

3. Parciální derivace, gradient a směrová derivace

Příklad 1. Spočtěte rychle všechny první parciální derivace triviálních funkcí:

- a) $f(x, y, z) = x^{(y^z)}$;
- b) $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}} + x^y$;
- c) $f(x, y, z) = \sqrt{xy}(3x + 3z)^{\sqrt{yz}}$;
- d) $f(x, y, z) = (3x + 2z)^{\ln z}$;
- e) $f(x, y, z) = ze^{x^3 \ln \cos(x-y^2)}$.

Příklad 2. Nalezněte bez váhání všechny první parciální derivace funkce f v bodě A :

a) $f = \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$, $A = [1, 1]$;

$$[f'_x = -\sqrt{2}, f'_y = \sqrt{2}]$$

b) $f = \arcsin \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $A = [1, 0]$;

$$[f'_x = 0, f'_y = -\sqrt{2}]$$

c) $f = (1 + \log_y x)^3$, $A = [e, e]$;

$$[f'_x = \frac{12}{e}, f'_y = -\frac{12}{e}]$$

d) $f = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}$, $A = [1, 1]$;

$$[f'_x = \frac{1}{4}, f'_y = 0]$$

Příklad 3. Okamžitě spočtěte všechny parciální derivace druhého řádu funkce f v bodě A :

a) $f = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$, $A = [1, 0]$;

$$[-1, \frac{1}{4}, 0]$$

b) $f = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$, $A = [0, 1]$;

$$[0, -\frac{1}{2}, 0]$$

c) $f = e^{xe^y}$, $A = [0, 0]$;

$$[1, 0, 1]$$

Příklad 4. Jsou dány funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$. Nalezněte úhel gradientů těchto funkcí v bodě $[3, 4]$.

$$[\cos \alpha = -0.199, \alpha = 101^\circ 30']$$

Příklad 5. Nalezněte bod, ve kterém gradient funkce $z = \ln(x + \frac{1}{y})$ je roven vektoru $(1, -\frac{16}{9})$.

$$[[-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}], [\frac{7}{3}, -\frac{3}{4}]]$$

Příklad 6. Nalezněte body, ve kterých se velikost gradientu funkce $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ rovná 2.

$$[\text{Body ležící na kružnici } x^2 + y^2 = \frac{2}{3}]$$

Příklad 7. Určete úhel mezi gradienty funkce $z = \ln \frac{y}{x}$ v bodech $A = [\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$, $B = [1, 1]$.

$$[\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}]$$

Příklad 8. Určete úhel mezi gradienty funkce $u = x^2 + y^2 + z^2$ v bodech $A = [a, 0, 0]$, $B = [0, a, 0]$.

$$[\frac{\pi}{2}]$$

Příklad 9. Určete směrovou derivaci funkce $f = e^{x^2+y^2}$ v bodě $[1, 1]$ ve směru vektoru $(2, 1)$.

$$[6e^2]$$

Příklad 10. Určete směrovou derivaci funkce $f = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ v bodě $M = [1, 2]$ ve směru vektoru, který jde z bodu M do bodu $N = [4, 6]$.

$$[5]$$

Příklad 11. Určete derivaci funkce $f = 3x^4 + xy + y^3$ v bodě $M = [1, 2]$ ve směru jednotkového vektoru, který svírá s kladným směrem osy x úhel 135° .

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

Příklad 12. Určete derivaci funkce $f = \ln(x + y)$ v bodě $[1, 2]$ ležícím na parabole $y^2 = 4x$ ve směru jednotkového vektoru tečny k parabole v tomto bodě.

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{3} \right]$$

Příklad 13. Určete derivaci funkce $f = \operatorname{arctg}(xy)$ v bodě $[1, 1]$ ve směru jednotkového vektoru osy prvního kvadrantu.

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

Příklad 14. Určete derivaci funkce $f = \ln(e^x + e^y)$ v počátku souřadnicového systému ve směru jednotkového vektoru, který svírá s kladným směrem osy x úhel α .

$$\left[\frac{1}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha) \right]$$

Příklad 15. Určete derivaci funkce $f = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ v bodě $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ ležícím na kružnici $x^2 + y^2 - 2x = 0$ ve směru jednotkového vektoru tečny ke kružnici v tomto bodě.

$$\left[-\frac{1}{2} \right]$$