7. Soustavy ODR1

A. Homogenní soustavy LODR1

Příklad 7.1. Eulerovou metodou nalezněte obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 4y_2, \\ y_2' &= y_1 - 3y_2. \end{aligned}$$

Řešení. Daná soustava je soustavou dvou homogenních lineárních diferenciálních rovnic s konstantní maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$ nalezneme dvě lineárně nezávislá řešení $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ dané soustavy, z nichž pak snadno zkonstruujeme obecné řešení.

Nejprve určíme vlastní čísla matice $\mathbf{A}$, a to jako kořeny charakteristické rovnice matice $\mathbf{A}$

$$\det\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Matice $\mathbf{A}$ tedy má dvě různá reálná vlastní čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Lineárně nezávislá řešení $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ proto budeme předpokládat ve tvaru

$$\mathbf{u}_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix},$$

kde vektor $\mathbf{h}$ (resp. $\mathbf{k}$) je vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ (resp. $\lambda_2 = -2$). Tyto vektory určíme jako nenulová řešení soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & -4 \\ 1 & -3-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & -4 \\ 1 & -3-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rozepsáním do složek pak máme

$$\begin{aligned} h_1 - 4h_2 &= 0, \qquad & 4k_1 - 4k_2 &= 0, \\ h_1 - 4h_2 &= 0, \qquad & k_1 - k_2 &= 0. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že obě soustavy musejí obsahovat lineárně závislé rovnice (pokud tomu tak není, v předcházejícím výpočtu musí být chyba). Zvolíme tedy nenulová řešení $h_1 = 4$, $h_2 = 1$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ a odtud dostáváme hledaná lineárně nezávislá řešení $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ této soustavy ve tvaru

$$\mathbf{u}_1 = \mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obecné řešení $\mathbf{y}$ dané soustavy je pak lineární kombinací těchto řešení, tj.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1\,\mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 7.2. Eulerovou metodou nalezněte řešení soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 4y_2, \\ y_2' &= y_1 - 2y_2, \end{aligned}$$

které vyhovuje počátečním podmínkám $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = -1$.

Řešení. Tato soustava je soustavou dvou homogenních lineárních diferenciálních rovnic s konstantní maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla jsou kořeny charakteristické rovnice

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 = 0,$$

tedy matice $\mathbf{A}$ má jedno dvojnásobné reálné vlastní číslo $\lambda_{1,2} = 0$. V tomto případě budeme lineárně nezávislá řešení $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ dané soustavy předpokládat ve tvaru

$$\mathbf{u}_1 = \mathrm{e}^{\lambda_{1,2}x} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \mathrm{e}^{\lambda_{1,2}x} \begin{pmatrix} h_1x + k_1 \\ h_2x + k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1x + k_1 \\ h_2x + k_2 \end{pmatrix}.$$

Vektor $\mathbf{h}$ je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu $\lambda_{1,2} = 0$, a je tedy nenulovým řešením lineární algebraické soustavy

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_{1,2} & -4 \\ 1 & -2-\lambda_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{tj. po složkách} \quad \begin{array}{r} 2h_1 - 4h_2 = 0, \\ h_1 - 2h_2 = 0. \end{array}$$

Nenulovým řešením této soustavy lineárně závislých rovnic (a tedy hledaným vlastním vektorem) je např. dvojice $h_1 = 2$, $h_2 = 1$. Vektor $\mathbf{k}$ pak dále určíme jako řešení lineární algebraické soustavy

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_{1,2} & -4 \\ 1 & -2-\lambda_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \quad \text{tj. po složkách} \quad \begin{array}{r} 2k_1 - 4k_2 = 2, \\ k_1 - 2k_2 = 1. \end{array}$$

Řešením této soustavy lineárně závislých rovnic je např. dvojice $k_1 = 1$, $k_2 = 0$. Hledaná lineárně nezávislá řešení $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ dané soustavy jsou pak vektorové funkce

