9. Vektorové operátory

Příklad 1. Zapište za pomoci Hamiltonova operátoru nabla $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$:

a) gradient skalární veličiny f, tj. **grad** f.

b) divergenci vektorové veličiny $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$, tj. div $\vec{F}$.

c) rotaci vektorové veličiny $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$. tj. **rot** $\vec{F}$.

d) Laplaceův operátor delta Δ.

Příklad 2. Určete divergenci a rotaci vektorové veličiny $\vec{F} = (x^2y, y^2, z^2x)$.

[$2xy + 2y + 2xz$, $(0, -z^2, -x^2)$]

Příklad 3. Určete div(**rot** $\vec{F}$) pro $\vec{F} = (xyz, y(x^2 - z^2), xy + xz + yz)$.

[0]

Příklad 4. Rozepište pravou stranu vlnové rovnice $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \Delta z$ na součet odpovídajících členů.

Příklad 5. Rozepište levou stranu Poissonovy rovnice $\Delta u = f(x, y, z)$ na součet odpovídajících členů.

Příklad 6. Je dána skalární funkce $u = xy^2y^3$. Spočtěte:

a) Laplacián (tj. Δu);

[$2xz^3 + 6xy^2z$]

b) div(**grad** u).

[$2xz^3 + 6xy^2z$]

Příklad 7. Rozhodněte, zda je dané vektorové pole $\vec{F}$ potenciální ($\equiv$ konzervativní) (tj. zda je **rot** $\vec{F} = \vec{o}$).

a) $\vec{F} = (x, y, z)$.

[ano]

b) $\vec{F} = (x + y, x - y)$.

[ano]

Příklad 8. Uvažujme vektorové pole $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3) = (x^2 + yz, y^2 + xz, z^2 + xy)$.

a) Zjistěte, zda vektorové pole $\vec{F}$ je potenciální.

[je potenciální]

b) Pokud $\vec{F}$ je potenciální, vypočítejte potenciál $\varphi(x, y, z)$:

α) Podle definice (tj. **grad** $\varphi(x, y, z) = \vec{F}$);

β) Vzorcem $\varphi(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} f_1(t, y, z)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} f_2(x_0, t, z)\mathrm{d}t + \int_{z_0}^{z} f_3(x_0, y_0, t)\mathrm{d}t$, kde bod $[x_0, y_0, z_0]$ volíme libovolně, např. $[0, 0, 0]$.

[$\varphi(x, y, z) = xyz + \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} + C$, kde $C = p(x_0, y_0, z_0)$]