

## Základní vlastnosti funkcí

V příkladech 1 až 6 nakreslete grafy příslušných funkcí, určete dále definiční obor a obor hodnot. Grafy nakreslete postupně v jednotlivých krocích pomocí posunutí a překlacení grafů v základním tvaru, tj. bez použití kalkulačky. U každého obrázku vyznačte souřadnicové osy a případné asymptoty a dále průsečíky grafu se souřadnicovými osami.

### Příklad 1. Exponenciální funkce:

- a)  $f(x) = 2 - 3^{-(x-1)}$ ,      b)  $f(x) = -3^{-x}$ ,      c)  $f(x) = |3^{|x+1|} - 5|$ ,  
 d)  $f(x) = \pi^{2-x}$ ,      e)  $f(x) = (\frac{1}{e})^{-x-5}$ ,      f)  $f(x) = |(\frac{1}{3})^{2-x} - 1|$ ,  
 g)  $f(x) = |3^{1-x} - 1|$ ,      h)  $f(x) = |(\frac{\pi}{2})^{|x+1|} - 5|$ ,      i)  $f(x) = |2 - 3^{1-x}|$ .

### Příklad 2. Logaritmická funkce:

- a)  $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} |x+2| - 1$ ,      b)  $f(x) = 1 - \log(-x)$ ,      c)  $f(x) = |\log |x| - 1| - 1$ ,  
 d)  $f(x) = |\log_{\pi}(3-x) - 5|$ ,      e)  $f(x) = -\log_{0,3} x$ ,      f)  $f(x) = |\log_{\frac{1}{e}}(5-x) - 4| + 2$ ,  
 g)  $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{x}) - 2$ ,      h)  $f(x) = \log_5(5^x)$ ,      i)  $f(x) = 5^{\log_5 x}$ .

### Příklad 3. Funkce mocninná:

- a)  $f(x) = |5 - (x-2)^5|$ ,      b)  $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$ ,      c)  $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ ,  
 d)  $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ ,      e)  $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + 2$ ,      f)  $f(x) = (x+5)^{-\frac{2}{3}} - 1$ ,  
 g)  $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + 5$ ,      h)  $f(x) = \sqrt[5]{(x-1)^3} + 3$ ,      i)  $f(x) = \sqrt[3]{(x-5)^4}$ ,  
 j)  $f(x) = x\sqrt{x}$ ,      k)  $f(x) = -1 - \frac{1}{(x+2)^2}$ ,      l)  $f(x) = 2 - \sqrt[5]{(x+2)^3}$ ,  
 m)  $f(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$ ,      n)  $f(x) = \frac{x+5}{2-x}$ .

### Příklad 4. Funkce goniometrické:

- a)  $f(x) = |\sin(x-1)| - 2$ ,      b)  $f(x) = 1 + 2\sin(x - \frac{\pi}{2})$ ,      c)  $f(x) = -\frac{3}{2}\sin(3x + \frac{\pi}{4})$ ,  
 d)  $f(x) = -2\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) + 1$ ,      e)  $f(x) = 2 - 2\cos(2x - \frac{\pi}{2})$ ,      f)  $f(x) = -\cotg(\frac{\pi}{4} - x) + 2$ .

### Příklad 5. Funkce cyklometrické:

- a)  $f(x) = |\frac{\pi}{2} - \arcsin(x-3)|$ ,      b)  $f(x) = \operatorname{arccotg}(x-2) - 1$ ,      c)  $f(x) = 3 - \arccos(x - \frac{\pi}{2})$ ,  
 d)  $f(x) = \sin(\arcsin x)$ ,      e)  $f(x) = \arcsin(\sin x)$ .

### Příklad 6. Různé funkce:

- a)  $f(x) = ||x-5| + 1|$ ,      b)  $f(x) = \frac{x}{x^2}$ ,      c)  $f(x) = \sqrt{x^2}$ ,  
 d)  $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ,      e)  $f(x) = |x-1| + 2|x-2| - |x|$ ,      f)  $f(x) = \frac{|x-1|}{1+|x|}$ ,  
 g)  $f(x) = \sinh x$ ,      h)  $f(x) = \cosh x$ .

