5. Lokální, vázané a globální extrémy

Lokální extrémy.

Definice 5.1. Řekneme, že $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ má v bodě $a \in Df$:

1. **lokální maximum**, když $\exists K(a, \delta) \subseteq Df$ tak, že $\forall x \in K(a, \delta)$ platí $f(x) \leq f(a)$.
2. **lokální minimum**, když $\exists K(a, \delta) \subseteq Df$ tak, že $\forall x \in K(a, \delta)$ platí $f(a) \leq f(x)$.

Poznámka 5.2.

1. Lokální minima a maxima funkce f se nazývají **lokální extrémy**.
2. Jsou-li nerovnosti na $K(a, \delta) - \{a\}$ splněny ostře, tzn. $<$, pak se extrémy nazývají **ostré extrémy**.
3. Bod $a \in Df$ se nazývá **stacionární bod**, když pro každé $i = 1, \dots, n$ platí $f'_{x_i}(a) = 0$.

Věta 5.3.

1. Nechť funkce $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ má v bodě $a \in Df$ lokální extrém a pro každé $i = 1, \dots, n$ existuje $f'_{x_i}(a)$. Pak pro každé $i = 1, \dots, n$ platí $f'_{x_i}(a) = 0$, což znamená, že **grad** $f(a)$ je nulový vektor.
2. Funkce f může mít **lokální extrémy** pouze ve **stacionárních bodech**, nebo v bodech, v nichž **neexistuje aspoň jedna parciální derivace prvního řádu**.

Příklad 5.4. Určete lokální extrémy funkce:

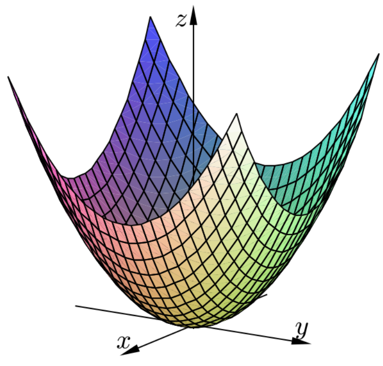
a) $f(x, y) = x^2 + y^2$;

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

c) $f(x, y) = x^2 - y^2$.

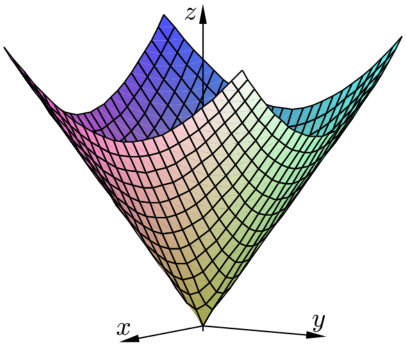
Řešení.

a) Určíme první parciální derivace $f'_x = 2x$ a $f'_y = 2y$. Odtud plyne, že parciální derivace prvního řádu existují pro každé $[x, y] \in \mathbf{R}^2$. Zřejmě jediný stacionární bod je bod $a = [0, 0]$ a **grad** $f(a) = (0, 0)$. V bodě a nastává lokální minimum. Viz Obrázek 5.1.



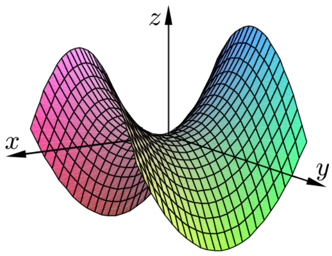
Obr. 5.1: $f(x, y) = x^2 + y^2$, tj. rotační paraboloid

b) $f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ a $f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Parciální derivace neexistují v bodě $a = [0,0]$. V bodě a je lokální minimum funkce f. Viz Obrázek 5.2.



Obr. 5.2: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, tj. „horní část" kuželové plochy

c) $f'_x = 2x$ a $f'_y = -2y$. Parciální derivace prvního řádu existují pro libovolný bod $[x,y] \in \mathbf{R}^2$ a zřejmě jediný stacionární bod je bod $a = [0,0]$ a **grad** $f(a) = (0,0)$. Zřejmě platí $\forall x \neq 0 : f(x,0) = x^2 > 0$. Podobně $\forall y \neq 0 : f(0,y) = -y^2 < 0$. Z Definice 5.1 plyne, že f nemá v bodě a lokální extrém. Viz Obrázek 5.3.



