

2. Limita a spojitost

Příklad 1. Vypočítejte limitu funkce

- a) $\lim_{[x,y] \rightarrow [1,2]} (x^2 + y + 2);$ [5]
 b) $\lim_{[x,y,z] \rightarrow [1,3,1]} 2x^2 + 7y - 3z + 5;$ [25]
 c) $\lim_{[x,y] \rightarrow [k,\infty]} (1 - \frac{x}{y})^y.$ $[\exp(-k)]$

Příklad 2. Určete postupné limity $L_1 = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right)$ a $L_2 = \lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right)$, je-li

- a) $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y}, \quad a = \infty, b = \infty; \quad [1, 0]$
 b) $f(x, y) = \frac{y^x}{1+y^{2x}}, \quad a = 0, b = \infty. \quad [0, 0.5]$

Příklad 3. Určete body nespojitosti funkce

- a) $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y};$ [Všechny body přímky $y = x$]
 b) $f(x, y) = \frac{1}{4-x^2-y^2};$ [Všechny body kružnice $x^2 + y^2 = 4$]
 c) $f(x, y, z) = \frac{3z}{x-2y+3z}.$ [Všechny body roviny $x - 2y + 3z = 0$]
 d) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{pro } x \neq 0, y \neq 0; \\ 0 & \text{pro } x = 0, y = 0. \end{cases}$ $[\emptyset]$

Příklad 4. Vypočítejte triviální limity

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{x}{x+y} &= \text{limita neexistuje}; & \lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} &= \text{neexistuje}; \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} + 1 - 1} &= 2; & \lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} &= 0; \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} &= \text{neexistuje}; & \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty;\infty)} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} &= 0; \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0;a)} \frac{\sin xy}{x} &= a; & \lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{x+y}{x-y} &= \text{neexistuje}; \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (2;3)} \frac{y-3}{x+y-5} &= \text{neexistuje}; & \lim_{(x,y) \rightarrow (2;1)} \frac{x+3}{2x-y+7} &= \frac{1}{2}; \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{2xy}{xy+2x-y} &= \text{neexistuje}; & \lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{x-2y}{3x-y} &= \text{neexistuje}; \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (1;2)} \frac{x^3 y - xy^3 + 1}{(x-y)^2} &= -5; & \lim_{(x,y) \rightarrow (2;2)} \frac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4} &= \frac{3}{8}; \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{3(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2} + 4 - 2} &= 12; & \lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} &= \text{neexistuje}. \end{aligned}$$