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2x+1 \\ x \end{pmatrix}$$

a obecné řešení $\mathbf{y}$ dané soustavy je tvaru

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2x+1 \\ x \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Partikulární řešení, které vyhovuje daným počátečním podmínkám, nalezneme dosazením těchto podmínek do obecného řešení. Tedy

$$\begin{aligned} 0 &= y_1(0) = 2C_1 + C_2, \\ -1 &= y_2(0) = C_1, \end{aligned}$$

tj. $C_1 = -1$, $C_2 = 2$ a hledané řešení pak dostáváme ve tvaru

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 2x-1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7.3. Pomocí Eulerovy metody určete fundamentální matici řešení soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 4y_2, \\ y_2' &= 2y_1 - 3y_2. \end{aligned}$$

Řešení. Tato soustava je soustavou dvou homogenních lineárních diferenciálních rovnic s konstantní maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ obdržíme jako kořeny charakteristické rovnice

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

Řešením této rovnice je dvojice komplexně sdružených vlastních čísel $\lambda_1 = -1 + 2i$, $\lambda_2 = -1 - 2i$. Nejprve nalezneme vlastní vektor $\mathbf{h}$ matice $\mathbf{A}$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = -1 + 2i$. Tedy

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & -4 \\ 2 & -3-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{tj. po složkách} \quad \begin{aligned} (2-2i)h_1 - 4h_2 &= 0, \\ 2h_1 + (-2-2i)h_2 &= 0. \end{aligned}$$

Zdůrazněme, že tyto rovnice jsou opět lineárně závislé, což však tentokrát není ihned patrné, neboť rovnice jsou v komplexním násobku (první rovnice je $(1-i)$ násobkem druhé). Mají tedy stejná řešení, a proto např. z druhé rovnice dostáváme

$$2h_1 + (-2-2i)h_2 = 0, \qquad \text{tj.} \qquad h_1 = (1+i)h_2.$$

Této rovnici zřejmě vyhovuje např. nenulová dvojice $h_1 = 1 + i$, $h_2 = 1$, čímž dostáváme hledaný vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = -1 + 2i$.

Nyní uvažujme komplexní řešení $\mathbf{w}$ dané soustavy ve tvaru

$$\mathbf{w} = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{(-1+2i)x} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

K nalezení reálných lineárně nezávislých řešení $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ této soustavy využijeme vztahu $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2$, nebo-li k určení $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ stačí rozdělit komplexní řešení $\mathbf{w}$ na reálnou a imaginární část. K tomuto účelu využijeme Eulerovy identity

$$\mathrm{e}^{ibw} = \cos bx + i \sin bx, \qquad b,\, x \in \mathbb{R}.$$

Platí tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathrm{e}^{(-1+2i)x} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{2ix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-x}(\cos 2x + i \sin 2x) \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} \cos 7x + i \sin 3x + i \cos 2x - \sin 2x \\ \cos 2x + i \sin 2x \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x}(\cos 2x - \sin 2x) \\ \mathrm{e}^{-x} \cos 2x \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x}(\sin 2x + \cos 2x) \\ \mathrm{e}^{-x} \sin 2x \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_2}. \end{aligned}$$

Fundamentální matice $\mathbf{U}(x)$ pak má ve svých sloupcích lineárně nezávislá řešení $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, tj.

$$\mathbf{U}(x) = \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} \cos 2x - \sin 2x & \sin 2x + \cos 2x \\ \cos 2x & \sin 2x \end{pmatrix}.$$

Poznamenejme, že pokud bychom předcházející úvahy a výpočty provedli pro vlastní číslo $\lambda_2 = -1 - 2i$, dospěli bychom ke stejnému závěru.

Příklad 7.4. Nalezněte obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 3y_2, \\ y_2' &= y_1 - 2y_2. \end{aligned}$$

Řešení. Vlastní čísla matice soustavy jsou $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Odtud

$$\lambda_1 = 1 \quad \to \quad \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_1 = \mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\lambda_2 = -1 \quad \to \quad \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_2 = \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, a tedy obecné řešení $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dané soustavy je tvaru

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{u}_1 + C_2\mathbf{u}_2 = C_1\,\mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 7.5. Nalezněte řešení počátečního problému

$$\begin{aligned} y_1' &= -7y_1 + 9y_2, \\ y_2' &= -y_1 - y_2, \end{aligned} \qquad y_1(0) = 2,\ y_2(0) = 1.$$