Obr. 5.3: $f(x,y) = x^2 - y^2$, tj. hyperbolický paraboloid

Definice 5.5. Buď $a \in Df$ a nechť $\forall i,j = 1,\dots,n$ existuje $f''_{x_ix_j}(a)$. Položme

$$D_k(a) = \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(a) & \dots & f''_{x_1x_k}(a) \\ & \ddots & \\ f''_{x_kx_1}(a) & \dots & f''_{x_kx_k}(a) \end{vmatrix}.$$

Následující věta ukazuje, jak lze subdeterminantů $D_k(a)$ využít k vyšetření lokálních extrémů.

Věta 5.6. (Sylvestrovo rozhodovací kritérium)
Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, a \in Df$ stacionární bod. Nechť existuje $\mathrm{d}^2 f(a)$. Platí

1. Jestliže $D_1(a) > 0, D_2(a) > 0, \dots, D_n(a) > 0$, pak f má v a **lokální minimum**.
2. Jestliže $D_1(a) < 0, D_2(a) > 0, \dots, D_n(a)(-1)^n > 0$, pak f má v a **lokální maximum**.
3. Nechť nenastane ani (1) ani (2) a $\forall k = 1,\dots,n$ platí $D_k(a) \neq 0$. Pak v bodě a **není lokální extrém**.

Poznámka 5.7. Nenastane-li ani jedna z možností (1), (2), (3), pak může, ale nemusí být v a lokální extrém. V této situaci je nutno vyšetřit chování f v okolí $K(a,\delta)$ podrobněji. Viz bod 5 Algoritmu 5. Věty 5.3 a 5.6 poskytují dobrý návod jak při hledání lokálních extrémů postupovat.

Algoritmus pro nalezení lokálních extrémů funkce n-proměnných.

1. Spočítáme parciální derivace prvního řádu funkce f a položíme je rovny nule. Tím získáme systém rovnic.

2. Určíme všechna řešení a systému. Řešení jsou stacionární body. V nich může, ale nemusí být extrém. Dále nalezneme všechny body, v nichž neexistuje aspoň jedna první parciální derivace.

3. Spočteme parciální derivace druhého řádu a sestavíme matici funkcí f''. Určíme číselné matice $f''(a)$ odpovídající stacionárním bodům.

4. Pro matice $f''(a)$ určíme hlavní subdeterminanty $D_k(a)$ pro $k = 1, \dots, n$ a podle Sylvestrova kritéria 5.6 rozhodneme, zda v a nastává extrém.

5. Nelze-li rozhodnout podle kritéria, použijeme následovně definici extrému. Spočteme $f(a)$. Zvolíme libovolný vektor v a spočteme $f(a+v)$. Pokusíme se dokázat jednu z nerovností $f(a) \geq f(a+v)$ (max), $f(a) \leq f(a+v)$ (min). Pokud se nedaří tyto nerovnosti dokázat, zkoušíme volit speciální podmnožiny okolí bodu a. Cílem volby je ukázat, že na zvolené části okolí není splněna definiční podmínka pro extrém, tj. dokázat, že v a není extrém. Podobně postupujeme v případě bodů v nichž neexistuje aspoň jedna parciální derivace prvního řádu.

Příklad 5.8. Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 9y$.

Řešení. Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule.

Vznikne soustava rovnic $f'_x = 2x + y - 6 = 0, f'_y = 2y + x - 9 = 0$. Parciální derivace existují pro každé $[x, y] \in \mathbf{R}^2$ a proto jedinými kandidáty na lokální extrémy jsou stacionární body, které nalezneme vyřešením vzniklé soustavy rovnic. Soustava je lineární, můžeme tedy použít metod lineární algebry.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & -12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Nalezli jsme stacionární bod $a = [1, 4]$. Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matici $f''(a)$. Platí $f''_{xx} = 2, f''_{xy} = 1, f''_{yy} = 2$. Odtud plyne, že

$$f'' = f''(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matice $f''(a)$ a použijeme Sylvestrovo kritérium. Platí $D_1(a) = 2 > 0$ a $D_2(a) = 3 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $a = [1, 4]$ lokální minimum funkce f.

Vázané a globální extrémy.

Definice 5.9. Buďte $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $m < n$, $g_1, \dots, g_m : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ funkce. Položme $V = \{x \in \mathbf{R}^n; g_1(x) = 0 \wedge \dots \wedge g_m(x) = 0\}$.

Řekneme, že f má v bodě $a \in Df \cap V$ **vázané lokální maximum** podmínkou $a \in V$, když $\exists K(a, \delta)$ tak, že $\forall x \in K(a, \delta) \cap Df \cap V$ platí $f(x) \leq f(a)$.

Řekneme, že f má v bodě $a \in Df \cap V$ **vázané lokální minimum** podmínkou $a \in V$, když $\exists K(a, \delta)$ tak, že $\forall x \in K(a, \delta) \cap Df \cap V$ platí $f(a) \leq f(x)$.

