

## 2. Relace, zobrazení, operace a algebraické struktury

**Definice 2.1.** Předpokládejme, že máme kartézský součin

$$A_1 \times \cdots \times A_n$$

množin  $A_1, \dots, A_n$  (ne nutně různých);  **$n$ -ární relací** potom rozumíme libovolnou podmnožinu tohoto kartézského součinu.

Nejčastěji se setkáváme s  $n = 2$ , tzn. s **binárními relacemi**, a to zejména s případem, kdy jsou podmnožinami kartézského součinu  $A \times A$  též množiny  $A$ . Označíme-li relaci  $\mathcal{R}$ , píšeme pak

$$\mathcal{R} \subset A_1 \times \cdots \times A_n,$$

případně  $\mathcal{R} \subset A \times A$ , apod.

Zde je namístě se zmínit o *relačních databázích*, které strukturují data ve formě tabulek: tyto tabulky nejsou ničím jiným, než binární relací  $\mathcal{R} \subset A \times B$ , kde  $A$  je například množina zaměstnanců,  $B$  množina vozidel a relace vyjadřuje, kdo s kterým vozidlem má právo jezdit.

**Definice 2.2. Zobrazením** neboli **funkcí** z množiny  $A$  do množiny  $B$  pak je relace, která splňuje pro všechna  $a \in A$  a všechna  $b, \bar{b} \in B$

$$(a, b) \in \mathcal{R}, \quad (a, \bar{b}) \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad b = \bar{b}.$$

Místo pak  $\mathcal{R} \subset A \times B$  užíváme zápisu

$$f: A \rightarrow B$$

a místo  $(a, b) \in \mathcal{R}$  píšeme

$$b = f(a);$$

$b$  se potom nazývá **obraz** prvku  $a$ .

**Definice 2.3.** Všechna  $a \in A$ , pro které existuje  $f(a) = b$  (v relačním zápisu: všechna  $a$ , pro něž existuje  $b$  tak, že  $(a, b) \in \mathcal{R}$ ) tvoří množinu, které říkáme **definiční obor** zobrazení  $f$  a značíme ji  $\text{Dom} f$ . Všechna  $b \in B$ , pro které existuje  $a \in A$  takové, že  $f(a) = b$  (v relačním zápisu: všechna  $b$ , pro něž existuje  $a$  tak, že  $(a, b) \in \mathcal{R}$ ) tvoří množinu, které říkáme **obor hodnot** zobrazení  $f$  a značíme ji  $\text{Im} f$ .

**Definice 2.4.** Zobrazení  $f: A \rightarrow B$ , které splňuje pro všechna  $a, \bar{a} \in A$  a všechna  $b \in B$

$$b = f(a), \quad b = f(\bar{a}) \quad \Rightarrow \quad a = \bar{a}$$

se nazývá **injekce**.

Dále, zobrazení  $f: A \rightarrow B$ , pro něž je množina všech jeho obrazů rovna  $B$ , se nazývá **surjekce**.

Zobrazení  $f: A \rightarrow B$  s definičním oborem  $\text{Dom} f = A$ , které je současně injekcí i surjekcí, označujeme slovem *bijekce* (množin  $A$  a  $B$ ).

**Definice 2.5. Inverzní relaci** k binární relaci  $\mathcal{R} \subset A \times B$  definujeme jako relaci  $\mathcal{R}^{-1} \subset B \times A$  vztahem

$$(a, b) \in \mathcal{R} \quad \Longleftrightarrow \quad (b, a) \in \mathcal{R}^{-1}.$$

Je-li  $\mathcal{R}$  zobrazení a injekce, je inverzní relace také zobrazení (a také injekce). Nazýváme ho **inverzní zobrazení**.

Další úvahy budeme často provádět pro **číselné množiny**, a sice pro:

- množinu přirozených čísel  $\mathbb{N}$
- množinu celých čísel  $\mathbb{Z}$
- množinu racionálních čísel  $\mathbb{Q}$
- množinu reálných čísel  $\mathbb{R}$

Předpokládáme zde, že tyto množiny již byly zavedeny (pokud nebyly korektně definovány, spokojíme se s běžnou intuitivní představou).

**Příklad 2.6.** V případě bijekce každému prvku množiny  $A$  odpovídá právě jeden prvek množiny  $B$ ; jsou-li množiny  $A$  a  $B$  konečné, mají nutně stejný počet prvků; jsou-li nekonečné a existuje-li mezi nimi bijekce, mají také „stejně“ prvků, přesněji říkáme, že mají stejnou **mohutnost**. Povšimněme si některých množin, které mají stejnou mohutnost jako množina přirozených čísel  $\mathbb{N}$ , tedy jejich prvky lze přirozenými čísly oindexovat. Je to je například množina všech kladných sudých čísel