Řešení. Matice soustavy má dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_{1,2} = \lambda^* = -4$. Pak

$$\lambda^* = -4 \quad \to \quad \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathrm{e}^{-4x} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \mathrm{e}^{-4x} \begin{pmatrix} 3x - 1 \\ x \end{pmatrix},$$

a obecné řešení dané soustavy je proto tvaru

$$\mathbf{y} = C_1\, \mathrm{e}^{-4x} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\, \mathrm{e}^{-4x} \begin{pmatrix} 3x - 1 \\ x \end{pmatrix}, \qquad C_1,\, C_1 \in \mathbb{R}.$$

Dosazením počátečních podmínek do obecného řešení máme $C_1 = C_2 = 1$, a řešení příslušného počátečního problému je tvaru

$$\mathbf{y} = \mathrm{e}^{-4x} \begin{pmatrix} 3x + 2 \\ x + 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7.6. Nalezněte obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= -y_1. \end{aligned}$$

Řešení. Vlastní čísla matice soustavy jsou tvaru $\lambda_{1,2} = \pm i$. Tedy

$$\lambda^* = +i \quad \to \quad \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{ix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_2}.$$

Odtud plyne vztah pro obecné řešení dané soustavy

$$\mathbf{y} = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Poznamenejme, že aplikací právě uvedeného postupu na vlastní číslo $\lambda^* = -i$ bychom obdrželi tentýž výsledek.

B. Nehomogenní soustavy LODR1

Příklad 7.7. Nalezněte obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 4y_2, \\ y_2' &= y_1 - 3y_2 + x. \end{aligned}$$

Řešení. Tato soustava je nehomogenní soustavou dvou lineárních diferenciálních rovnic s konstantní maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

a vektorem pravých stran $\mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$. Danou soustavu vyřešíme eliminační metodou i metodou variace konstant.

a) Eliminační metoda

Soustavu převedeme algebraickými úpravami na jednu nehomogenní lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty, a to s neznámou funkcí y_1, nebo y_2. Nejprve vyloučíme z dané soustavy funkci y_1, nebo y_2. Jednodušší bude zřejmě eliminovat y_1, a to vynásobením druhé rovnice dvojkou a odečtením od první rovnice. Po této úpravě dostáváme

$$y_1' - 2y_2' = 2y_2 - 2x.$$

Zbývá eliminovat ještě funkci y_1'. Toho dosáhneme vyjádřením y_1 z rovnice, která neobsahuje y_1' (v našem případě tedy z druhé rovnice), následným zderivováním a dosazením do předcházejícího vztahu. Tedy

$$y_1 = y_2' + 3y_2 - x, \qquad \text{tj. po derivaci} \qquad y_1' = y_2'' + 3y_2' - 1.$$

Po dosazení a úpravě dostáváme diferenciální rovnici pro y_2 ve tvaru

$$y_2'' + y_2' - 2y_2 = -2x + 1.$$

Tato rovnice je nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty a pravou stranou $f(x) = -2x + 1$. Vyřešíme ji proto metodou neurčitých koeficientů.

I. Přidružená homogenní rovnice je tvaru

$$y_2'' + y_2' - 2y_2 = 0$$

a lze snadno zjistit, že má lineárně nezávislá řešení $u_1 = \mathrm{e}^x$, $u_2 = \mathrm{e}^{-2x}$, tj.

$$y_{2_h} = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{-2x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

II. Partikulární řešení y_{2_p} nehomogenní rovnice budeme předpokládat ve tvaru

$$y_{2_p} = Ax + B, \qquad A,\ B = ?$$

Poněvadž $y_{2_p}' = A$, $y_{2_p}'' = 0$, dostáváme po dosazení

$$0 + A - 2\,(Ax + B) = -2x + 1$$

a odtud porovnáním koeficientů u mocnin x^1 a x^0 máme $A = 1$, $B = 0$. Tedy $y_{2_p} = x$, a proto

$$y_2 = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} + x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Zbývající neznámou funkci y_1 určíme dosazením y_2 do druhé rovnice dané soustavy, tedy

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2' + 3y_2 - x = C_1\,\mathrm{e}^x - 2C_2\,\mathrm{e}^{-2x} + 1 + 3C_1\,\mathrm{e}^x + 3C_2\,\mathrm{e}^{-2x} + 3x - x \\ &= 4C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} + 2x + 1, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obecné řešení dané soustavy tedy lze psát vektorově jako

