Aplikace určitého integrálu

Příklad 1. Vypočtěte plošný obsah množiny omezené:
a) Křivkou $f(x) = \sin x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$ a přímkou $y = \frac{1}{2}$; *Výsledek:* $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.
b) Křivkami $f(x) = x^2$ a $f(x) = \sqrt{x}$; *Výsledek:* $\frac{1}{3}$.
c) Grafy funkcí $f(x) = \sin^3 x$, $f(x) = \cos^3 x$ a přímkami $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$; *Výsledek:* $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{2}{3}$.
d) Křivkou $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, osou x a osou y; *Výsledek:* $\frac{a^2}{6}$.
e) Parabolou $x + y + y^2 = 2$ a osou y; *Výsledek:* $\frac{9}{2}$.

Příklad 2. Určete objem množiny vzniklé rychlou rotací funkce $\sin x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$ kolem osy x;
Výsledek: $\frac{\pi^2}{2}$.

Příklad 3. Určete objem a povrch tělesa vzniklého pomalou rotací astroidy $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ kolem osy x. Určete do třetice všeho dobrého délku astroidy.
Výsledek: Objem=$\frac{32\pi a^3}{105}$, povrch=$\frac{12\pi a^2}{5}$, délka=$6a$.

Příklad 4. Odvoďte notoricky známý vzoreček pro povrch koule o poloměru r; *Výsledek:* $4\pi r^2$.

Příklad 5. Pomocí určitého integrálu určete obsah trojúhelníka ABC, kde $A = [-1, 0]$, $B = [2, 0]$, $C = [0, 2]$; *Výsledek:* 3.

Příklad 6. Určete objem rotačního elipsoidu vzniklého rotací elipsy $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ kolem osy x; *Výsledek:* $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

Příklad 7. Určete délku oblouku cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Vypočtěte dále povrch tělesa vzniklého rotací tohoto oblouku cykloidy kolem osy x; *Výsledek:* $L = 8a, S = \frac{64}{3}\pi a^2$.

Příklad 8. Určete obsah obrazce omezeného parabolami:
a) $y = \frac{x^2-2}{3}$, $y = x^2 - \frac{4}{3}x - 6$; *Výsledek:* 24.
b) $x^2 - 9y + 8 = 0$, $x^2 + 3y - 4 = 0$; *Výsledek:* $\frac{16}{27}$.

Příklad 9. Vypočtěte Příklad 1 ještě jednou.

Příklad 10. Určete objem anuloidu a povrch anuloidové plochy. Anuloid přitom vznikne rotací kružnice $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ kolem osy y; *Výsledek:* $V = 2\pi^2 r^2 a$, $S = 4\pi^2 ar$.

Příklad 11. Určete délku křivky dané polární rovnicí $\rho = \mathrm{e}^{\varphi}$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$; *Výsledek:* $\sqrt{2}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)$.

Příklad 12. Určete plošný obsah množiny omezené následující křivkou:
a) Kardioidou $\rho = a(1 + \cos\varphi)$; *Výsledek:* $\frac{3}{2}\pi a^2$.
b) Lemniskatou $\rho^2 = a^2\cos(2\varphi)$; *Výsledek:* a^2.
c) Descartovým listem $x^3 + y^3 = 3axy$; *Výsledek:* $\frac{3a^2}{2}$.