Vázaná lokální minima a maxima funkce f se nazývají **vázané lokální extrémy**.

Poznámka 5.10. Podmínka $a \in V$ se nazývá vazba a rovnice $g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$ se nazývají vazebné rovnice nebo též **vazebné podmínky**.

Poznámka 5.11. Buď $m = 1$. V některých případech lze z rovnice $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ jednoznačně určit některé x_i. Například $x_i = \overline{g}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Pak za x_i dosadíme do $f(x_1, \dots, x_n)$ výraz $\overline{g}$ a dostáváme funkci $F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, která má pouze $n-1$ proměnných. Úloha o nalezení vázaných extrémů funkce f s vazbou V je tím převedena na ekvivalentní úlohu o nalezení lokálních extrémů funkce F. V případech, kdy nelze výše uvedeného postupu použít, vede v řadě případů k řešení tzv. **metoda Lagrangeových multiplikátorů** (viz následující Věta 5.12).

Věta 5.12. **(Lagrange)** Buďte $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, g_1, \dots, g_m : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, m < n$ funkce spojitě diferencovatelné na otevřené množině Ω obsahující V a nechť $\forall x \in \Omega$ platí, že hodnost matice $\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right]_{i,j}$ je rovna m. Buď $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ funkce definovaná vztahem

$$L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n). \tag{5.1}$$

Funkce L se nazývá Lagrangeova funkce a konstanty $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in R$ se nazývají Lagrangeovy multiplikátory. Nechť systém $m+n$ rovnic o $m+n$ neznámých

$$\begin{aligned} L'_{x_1} &= 0, \\ &\vdots \\ L'_{x_n} &= 0, \\ g_1 &= 0, \\ &\vdots \\ g_m &= 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

má řešení $[a_1, \dots, a_n, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0]$.

Má-li L v bodě $a = [a_1, \dots, a_n]$ pro $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$ lokální extrém, pak f má v a vázaný lokální extrém téhož typu s vazbou $a \in V$.

Nemá-li L lokální extrém, neplyne odtud, že f nemá vázaný lokální extrém.

Poznámka 5.13.

1. Výraz $\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right]_{i,j}$ označuje matici o m řádcích a n sloupcích.

2. Podmínka, že hodnost matice $\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right]_{i,j}$ je rovna m znamená, že žádná z rovnic $g_i(x) = 0$ není zbytečná.

Příklad 5.14. Vyšetřete vázané extrémy $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ s vazbou $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení. Z vazby nelze vyjádřit jednoznačně žádnou proměnnou. Sestavíme tedy Lagrangeovu funkci

$$L(x,y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a přidáme vazebnou rovnici:

$$\begin{aligned} L'_x &= -4 + 2\lambda x = 0, \\ L'_y &= -3 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Získali jsme tak soustavu tří rovnic o třech neznámých x, y, λ. Tuto soustavu musíme nyní vyřešit. Z první rovnice plyne $x = \frac{2}{\lambda}$ a ze druhé $y = \frac{3}{2\lambda}$. Dosazením za x a y do rovnice vazby dostáváme

$$\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1.$$

Odtud po krátké úpravě plyne $\lambda^2 = \frac{25}{4}$ a tedy $\lambda = \pm\frac{5}{2}$.

Pro $\lambda = \frac{5}{2}$ dostáváme $x = \frac{4}{5}, y = \frac{3}{5}$. Získali jsme stacionární bod Lagrangeovy funkce $a_1 = [\frac{4}{5}, \frac{3}{5}]$.

Podobně pro $\lambda = -\frac{5}{2}$ dostáváme $x = -\frac{4}{5}, y = -\frac{3}{5}$. Nalezli jsme druhý stacionární bod $a_2 = [-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}]$.

Nyní vyšetříme nalezené stacionární body pomocí druhé derivace Lagrangeovy funkce. Určíme druhé parciální derivace a sestavíme matice $L'', L''(a_1), L''(a_2)$. Platí

$$L'' = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}, \qquad L''(a_1) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad L''(a_2) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

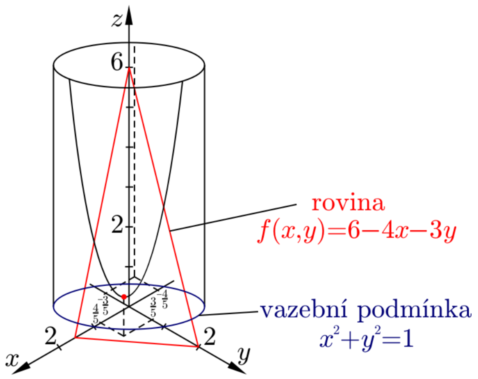
Nyní můžeme použít Sylvestrovo kritérium.

