkce $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Řešení. Grafem funkce $f(x,y)$ je horní polovina kulové plochy. Velikost povrchu Gf vypočteme ze vztahu $|Gf| = \iint\limits_\Omega \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde oblast $\Omega = Df$ je kruh $x^2+y^2 \leq 1$. Určíme parciální derivace. Platí

$$f'_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$
$$f'_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Při výpočtu integrálu provedeme transformaci do polárních souřadnic. Oblast Ω se změní v obdélník $\Omega^* = \langle 0,1\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$. Dostáváme

$$|Df| = \iint\limits_\Omega \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_\Omega \sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega^*} \frac{\varrho\ \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\varrho^2}} =$$
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 \frac{\varrho\ \mathrm{d}\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} = \left| \begin{array}{c} t^2 = 1-\varrho^2 \\ \varrho \mathrm{d}\varrho = -t dt \\ 0 \to 1 \\ 1 \to 0 \end{array} \right| = 2\pi \cdot \int_1^0 \frac{-t\ dt}{\sqrt{t^2}} = 2\pi \int_0^1 dt = 2\pi.$$

Příklad 10.13. Spočtěte souřadnice těžiště tělesa $\Omega : 0 \leq z \leq 1-(x^2+y^2)$. Hustota tělesa je konstantní a je rovna 1.

Řešení. Těleso Ω je ohraničeno dvěma plochami. Zdola rovinou $z = 0$ a zhora paraboloidem $z = 1-(x^2+y^2)$. Vzhledem k tvaru tělesa Ω je zřejmé, že $x_T = 0$ a $y_T = 0$. Dopočítáme $z_T = \frac{S_{xy}(\Omega)}{m(\Omega)}$. Oblast Ω transformujeme do válcových souřadnic. Platí

$$\varrho \in \langle 0,1\rangle,$$
$$\varphi \in \langle 0,2\pi\rangle,$$
$$z \in \langle 0, 1-\varrho^2\rangle.$$

$$S_{xy}(\Omega) = \iiint\limits_\Omega z\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} z\varrho\ \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \big(\int_0^{1-\varrho^2} z\varrho\ \mathrm{d}z\big)\mathrm{d}\varphi\Big)\mathrm{d}\varrho =$$
$$= \int_0^1 \big(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\varrho(1-\varrho^2)^2\ \mathrm{d}\varphi\big)\mathrm{d}\varrho = \pi \int_0^1 \varrho\left(1-\varrho^2\right)^2 \mathrm{d}\varrho = \frac{\pi}{6}.$$

$$m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega^*} \varrho \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^{2\pi} \big(\int\limits_0^{1-\varrho^2} \varrho \,\mathrm{d}z \big)\mathrm{d}\varphi \Big)\mathrm{d}\varrho =$$

$$= \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^{2\pi} \varrho \left(1-\varrho^2\right) \,\mathrm{d}\varphi \Big)\mathrm{d}\varrho = 2\pi \int_0^1 \varrho(1-\varrho^2)\,\mathrm{d}\varrho = 2\pi \left[\frac{\varrho^2}{2} - \frac{\varrho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Odtud plyne, že těžiště tělesa Ω je bod $T = \left[0, 0, \frac{1}{3}\right]$.