### Příklad 7. Určete definiční obor následujících funkcí:

- a)  $f(x) = \sqrt{3x-x^3}$ ;      Výsledek:  $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ .  
 b)  $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$ ;      Výsledek:  $\langle -1, 2 \rangle$ .  
 c)  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-5x+6} + \sqrt[3]{2x+1}$ ;      Výsledek:  $\mathbf{R} - \{-2, -3\}$ .  
 d)  $f(x) = \ln(1-e^x)$ ;      Výsledek:  $(-\infty, 0)$ .  
 e)  $f(x) = 5 + e^{\frac{1}{x-2}}$ ;      Výsledek:  $x \neq 2$ .  
 f)  $f(x) = \ln \frac{e^x-1}{e^x}$ ;      Výsledek:  $(0, \infty)$ .  
 g)  $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ ;      Výsledek:  $\langle 0, \infty \rangle$ .  
 h)  $f(x) = \arccos(2x)$ ;      Výsledek:  $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ .  
 i)  $f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$ ;      Výsledek:  $(-\infty, -1) \cup \langle 1, \infty \rangle$ .  
 j)  $f(x) = \arcsin(\ln \frac{x}{e})$ ;      Výsledek:  $\langle 1, e^2 \rangle$ .  
 k)  $f(x) = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ;      Výsledek:  $\langle -1, 1 \rangle$ .

### Příklad 8. K dané funkci určete funkci inverzní:

- a)  $f(x) = 3x$ ;      Výsledek:  $\frac{x}{3}$ .  
 b)  $f(x) = \frac{x-1}{1-3x}$ ;      Výsledek:  $\frac{2x+1}{3x+1}$ .  
 c)  $f(x) = -2x^3$ ;      Výsledek:  $-\sqrt[3]{\frac{x}{2}}$ .  
 d)  $f(x) = \ln \frac{3}{x-1}$ ;      Výsledek:  $1 + 3e^{-x}$ .  
 e)  $f(x) = \sin 2x$ ;      Výsledek:  $\frac{1}{2}\arcsin x$ .  
 f)  $f(x) = \frac{1}{x}\sqrt[5]{x^2}$ ;      Výsledek:  $x^{-\frac{5}{3}}$ .  
 g)  $f(x) = 1 - 2^{-x}$ ;      Výsledek:  $\frac{-\ln(1-x)}{\ln 2}$ .

### Příklad 9. Rozhodněte o sudosti (lichosti) funkce:

- a)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ; *Výsledek: L.*  
b)  $f(x) = 2^x$ ; *Výsledek: ani S ani L.*  
c)  $f(x) = 2 \sin(x^2) - 17$ ; *Výsledek: S.*  
d)  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ ; *Výsledek: L.*  
e)  $f(x) = x \ln|x|$ ; *Výsledek: L.*  
f)  $f(x) = 2^{-x} + 2^x$ ; *Výsledek: S.*  
g)  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ; *Výsledek: S.*

**Příklad 10.** Utvořte složené funkce  $f(g(x))$ ,  $g(f(x))$ ,  $f(f(x))$ ,  $g(g(x))$  eventuelně rozhodněte kdy složená funkce neexistuje:

- a)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \sin x$ ;      b)  $f(x) = -x^2$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ ;  
c)  $f(x) = |2x - 1|$ ,  $g(x) = |x - 3|$ ;      d)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ ;  
e)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 2^x$ .

**Příklad 11.** Rozhodněte, zda se rovnají funkce  $f(x)$  a  $g(x)$ :

- a)  $f(x) = \sqrt{x^2}$ ,  $g(x) = |x|$ ; *Výsledek: ano.*  
b)  $f(x) = 1$ ,  $g(x) = \frac{x}{x}$ ; *Výsledek: ne.*  
c)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \frac{x}{x^2}$ ; *Výsledek: ano.*