Pro a_1 platí $D_1(a_1) = 5, D_2(a_1) = 25$. Odtud plyne, že L má v bodě $a_1 = \left[\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right]$ pro $\lambda = \frac{5}{2}$ lokální minimum a podle Věty 5.12 má f ve stejném bodě vázané lokální minimum vzhledem k dané vazbě.

Analogicky pro a_2 platí $D_1(a_2) = -5, D_2(a_2) = 25$. Odtud plyne, že L má v bodě $a_2 = \left[-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right]$ pro $\lambda = -\frac{5}{2}$ lokální maximum a f má v bodě a_2 vázané lokální maximum. Tím je úloha vyřešena.

Pokusme se ještě vysvětlit **geometrický význam** celé úlohy.

Grafem funkce $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ je rovina v obecné poloze. Vazebná rovnice $x^2 + y^2 = 1$ je rovnice kružnice ležící v rovině xy. Hledáme tedy extrémy na křivce, která vznikne průnikem válcové plochy určené touto kružnicí s danou rovinou. Průnikovou křivkou je elipsa. Situace je znázorněna na následujícím Obrázku 5.4. Poznamenejme jen, že na obrázku je zobrazena jen část elipsy a pouze vázané lokální minimum. Polohu vázaného lokálního maxima si jistě pozorný čtenář dokáže sám představit, když si dopočítá z-ovou souřadnici bodu a_2.)



Obr. 5.4: Vázané extrémy funkce $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ s podmínkou $x^2 + y^2 = 1$

Příklad 5.15. Vyšetřete vázané extrémy $f(x,y) = x^2 - y^2$ s vazbou $2x - y + 1 = 0$.

Řešení. Lagrangeova funkce je tvaru

$$L(x,y) = x^2 - y^2 + \lambda(2x - y + 1).$$

Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a přidáme vazebnou rovnici

$$\begin{aligned} L'_x &= 2x + 2\lambda = 0, \\ L'_y &= -2y - \lambda = 0, \\ 2x - y &+ 1 = 0. \end{aligned}$$

Získali jsme soustavu tří rovnic o třech neznámých x, y, λ. Z první rovnice plyne $\lambda = -x$ a ze druhé $\lambda = -2y$. Odtud dostáváme $x = 2y$.

Dosazením do vazby a krátkým výpočtem zjistíme, že existuje jediný stacionární bod $a = \left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right]$ pro $\lambda = \frac{2}{3}$.

Nyní vyšetříme stacionární bod pomocí druhé derivace Lagrangeovy funkce. Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice $L'', L''(a)$. Platí

$$L'' = L''(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Protože $D_1(a) = 2 > 0$ a $D_2(a) = -4 < 0$ nemá Lagrangeova funkce L podle Sylvestrova kritéria lokální extrém.

Pozor! Odtud ale neplyne, že f nemá vázaný extrém s danou vazbou. Ukážeme nyní, že f vázaný extrém má. Budeme postupovat tak, že úlohu o vázaném extrému převedeme na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce jedné proměnné.

Z vazby vyjádříme y. Platí $y = 2x + 1$. Dosadíme do zadané funkce. Dostaneme

$$F(x) = f(x, 2x+1) = x^2 - (2x+1)^2.$$

Odtud $F'(x) = -6x - 4$. Nalezneme stacionární bod $x_0 = -\frac{2}{3}$. Protože platí $F''(x) = -6 < 0$ je v bodě $x_0 = -\frac{2}{3}$ lokální maximum funkce $F(x)$. Tedy funkce $f(x,y)$ má v bodě $\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right]$ vázané lokální maximum.

Definice 5.16. Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \Omega \subseteq Df, a \in \Omega$.

Řekneme, že f má v bodě a **globální maximum na** Ω, když $\forall x \in \Omega$ platí $f(x) \leq f(a)$. Klademe $\max f(\Omega) = f(a)$.

Řekneme, že f má v bodě a **globální minimum na** Ω, když $\forall x \in \Omega$ platí $f(a) \leq f(x)$. Klademe $\min f(\Omega) = f(a)$.

Hodnoty $\max f(\Omega)$ a $\min f(\Omega)$ se nazývají globální maximum a globální minimum funkce f na množině Ω. Místo globální též říkáme **absolutní**.

