Základy logiky a teorie množin - neřešené příklady

Příklad 1. Určete pravdivostní hodnotu výroku $\big((2 \cdot 3 = 6) \vee (3 \cdot 4 = 14)\big) \Rightarrow (2 < 1)$.

Příklad 2. Určete pravdivostní hodnotu výroku $\big((1 < 2) \wedge (2 \neq 2)\big) \Rightarrow (3 \cdot 5 = 16)$.

Příklad 3. Znegujte složený výrok $2 \leq 3 \Rightarrow 2 \cdot 3 = 6$.

Příklad 4. Znegujte $(1 + 2 = 3) \Rightarrow (1 > 2 \vee 3 \leq 4)$.

Příklad 5. Znegujte $\forall x \in \mathbb{N} : x > 3 \Rightarrow 2x > 5$.

Příklad 6. Nalezněte přímý důkaz nerovnosti $\sqrt{19} > 2 + \sqrt{5}$.

Příklad 7. Dokažte sporem, že $\sqrt{13} \geq 2\sqrt{3}$.

Příklad 8. Dokažte, že $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A' \vee B)$ je tautologie.

Příklad 9. Dokažte, že $(A' \vee B) \wedge (A' \Rightarrow B)$ je kontradikce.

Příklad 10. Nechť $A \Rightarrow B$ a $C \Rightarrow D$. Plyne odtud $A \wedge C \Rightarrow B \wedge D$? Dokažte.

Příklad 11. Dokažte, zda pro implikaci platí asociativní zákon.

Příklad 12. K formulím $A', A \wedge B, A \vee B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B$ najděte formule logicky ekvivalentní, v nichž se vyskytuje pouze logická spojka Shefferův symbol.

Příklad 13. Znegujte logický zápis $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.

Příklad 14. Dokažte, nebo vyvraťte $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : c|ab \Rightarrow c|a \vee c|b$.

Příklad 15. Dokažte sporem $\forall a, b \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Příklad 16. Nalezněte nepřímý důkaz tvrzení $\forall x \in \mathbb{N} : x^3$ je sudé $\;\Rightarrow\;$ x je sudé.

Příklad 17. Dokažte přímo, nepřímo i sporem $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Příklad 18. Dokažte sporem, že všech prvočísel je nekonečně mnoho.

Příklad 19. Dokažte, že $\forall x \in \mathbb{R} : \sin x + \cos x \neq \frac{3}{2}$.

Příklad 20. Dokažte, že $\log_2 3$ není racionální číslo.

Příklad 21. Dokažte matematickou indukcí $\forall n \in \mathbb{N} : 3|2^{2n} - 7$.

Příklad 22. Pomocí matematické indukce dokažte tvrzení $\forall n \in \mathbb{N} : 6|n^3 + 5n$.

Příklad 23. Pomocí matematické indukce dokažte tvrzení $\forall n \in \mathbb{N} : 7|n^7 - n$.

Příklad 24. Pomocí matematické indukce dokažte tvrzení $\forall n \in \mathbb{N} : 11|2 \cdot 3^{5n-4} + 5$.

Příklad 25. Buď p libovolné prvočíslo. Pak $\sqrt{p}$ není racionální. Dokažte.

Příklad 26. Dokažte, že $2(\sin 54° - \sin 18°) = 1$.

Příklad 27. Když si dám aperitiv, dám si i předkrm. Nedám-li si hlavní jídlo, nedám si předkrm. Vyplývá z uvedeného, že dám-li si aperitiv, dám si i hlavní jídlo? Vyplývá z uvedeného, že dám-li si hlavní jídlo, pak si dám aperitiv?

Příklad 28. Detektiv vyšetřuje případ vraždy. Vyšetřováním se okruh podezřelých zúžil na tři osoby A, B, C. O přítomnosti podezřelých na místě činu bylo zjištěno: Jestliže byl v kritické době na místě činu podezřelý C, pak tam nebyl podezřelý A, ale byl tam podezřelý B. Není pravda, že na místě činu nebyl A a přitom tam nebyl C. Pokud byl na místě činu podezřelý A, nebyl tam C, a když tam nebyl C, byl tam A. Detektiv promyslel všechny možnosti a zjistil, že mu informace k usvědčení vraha nestačí. Při dalším vyšetřování se však zjistilo, že pachatel byl na místě činu sám. Který z podezřelých je vrah?

Příklad 29. Ve výstavní síni byl odcizen obraz. Z výslechů svědků lze fakta o přítomnosti podezřelých A, B, C ve výstavní síni shrnout do tří závěrů. 1. Ve výstavní síni v té době nebyl B ale byl tam aspoň jeden z dvojice A, C 2. Jestliže není pravda, že tam byl A současně s B, pak tam nebyl také C. 3. Podezřelý C tam byl právě tehdy, když tam nebyl žádný z dvojice A, B. Zjistěte, který z podezřelých zcizil obraz.

Příklad 30. O podezřelých A, B, C z trestného činu jsou prověřeny tyto informace. Jestliže spáchal trestný čin podezřelý B, pak je vinen i podezřelý C. Spáchal-li trestný čin podezřelý C, pak mu pomáhal A. Nespáchal-li trestný čin podezřelý B, podílel se na činu podezřelý C. Je-li vinen podezřelý A, není vinen podezřelý B. Jaký závěr musí učinit z těchto informací vyšetřující soudce?

Příklad 31. Hudební skupina má mít koncert, který začíná za 17 minut. Aby se členové skupiny dostali na místo koncertu, musí přejít přes most. Všichni čtyři muži A, B, C, D se nachází na jedné straně mostu. Je noc. Mají jednu baterku. Přes most mohou jít současně maximálně dvě osoby. Každá procházející skupina, bez ohledu na to, zda je to 1 nebo 2 osoby, musí mít sebou baterku. Baterka musí být vždy z jedné strany na druhou nesena. Není možno ji hodit, ani nic podobného. Každý člen skupiny chodí jinak rychle. Jdou-li ve skupině dva, musí jít tak rychle, jak to zvládá pomalejší z nich. Doba pro přechod jednotlivých členů skupiny je následující: A 1 minuta, B 2 minuty, C 5 minut, D 10 minut.

Příklad 32. Einsteinova tajemná ulička. Albert Einstein, tvůrce této úlohy tvrdil, že 98 % lidí jej nevyřeší. Je 5 domů a každý má jinou barvu. V každém domě žije jeden člověk, který pochází z jiného státu. Každý z majitelů pije jeden druh nápoje, kouří jeden druh cigaret a chová jedno zvíře. Žádný z nich nepije stejný nápoj, nekouří stejný druh cigaret a nechová stejné zvíře. Dále jsou známa následující fakta:

1. Brit bydlí v červeném domě.
2. Švéd chová psa.
3. Dán pije čaj.
4. Zelený dům stojí hned nalevo od bílého.
5. Majitel zeleného domu pije kávu.
6. Ten, kdo kouří PallMall, chová ptáka.
7. Majitel žlutého domu kouří Dunhill.
8. Ten, kdo bydlí uprostřed řady domů, pije mléko.
9. Nor bydlí v prvním domě.
10. Ten, kdo kouří Blend, bydlí vedle toho, kdo chová kočku.
11. Ten, kdo chová koně, bydlí vedle toho, kdo kouří Dunhill.
12. Ten, kdo kouří BlueMaster, pije pivo.
13. Němec kouří Prince.
14. Nor bydlí vedle modrého domu.
15. Ten, kdo kouří Blend, má souseda, který pije vodu.

Otázka zní: Kdo chová rybičky?