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots,$$

množina všech celých čísel  $\mathbb{Z}$

$$0, -1, 1, -2, 2, \dots,$$

i všech racionálních čísel  $\mathbb{Q}$ , což dokážeme takto: racionální číslo zapíšeme ve tvaru  $\frac{p}{q}$ , kde  $p, q$  jsou nesoudělná,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , (číslo 0 zapíšeme  $\frac{0}{1}$ ). Každému číslu  $\frac{p}{q}$  nyní přiřadíme tzv. *výšku*  $r = |p| + q$  a protože je počet racionálních čísel s konkrétní výškou konečný, jejich oindexování definujeme tak, že nejdříve vypíšeme všechna čísla s výškou 1, pak s výškou 2, atd.:

$$\begin{aligned} r = 1 : & \quad \frac{0}{1} \\ r = 2 : & \quad \frac{-1}{1}, \frac{1}{1} \\ r = 3 : & \quad \frac{-2}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1} \\ r = 4 : & \quad \frac{-3}{1}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1} \\ & \quad \dots \end{aligned}$$

(Tedy. např.  $a_{10} = \frac{1}{3}$ .) Nekonečné množiny se stejnou mohutností jako  $\mathbb{N}$  se nazývají **spočetné** (množiny konečné a spočetné se dohromady označují termínem **nejvýše spočetné**).

**Příklad 2.7.** Existují však i množiny, které mají nekonečně mnoho prvků, ale bijekce s přirozenými čísly neexistuje. Takové množiny nazýváme **nespočetné**. Dokážeme nyní, že množina všech reálných čísel  $\mathbb{R}$  je nespočetná. Stačí ovšem, když dokážeme, že je nespočetná nějaká část množiny  $\mathbb{R}$ , tedy např. interval  $[0, 1)$ . Předpokládejme opak, tzn. že všechna čísla z intervalu  $[0, 1)$  lze nějak uspořádat do nekonečné posloupnosti

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \dots a_{1n} \dots \\ a_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \dots a_{2n} \dots \\ a_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \dots a_{3n} \dots \\ a_4 &= 0, a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} \dots a_{4n} \dots \\ & \quad \dots \\ a_n &= 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4} \dots a_{nn} \dots \\ & \quad \dots \end{aligned}$$

(kde  $a_{ik}$  je  $k$ -tá číslice v desetinném vyjádření čísla  $a_i$ ). Sestrojíme nyní číslo  $b = 0, b_1b_2b_3b_4 \dots b_n \dots$  takto: je-li  $a_{ii} = 1$ , klademe  $b_i = 2$ , je-li  $a_{ii} \neq 1$ , klademe  $b_i = 1$ . Číslo  $b$  takto sestavené je různé od všech čísel  $a_i$  (od  $a_1$  se liší v první číslici za desetinnou čárkou, od  $a_2$  se liší v druhé číslici za desetinnou čárkou, atd.). Protože ale  $b \in [0, 1)$ , mělo by být ve vypsaném seznamu, tzn. mělo by být některým z čísel  $a_i$ , což je spor. Interval  $[0, 1)$  a tudíž i množina  $\mathbb{R}$  jsou nespočetné množiny.

Pojem zobrazení nám umožňuje korektně (pokud nechceme akceptovat intuitivní definice jako matice je „tabulka čísel uspořádaných do řádků a sloupců“ a funkce je „předpis“) zavést řadu dalších pojmů jako

**reálná matice** nebo **reálná funkce reálné proměnné**: Jde o zobrazení

$$A: \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R},$$

respektive

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Definice 2.8.**  **$n$ -ární operací** na množině  $A$  rozumíme funkci

$$f: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A.$$

(Nejde tedy o nic jiného než o speciální  $(n + 1)$ -ární relaci.)

**Poznámka 2.9.** 1-ární operací se nazývá **unární** (například převrácená hodnota reálného čísla), 2-ární operací se nazývá **binární** (například součet dvou čísel) 3-ární operací se nazývá **ternární**, apod. Nejčastěji užívané jsou ovšem operace binární: zde místo  $(a_1, a_2, a) \in \mathcal{R}$  budeme psát

$$a_1 * a_2 = a,$$

přičemž  $*$  se nahrazuje i jinými vhodnými (a obvyklými) znaky.

**Definice 2.10.** **Algebraickou strukturou** rozumíme množinu spolu s nějakými operacemi na ní (daná struktura musí být na tyto operace uzavřená (uzavřenost znamená, že neomezené užití operace nevede nikdy k „vyběhnutí“ z množiny  $A$ ). *Algebra* se zabývá vyšetřováním obecných vlastností algebraických struktur. Jde o typický postup matematické **abstrakce**: abstraktní popis algebraických struktur pak může být *implementován* v jednotlivých problémech. Například množina  $A$  s jednou binární operací se nazývá **grupoid**; zjištěné vlastnosti grupoidů pak můžeme uplatnit například pro množinu přirozených čísel  $\mathbb{N}$  s operací sčítání  $+$ , která je grupoidem.

Důležitější algebraickou strukturou s jednou (užívány jsou ovšem i struktury s více operacemi: např. **okruh**, **pole**, aj., těm se zde již nevěnujeme) binární operací je ale **grupa**, což je množina  $G$  s binární operací  $*$  splňující

**G I.** (*Asociativita operace*) pro všechna  $a, b, c \in G$  platí  $(a * b) * c = a * (b * c)$

**G II.** (*Existence neutrálního prvku*) existuje prvek  $e \in G$  splňující pro všechna  $a \in G$  platí  
 $e * a = a * e = a$

**G III.** (*Existence opačného prvku*) pro každý prvek  $a \in G$  existuje prvek  $\bar{a} \in G$  splňující  
 $a * \bar{a} = \bar{a} * a = e.$