Věta 5.17. **(Weierstrasse)** Buď $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ ohraničená, uzavřená množina a $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ spojitá funkce na $\Omega \subseteq Df$. Platí následující tvrzení:

1. f je ohraničená na Ω.
2. Existují $a, b \in \Omega$ tak, že $\forall x \in \Omega : f(a) \leq f(x) \leq f(b)$,
   tzn. existuje $\min f(\Omega) = f(a)$ a $\max f(\Omega) = f(b)$.
3. Nechť $\min f(\Omega)$ nastane v bodě $a \in \Omega$. Pak f má v a lokální minimum, nebo $a \in h(\Omega)$.
   Analogicky nechť $\max f(\Omega)$ nastane v bodě $a \in \Omega$. Pak f má v a lokální maximum, nebo $a \in h(\Omega)$.

Poznámka 5.18.

1. Není-li Ω uzavřená, nebo ohraničená, pak $\min f(\Omega)$ a $\max f(\Omega)$ nemusí existovat.
2. Pokud $\min f(\Omega)$, $\max f(\Omega)$ existují, jsou určena jednoznačně. Funkce však může nabývat těchto hodnot obecně ve více bodech.
3. Hranici množiny Ω lze často popsat pomocí rovnic. Vyšetřování hranice tedy vede k vázaným extrémům.

Weierstrassova věta poskytuje návod pro nalezení $\min f(\Omega)$ a $\max f(\Omega)$. Jak postupovat popíšeme v následujícím algoritmu.

Poznámka 5.19. Algoritmus pro nalezení globálních extrémů.

1. Nalezneme lokální extrémy funkce f a z nich vybereme ty, které leží v Ω. Nechť $\mathbb{A}$ označuje množinu funkčních hodnot v nalezených bodech lokálních extrémů.
2. Nalezneme vázané extrémy funkce f s vazbou $V = h(\Omega)$. Nechť $\mathbb{B}$ označuje množinu funkčních hodnot v nalezených bodech vázaných extrémů a v bodech, které jsou průniky různých vazeb.
3. Nechť $M = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$. Pak globální maximum $\max f(\Omega) = \max M$ a globální minimum $\min f(\Omega) = \min M$.

Příklad 5.20. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2$ na obdélníku Ω, který je určen body $A = [0, 0], B = [2, 0], C = [2, 1], D = [0, 1]$.

Řešení.

1. Nalezneme lokální extrémy funkce f. Spočteme parciální derivace $f'_x = 2x-2$ a $f_y = 2y-1$ a nalezneme stacionární bod $s = [1, \frac{1}{2}]$. Matice druhé derivace je rovna $f'' = f''(s) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hlavní minory této matice jsou kladné a proto v bodě s nastává lokální minimum funkce f. Platí $f(s) = 0$. Tedy $\mathbb{A} = \{0\}$.
2. Hranice množiny Ω je tvořena čtyřmi úsečkami. Vyšetření hranice $h(\Omega)$ se tedy rozpadá na vyřešení čtyř úloh na vázané extrémy s funkcí f a vazbami $V_1 : y = 0$, $V_2 : x = 2$, $V_3 : y = 1$ a $V_4 : x = 0$. Pozor! Při této formulaci je zapotřebí zvlášť vyšetřit body A, B, C, D, které jsou průniky různých vazeb. Úlohy f, V_i, kde $i = 1, 2, 3, 4$ převedeme na ekvivalentní úlohy nalezení lokálních extrémů funkcí F_i, kde $F_1(x) = f(x, 0) = (x-1)^2 + \frac{1}{4}$, $F_2(y) = f(2, y) = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$, $F_3(x) = f(x, 1) = (x-1)^2 + \frac{1}{4}$, $F_4(y) = f(0, y) = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$.

   Snadno se zjistí, že úloha f, V_1 má vázané minimum v bodě $a = [1, 0]$;

   f, V_2 má vázané minimum v $b = \left[2, \frac{1}{2}\right]$;

   f, V_3 má vázané minimum v $c = [1, 1]$ a f, V_4 má vázané minimum v $d = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
3. Spočteme funkční hodnoty v nalezených bodech. Platí $f(a) = f(c) = \frac{1}{4}$, $f(b) = f(d) = 1$ a $f(A) = f(B) = f(C) = f(D) = \frac{5}{4}$. Odtud $\mathbb{B} = \left\{\frac{1}{4}, 1, \frac{5}{4}\right\}$. $M = \left\{0, \frac{1}{4}, 1, \frac{5}{4}\right\}$. Odtud $\max f(\Omega) = \max M = \frac{5}{4}$ a nastává v bodech A, B, C, D. Dále $\min f(\Omega) = \min M = 0$ a nastává v bodě s.