

Derivace funkce

Příklad 1. Zderivujte bez úpravy (takže ten, kdo zderivovaný výraz upraví, to má špatně):

- a) $f(x) = \frac{5x^2}{\sqrt[5]{x}} + 30 \sqrt[15]{x} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}},$
- b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 \sqrt{x^4 \sqrt{x^3}},}$
- c) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^4 + 2},$
- d) $f(x) = (5x^4 - 3x^3 + 2x - 11)^6,$
- e) $f(x) = \sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt{x}},}$
- f) $f(x) = \cos(5x + 3),$
- g) $f(x) = \sin^2(3x + 5),$
- h) $f(x) = \sin^3(x^5),$
- i) $f(x) = \operatorname{tg}(x^2 + 1),$
- j) $f(x) = \sin(\sin(\sin x)),$
- k) $f(x) = \sin^3(\cos^2(\operatorname{tg} x)),$
- l) $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\cos x^2},$
- m) $f(x) = x \sin^2(x^3) \ln(x^2),$
- n) $f(x) = \sqrt{x \sin x \sqrt{1 - x^2}},$
- o) $f(x) = x^x,$
- p) $f(x) = 3^{\ln x^2},$
- q) $f(x) = \ln \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} \right),$
- r) $f(x) = 10^{x \operatorname{tg} x},$
- s) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}},$
- t) $f(x) = \cos^2(x^3 - 2 \sin x),$
- u) $f(x) = \ln(-x) + e^{-x^2 + e^{-x}},$
- v) $f(x) = \left(\frac{x+3}{\sqrt{5}} \right)^2 + e^{-5},$
- w) $f(x) = \sqrt[3]{\ln \operatorname{tg} \frac{x+3}{4}},$
- x) $f(x) = 2^{\frac{x}{\ln x}} + e^{\sqrt{\ln x}},$
- y) $f(x) = 5^x \cdot x^5 \cdot \sin x,$
- z) $f(x) = e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}} + (\sqrt{3})^x,$
- zz) $f(x) = (x^x)^x,$
- yy) $f(x) = (\sin x)^{\frac{x}{\ln x}},$
- xx) $f(x) = \sin(\sqrt{2})^3,$
- ww) $f(x) = \log_2^2 x.$

Příklad 2. Zderivujte a upravte:

- a) $f(x) = x \cdot \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x},$
- b) $f'(x) = \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}},$
- c) $f(x) = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}},$
- e) $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1},$
- f) $f'(x) = \frac{x}{x^4 - 1},$
- g) $f(x) = \sqrt{x + 1} - \ln(1 + \sqrt{x + 1}),$
- h) $f'(x) = \frac{1}{2(1 + \sqrt{x + 1})},$
- i) $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{2 + 2x}{2 - 2x},$
- j) $f'(x) = \frac{1}{2 - 2x^2},$
- k) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}},$
- l) $f'(x) = -\frac{1}{\cos x},$
- m) $f(x) = \arcsin(\sin x - \cos x),$
- n) $f'(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}},$

- o) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x},$
 p) $f'(x) = -1,$
 q) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x},$
 r) $f'(x) = \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$
 s) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}},$
 t) $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{1-x}},$
 u) $f(x) = (x-2)\sqrt{1+e^x} - \ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1},$
 v) $f'(x) = \frac{x e^x}{2\sqrt{1+e^x}},$
 w) $f(x) = \frac{-\cos x}{2 \sin^2 x} + \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}},$
 x) $f'(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x},$
 y) $f(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$
 z) $f'(x) = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$

Příklad 3. Určete 1000. derivaci funkcí:

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x}.$ *Výsledek:* $f^{(1000)}(x) = 1000! \left(\frac{1}{(x-1)^{1001}} + \frac{1}{(x+1)^{1001}} - \frac{1}{x^{1001}} \right).$

b) $g(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}.$ *Výsledek:* $g^{(1000)}(x) = 1000! \left(\frac{1}{(x+1)^{1001}} - \frac{1}{(x+2)^{1001}} \right).$

Příklad 4. Napište rychle rovnici tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě A :

a) $f(x) = \frac{1}{x}, A = [\frac{1}{2}, 2];$

b) $f(x) = 2\sqrt{2} \sin x, A = [\frac{\pi}{4}, ?];$

c) $f(x) = e^{-x} \cos 2x, A = [0, ?].$

Výsledek: a) $4x + y - 4 = 0,$ b) $2x - y + 2 - \frac{\pi}{2} = 0,$ c) $x + y - 1 = 0.$

Příklad 5. Určete úhel křivek $y = f(x)$ a $y = g(x)$:

a) $f(x) = x^2, g(x) = x^3;$

b) $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x.$

Výsledek: a) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{7},$ b) $\alpha = \operatorname{arctg} (2\sqrt{2})$

Příklad 6. Určete úhel, pod kterým protíná graf funkce $f(x)$ osu x :

a) $f(x) = \sin x;$

b) $f(x) = \ln(x-1).$

Výsledek: a) $\frac{\pi}{4},$ b) $\frac{\pi}{4}.$