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} + \begin{pmatrix} 2x+1 \\ x \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Metoda variace konstant

I. Nalezneme obecné řešení přidružené homogenní soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 4y_2, \\ y_2' &= y_1 - 3y_2 \end{aligned}$$

a označíme ho jako $\mathbf{y_h}$. Tato homogenní soustava je ale stejná jako soustava z příkladu 7.1, a proto můžeme psát

$$\mathbf{y_h} = C_1\,\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

II. V tomto kroku budeme hledat nějaké partikulární řešení $\mathbf{y_p}$ dané soustavy, které budeme pomocí metody variace konstant předpokládat ve tvaru

$$\mathbf{y_p} = c_1(x)\,\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(x)\,\mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C_1(x),\, C_2(x) = ?$$

K nalezení $c_1(x)$, $c_2(x)$ potřebujeme nejprve určit $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ jako řešení soustavy $\mathbf{U}_1(x)\mathbf{c}'(x) = \mathbf{b}(x)$, kde $\mathbf{U}_1(x)$ je fundamentální matice přidružené homogenní soustavy. V našem případě jest

$$\mathbf{U}(x) = \begin{pmatrix} 4\,\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-2x} \\ \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix}$$

(viz krok I), tedy soustava pro neznámé $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ je tvaru

$$\begin{aligned} 4\,\mathrm{e}^x c_1'(x) + \mathrm{e}^{-2x} c_2'(x) &= 0, \\ \mathrm{e}^x c_1'(x) + \mathrm{e}^{-2x} c_2'(x) &= x. \end{aligned}$$

Odečtením druhé rovnice od první máme

$$3\,\mathrm{e}^x c_1'(x) = -x, \qquad \text{tj. } c_1'(x) = -\frac{1}{3}x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Odtud z první rovnice plyne

$$\mathrm{e}^{-2x} c_2'(x) = \frac{4}{3}x, \qquad \text{tj. } c_2'(x) = \frac{4}{3}x\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Užitím metody per partes máme

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\frac{1}{3}\int x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\left(-x\,\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-x}(x+1) + C_1, \\ c_2(x) &= \frac{4}{3}\int x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}x\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{2x}(2x-1) + C_2. \end{aligned}$$

Dosazením těchto funkcí do předpokládaného tvaru pro y máme

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \left[\tfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-x}(x+1) + C_1\right]\,\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \left[\tfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{2x}(2x-1) + C_2\right]\,\mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= C_1\,\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x+1 \\ x \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

c) Metoda neurčitých koeficientů

I. V příkladu 7.1 jsme nalezli řešení přidružené homogenní soustavy ve tvaru

$$\mathbf{y_h} = C_1\,\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

II. Poněvadž $\mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$, lze $\mathbf{y_p}$ předpokládat ve tvaru

$$\mathbf{y_p} = \begin{pmatrix} Ax+B \\ Cx+D \end{pmatrix}, \qquad A,\, B,\, C,\, D = ?$$

Derivací $\mathbf{y_p}$ a následným dosazením do dané soustavy dostáváme

$$\begin{aligned} A &= 2\,(Ax+B) - 4\,(Cx+D)\,, \\ C &= Ax+B - 3\,(Cx+D) + x. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u mocnin x^1, x^0 a vyřešením příslušné soustavy pak máme $A = 2$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 0$, tedy $\mathbf{y_p} = \begin{pmatrix} 2x+1 \\ x \end{pmatrix}$.

Rychlost a náročnost metody neurčitých koeficientů oproti univerzální metodě variace konstant je opět evidentní.

Příklad 7.8. Určete obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + \operatorname{tg}^2 x - 1, \\ y_2' &= -y_1 + \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Řešení. I. Přidružená homogenní soustava byla rozřešena v příkladu 7.6, odkud

$$\mathbf{y}_h = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

II. Hledejme nyní obecné řešení původní soustavy metodou variace konstant ve tvaru

$$\mathbf{y} = C_1(x) \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2(x) \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \qquad C_1(x),\, C_2(x) = ?$$

K určení $C_1(x)$, $C_2(x)$ nejprve vyřešíme soustavu pro neznámé $C_1'(x)$, $C_2'(x)$:

