

Limita a spojitost funkce

Příklad 1. Spočítejte tyto zcela triviální limity (načrtněte si předem graf $f(x)$):

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

pro následující funkce:

- a) $f(x) = x^2$;
- b) $f(x) = \frac{1}{x}$;
- c) $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

Příklad 2. Vypočítejte

- a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x$;
- b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x$;
- c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$;
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x$.

Příklad 3. Vypočítejte následující triviální limity:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$; *Výsledek: limita neexistuje.*
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$; *Výsledek: 0.*
- c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x$; *Výsledek: $\frac{\pi}{2}$.*
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x$; *Výsledek: $-\frac{\pi}{2}$.*
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccotg} x$; *Výsledek: 0.*
- f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} x$; *Výsledek: π .*
- g) $\lim_{x \rightarrow 0} 3^{-x}$; *Výsledek: 1.*
- h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \pi^{-x}$; *Výsledek: 0.*
- i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log x^2$; *Výsledek: ∞ .*
- j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log |x|$; *Výsledek: $-\infty$.*

Příklad 4. Rychle vypočítejte následující limity (limity spočítejte zdravým rozumem, tj. bez l' Hospitalova pravidla).

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$; *Výsledek: 4.*
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$; *Výsledek: $\frac{3}{4}$.*
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1}$; *Výsledek: 1.*
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7}$; *Výsledek: ∞ .*
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x+3}{x^3-8x+5}$; *Výsledek: 0.*
- f) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cotg x$; *Výsledek: 1.*
- g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$; *Výsledek: $\frac{1}{2}$.*
- h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3}$; *Výsledek: ∞ .*
- i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$; *Výsledek: 2.*
- j) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$; *Výsledek: $\frac{1}{2}$.*
- k) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; *Výsledek: -2.*
- l) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; *Výsledek: $-\frac{1}{56}$.*
- m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$; *Výsledek: $\frac{3}{4}$.*
- n) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x} \right)^x$; *Výsledek: 1.*

- o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{2x}{x+1}};$ Výsledek: 0.
- p) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right)^{\frac{\sin x}{x}};$ Výsledek: $\frac{3}{2}$.
- q) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1} \right)^{x^2};$ Výsledek: 0.
- r) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}};$ Výsledek: $\frac{1}{2}$.
- s) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos^2 x}{x};$ Výsledek: 0.
- t) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2};$ Výsledek: 1.
- u) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{x^2 + x + 3}{x^2 - 2};$ Výsledek: 0.
- v) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x};$ Výsledek: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- w) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x^2 + 1} + \frac{x}{\sin x} \right);$ Výsledek: 4.
- x) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x};$ Výsledek: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
- y) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x - \frac{2}{x^2} \right);$ Výsledek: $-\infty$.
- z) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right);$ Výsledek: $\frac{\pi}{2}$.
- aa) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right);$ Výsledek: $-\frac{\pi}{2}$.
- bb) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^3 x}{e^{\frac{1}{x}}};$ Výsledek: ∞ .
- cc) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \cos x};$ Výsledek: 1.
- dd) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1};$ Výsledek: 3.
- ee) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x};$ Výsledek: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- ff) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1};$ Výsledek: $\frac{1}{2}$.
- gg) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x};$ Výsledek: $\frac{3}{5}$.
- hh) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$ Výsledek: $\frac{1}{2}$.
- ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x};$ Výsledek: 1.
- jj) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x);$ Výsledek: 3.
- kk) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x});$ Výsledek: 1.
- ll) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x);$ Výsledek: 0.
- mm) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{1 - x^3});$ Výsledek: 0.
- nn) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1};$ Výsledek: ∞ .
- oo) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1};$ Výsledek: ∞ .
- pp) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$ Výsledek: ∞ .
- qq) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1};$ Výsledek: $\frac{4}{3}$.
- rr) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x} - 2};$ Výsledek: 12.
- ss) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1};$ Výsledek: $-\infty$.

Příklad 5. Ukažte, že následující rovnice má řešení a nalezněte nějaký interval, který toto řešení obsahuje. (Nápověda: řešte metodou půlení intervalů.)

- a) $\sqrt{x^4 + 1} \cdot \ln(x^2 + 3) - \frac{e^x}{1 + \sin^2 x} = 3$
 b) $e^x - 6x = 3$.

Příklad 6. Udejte příklad dvou funkcí nespojitých v bodě 0, jejichž součet je funkce spojitá v bodě 0.

Příklad 7. Udejte příklad funkcí $f(x)$ a $g(x)$, které jsou nespojité, zatímco složená funkce $f[g(x)]$ je spojitá.