# Matice a determinanty - neřešené příklady

**Příklad 1.** Jsou dány matice $A, B, C$. Spočtěte:
a) $(AB)^T - 2C$;
b) $BCA - A^T C^T$, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 2.** Jsou dány matice $A$, $B$. Ověřte platnost vztahu $(AB)^T = B^T A^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 3.** Najděte všechny matice komutativní s maticí $A$, s maticí $B$ a s oběma maticemi současně.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 4.** Spočtěte $n$-té mocniny následujících matic. Návod: Vypočtěte mocniny pro malá $n$, tj. 1,2,3,... Na základě získaných výsledků zformulujte hypotézu pro $n$-tou mocninu. Hypotézu pak dokažte pomocí matematické indukce.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = ?, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = ?, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = ?.$$

**Příklad 5.** Najděte všechny matice typu 3/3 nad množinou $\{0, 1\}$, které mají vlastnost $A^2 = E$, tj. jsou inverzní samy k sobě. Stejnou úlohu řešte nad množinou $\{-1, 0, 1\}$.

**Příklad 6.** Buď $A$ čtvercová matice s vlastností $A^2 - A - E = 0$. Dokažte, že k $A$ existuje inverzní matice $A^{-1}$ a určete ji.

**Příklad 7.** Je dána matice typu 3/3. Spočtěte inverzní matici
a) pomocí adjungované matice;
b) pomocí elementárních transformací.
Proveďte zkoušku.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = ?, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = ?, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = ?.$$

**Příklad 8.** K daným maticím nalezněte inverzní

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = ?, \qquad \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = ?, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ & & & \dots & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{-1} = ?.$$

**Příklad 9.** Jsou dány matice $A, B$ typu 2/2. Spočtěte $B^{-1}A^{-1} - (AB)^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 10.** Vypočtěte Sarrusovým pravidlem následující determinanty, je-li $z$ komplexní číslo v goniometrickém tvaru $z = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$.

$$\begin{vmatrix} z^3 & 1 \\ 1 & z^2 \end{vmatrix} = ?, \qquad \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ -z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} = ?.$$

**Příklad 11.** Kolik času je zapotřebí k výpočtu determinantu matice $10 \times 10$ podle definice, je-li doba potřebná k vynásobení 10 čísel 1s a k jejich sečtení 0.1s?

**Příklad 12.** Vypočtěte determinant matice:
a) Sarrusovým pravidlem;
b) úpravou na schodovitý tvar;
c) rozvojem podle třetího řádku;
d) rozvojem podle druhého sloupce.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \\ -5 & 4 & -9 \end{vmatrix} =? \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} =?$$

**Příklad 13.** Matice typu n/n je postupně po řádcích naplněna čísly $1, 2, \ldots, n^2$. Spočtěte, čemu je roven její determinant pro libovolné $n$.

**Příklad 14.** Spočtěte následující determinanty matic typu n/n.

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \ldots & n \\ n & 2 & n & \ldots & n \\ n & n & 3 & \ldots & n \\ & & & \ldots & \\ n & n & n & \ldots & n \end{vmatrix} = ? \qquad \begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & \ldots & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix} = ?$$