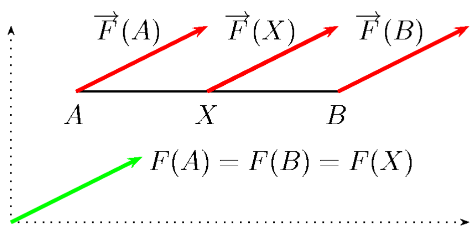
11. Vektorové pole

V této kapitole uvedeme některé zásadní pojmy teorie pole, které mají široké uplatnění v technických oborech a které budeme využívat v následujících kapitolách věnovaných křivkovému a plošnému integrálu. Ačkoliv definice vektorového pole je v matematické literatuře uváděna v daleko obecnějším tvaru, omezíme se v tomto textu pouze na následující zavedení:

Definice 11.1. (Vektorové pole) Nechť jsou na oblasti $\Omega \subset E_3$, resp. $\Omega \subset E_2$, definovány tři funkce $f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)$ tří proměnných, resp. dvě funkce $f_1(x,y), f_2(x,y)$ dvou proměnných. Označme $F(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$, resp. $F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$. V obou případech budeme psát $F(X)$ namísto $F(x,y,z)$, resp. $F(x,y)$. Oblast Ω s danou vektorovou funkcí $F(X)$ budeme nazývat **vektorové pole** $(\Omega, \overrightarrow{F}(X))$.

Poznámka 11.2. Nad vektorovou funkcí $F(X)$ píšeme šipku proto, že při představě vektorového pole umisťujeme počáteční bod vektoru $\overrightarrow{F}(X)$ do bodu $X \in \Omega$, zatímco se symbolem $F(X)$ je spojována představa vektoru s počátečním bodem v počátku souřadnic (viz příklad 11.3.)

Příklad 11.3. Buď $\Omega \subset E_2$ úsečka AB, $A = [1,2]$ a $B = [5,2]$. Na oblasti Ω je definována konstantní síla $\overrightarrow{F}(X) = (2,1)$ (tzn. $F(X) = (2,1)$ pro všechna $X \in \Omega$). Na obrázku 11.1 je pak ilustrován pojem vektorové funkce F a vektorového pole $(\Omega, \overrightarrow{F})$.



Obr. 11.1: Vektorové pole vs. vektorová funkce z příkladu 11.3.

Definice 11.4. Nechť trojrozměrné vektorové pole $(\Omega, \overrightarrow{F})$, $\Omega \subset E_3$, je určeno vektorovou funkcí

$$F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)), \tag{11.1}$$

kde P, Q, R jsou spojité funkce na oblasti Ω. Je-li navíc forma

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

totálním diferenciálem kmenové funkce $\phi(x,y,z)$, pak funkci ϕ nazýváme **potenciálem** vektorového pole $(\Omega, \overrightarrow{F})$ a příslušný vektor

$$F = [\phi'_x(x,y,z), \phi'_y(x,y,z), \phi'_z(x,y,z)] = \mathrm{grad}\phi$$

nazýváme **gradientem potenciálu** $\phi(x,y,z)$. Vektorové pole určené potenciální funkcí ϕ nazýváme **konzervativním (nebo také potenciálním) polem**.

V dalším uvedeme několik významných operátorů, které mají důležitý význam jak z hlediska formálního (umožňují velice efektivní matematický zápis), tak z hlediska praktického (např. k vyjadření geometrických vlastností, fyzikálních veličin apod.).

Definice 11.5. Hamiltonův operátor nabla v prostoru R^n je diferenciálním operátorem ve tvaru

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}).$$

Příklad 11.6. Operátor nabla aplikovaný na funkci $f(x, y, z)$ je gradientem funkce f. Platí

$$\nabla f(x, y, z) = \operatorname{grad} f(x, y, z) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}).$$

Definice 11.7. Nechť vektorové pole $(\Omega, \overrightarrow{F})$ je určeno vektorovou funkcí F ve tvaru (11.1) na oboru Ω, přičemž funkce P, Q, R jsou spojitě diferencovatelné na oboru Ω.

- **Divergencí vektorového pole** $(\Omega, \overrightarrow{F})$ nazveme skalár tvaru

$$\operatorname{div} F = P'_x + Q'_y + R'_z.$$

- **Rotací vektorového pole** $(\Omega, \overrightarrow{F})$ nazveme vektor tvaru

$$\operatorname{rot} F = [R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Poznámka 11.8. Výše zavedené operátory lze vyjádřit i následujícím způsobem:

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{F}(X) = \nabla \times \overrightarrow{F}(X)$$

$$\operatorname{div} F = P'_x + Q'_y + R'_z = .$$