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}^2 x - 1 \\ \operatorname{tg} x \end{pmatrix}.$$

Pomocí Cramerova pravidla dostáváme

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= (\operatorname{tg}^2 x - 1)\cos x - \operatorname{tg} x \sin x = \frac{\sin^2 x}{\cos x} - \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} = -\cos x, \\ C_2'(x) &= \cos x \operatorname{tg} x + \sin x(\operatorname{tg}^2 x - 1) = \sin x + \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} - \sin x = \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Odtud přímou integrací máme $C_1(x) = -\sin x + C_1$. Druhý integrál vypočteme pomocí substituce $t = \cos x$ (tj. $\mathrm{d}t = -\sin x \,\mathrm{d}x$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$). Odtud

$$C_2(x) = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1 - t^2}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t} + t + C_2 = \frac{1}{\cos x} + \cos x + C_2.$$

Odtud dosazením a úpravou máme

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= (-\sin x + C_1) \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{\cos x} + \cos x + C_2\right) \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \\ &= C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{tg} x \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklad 7.9. Určete obecné řešení soustavy

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 3y_2 + 5x \\ y_2' &= 3y_1 + 2y_2 + 8\,\mathrm{e}^x \end{aligned}\right\}, \quad \text{tj.} \quad \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} 5x \\ 8\,\mathrm{e}^x \end{pmatrix}.$$

Řešení. I. Nejprve nalezneme řešení $\mathbf{y}_h$ příslušné homogenní soustavy. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ má kořeny $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$. Určíme odpovídající vlastní vektory.

Pro $\lambda_1 = -1$ dostáváme

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tedy např. $h_1 = 1$, $h_2 = -1$. Pro $\lambda_2 = 5$ dostáváme podmínky

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a odtud volíme $h_1 = h_2 = 1$. Platí tedy

$$\mathbf{y}_h = C_1\,\mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

II. Vektor $\mathbf{b}(x)$ nyní nemá složky téhož typu, a proto jej rozložíme takto:

$$\mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} 5x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8\,\mathrm{e}^x \end{pmatrix} =: \mathbf{b}_1(x) + \mathbf{b}_2(x)\,.$$

Nejprve určíme partikulární řešení $\mathbf{y}_{p_1}$ soustavy, kde je vektor $\mathbf{b}(x)$ nahrazen vektorem $\mathbf{b}_1(x)$. Hledáme toto řešení ve tvaru

$$\mathbf{y}_{p_1} = \begin{pmatrix} Ax + B \\ Cx + D \end{pmatrix}.$$

Dosazením dostáváme

$$\begin{aligned} A &= 2Ax + 2B + 3Cx + 3D + 5x, \\ C &= 3Ax + 3B + 2Cx + 2D\,. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x obdržíme rovnice

$$0 = 2A + 3C + 5, \quad A = 2B + 3D, \quad 0 = 3A + 2C, \quad C = 3B + 2D\,,$$

jejichž řešením je čtveřice $A = 2$, $B = -13/5$, $C = -3$, $D = 12/5$. Tedy

$$\mathbf{y}_{p_1} = \begin{pmatrix} 2x - 13/5 \\ -3x + 12/5 \end{pmatrix}.$$

Nyní řešíme danou soustavu s vektorem $\mathbf{b}_2(x)$ místo $\mathbf{b}(x)$. Předpokládáme proto

$$\mathbf{y}_{p_2} = \begin{pmatrix} A\,\mathrm{e}^x \\ B\,\mathrm{e}^x \end{pmatrix}.$$

Po dosazení máme

$$\begin{aligned} A\,\mathrm{e}^x &= 2A\,\mathrm{e}^x + 3B\,\mathrm{e}^x, \\ B\,\mathrm{e}^x &= 3A\,\mathrm{e}^x + 2B\,\mathrm{e}^x + 8\,\mathrm{e}^x\,. \end{aligned}$$

Po vykrácení faktorem e^x snadno dostáváme $A = -3$, $B = 1$, tj.

$$\mathbf{y}_{p_2} = \begin{pmatrix} -3\,\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x \end{pmatrix}.$$

Podle principu superpozice dostáváme obecné řešení dané soustavy ve tvaru

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1\,\mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x - 13/5 \\ -3x + 12/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\,\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x \end{pmatrix},$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.